УДК 517.9

Сергій Бак,
докт. фіз.-мат. наук, професор
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Галина Ковтонюк,
канд. пед. наук, доцент
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Тетяна Липа,
студентка факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ ОСЦИЛЯТОРІВ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ

Анотація. *У статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Показано, що розв'зок задачі Коші з простору* l^2 *належить ваговому простору* l^2_Θ *для будь-якої регулярної ваги.*

Ключові слова: *системи осциляторів, двовимірна ґратка, задача Коші, вагові простори.*

Abstract. *The article studies the equations describing the dynamics of an infinite system of linearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. It is shown that a solution to the Cauchy problem from the space* l^2 *belongs to weighted space* l^2_Θ *for any regular weight.*

Key words: *systems of oscillators, two-dimensional lattice, Cauchy problem, weighted spaces.*

В даній роботі вивчаються деякі питання динаміки нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Нехай $q_{n,m} = q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n,m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,\,m} = a_{n-1,\,m}\left(q_{n-1,\,m} - q_{n,\,m}\right) - a_{n,\,m}\left(q_{n,\,m} - q_{n+1,\,m}\right) + b_{n,\,m-1}\left(q_{n,\,m-1} - q_{n,\,m}\right) - \\ - b_{n,\,m}\left(q_{n,\,m} - q_{n,\,m+1}\right) - U'_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right),\ \left(n,\,m\right) \in \mathbb{Z}^2. \tag{1}$$

де коефіцієнти $a_{n,\,m}$ і $b_{n,\,m}$ утворюють послідовності дійсних чисел, а функція $V_{n,\,m} \in C^1\left(\mathbb{R};\mathbb{R}\right)$ є зовнішнім потенціалом. Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Такі системи є цікавими з огляду на їх численні фізичні застосування (див., наприклад, [1; 5]).

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,\,m\to\pm\infty} q_{n,\,m}\left(t\right) = 0, \tag{2}$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_{n,\,m}\left(r\right)$ запишемо у вигляді $U_{n,\,m}\left(r\right) = -\dfrac{d_{n,\,m}}{2}r^2 + V_{n,\,m}\left(r\right)$ і покладемо $c_{n,\,m} = d_{n,\,m} - a_{n-1,\,m} - a_{n,\,m} - b_{n,\,m-1} - b_{n,\,m}$. Тоді система (1) набуде вигляду

$$\ddot{q}_{n,\,m} = a_{n-1,\,m}q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m}q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1}q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m}q_{n,\,m+1} + \\ + c_{n,\,m}q_{n,\,m} - V'_{n,\,m}(q_{n,\,m}),\ \left(n,\,m\right) \in \mathbb{Z}^2. \tag{3}$$

За певних припущень це рівняння природно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{4}$$

де $\left(Aq\right)_{n,\,m} = a_{n-1,\,m}q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m}q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1}q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m}q_{n,\,m+1} + c_{n,\,m}q_{n,\,m}$, а нелінійний оператор B визначається формулою $\left(B(q)\right)_{n,\,m} = V'_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right)$, в гільбертовому (або навіть банаховому) просторі E дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \left(q_{n,\,m}\right)$. Зауважимо, що найпростішим випадком простору E є простір $l^2 = l^2\left(\mathbb{Z}^2\right)$ дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \left(q_{n,\,m}\right)$ зі скалярним добутком $\left(q^{(1)}, q^{(2)}\right) = \sum_{(n,\, m)\in\mathbb{Z}^2} q^{(1)}_{n,\, m} q^{(2)}_{n,\, m}$ і відповідною нормою $\|q\| = (q,\, q)^{\frac{1}{2}}$.

Передбачається, що

(i) *послідовності* $\{a_{n,m}\}$, $\{b_{n,m}\}$ *і* $\{d_{n,m}\}$ *дійсних чисел обмежені;*

(ii) $V_{n,m}(r)$ *– функція класу* C^1 *на* $\mathbb{R}$, $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$ *і для будь-якого* $R > 0$ *існує таке* $C = C(R) > 0$, *що для всіх* $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$:

$$\left|V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)\right| \le C|r_1 - r_2|, \quad |r_1|,|r_2| \le R. \tag{5}$$

Іноді замість (ii) ми будемо використовувати більш строге припущення:

(ii') *припущення* (ii) *виконується зі сталою* C, *яка не залежить від* $R > 0$, *тобто існує така стала* $C > 0$, *що для всіх* $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$:

$$\left|V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)\right| \le C|r_1 - r_2|.$$

Задача Коші полягає у знаходженні розв'язку рівняння (4), який задовольняє початкові умови

$$q(0) = q^{(0)},\ \dot{q}(0) = q^{(1)}, \tag{6}$$

де $q^{(0)}$ та $q^{(1)}$ задані елементи простору E.

За означенням, *розв'язком* рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значенням в E, яка задовольняє це рівняння. Якщо розв'язок визначений на всій числовій прямій, то він називається *глобальним*, у протилежному випадку – *локальним*.

Зазначимо, що задача Коші для систем осциляторів на одновимірній ґратці вивчалася в статтях [3; 4; 11], а для систем осциляторів на двовимірній ґратці в статтях [2; 8–10; 12]. У цих статтях вивчалися питання існування локальних і глобальних розв'язків, їх обмеженості у просторі l^2. Питання коректності задачі Коші для дискретного нелінійного рівняння Шредінгера вивчалося в статті [7].

Нехай $\Theta = \{\theta_{n,m}\}$ послідовність додатних чисел (*вага*). Тоді позначимо через l^2_Θ простір всіх двохсторонніх послідовностей дійсних чисел з нормою

$$\|u\|_\Theta = \left(\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \theta_{n,m} u^2_{n,m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(u, v)_\Theta = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \theta_{n,m} u_{n,m} v_{n,m}.$$

Всюди далі припускаємо, що вага задовольняє таку умову:

(iii) *послідовність* $\Theta = \{\theta_{n,m}\}$ *є обмеженою знизу додатною сталою та існує стала* $c_0 > 0$ *така, що*

$$c_0^{-1} \le \frac{\theta_{n+1,\, m}}{\theta_{n,\, m}}, \frac{\theta_{n,\, m+1}}{\theta_{n,\, m}} \le c_0$$

для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.

Вага, яка задовольняє умову (iii) називається *регулярною*.

Згідно цієї умови вагові простори l^2_Θ неперервно і компактно вкладені в l^2, причому

$$\|u\| \le C_1 \|u\|_\Theta, \; u \in l^2_\Theta,$$

з деякою сталою $C_1 > 0$. Тому всі ці простори неперервно і компактно вкладені в простір l^∞ обмежених послідовностей з нормою

$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |u_{n,m}|.$$

Якщо $\theta_{n,m} \equiv 1$, то $l^2_\Theta = l^2$.

З точки зору функціонального аналізу умова (iii) є природною. Вона означає, що простір l_{Θ}^{2} є трансляційно інваріантним. Нехай $T_{+}^{(i)}$ та $T_{-}^{(i)}$ $(i=1,\,2)$ оператори зсувів, означені рівностями

$$\left(T_{+}^{(1)}\right)_{n,\,m}=q_{n-1,\,m},\ \left(T_{-}^{(1)}\right)_{n,\,m}=q_{n+1,\,m},$$

$$\left(T_{+}^{(2)}\right)_{n,\,m}=q_{n,\,m-1},\ \left(T_{-}^{(2)}\right)_{n,\,m}=q_{n,\,m+1}.$$

Таким чином, у цій статті встановлено умови, за яких l^2-розв'язок задачі Коші для системи осциляторів на двовимірній ґратці є розв'язком відповідної задачі у вагових l^2-просторах.

Лема 1. *Умова* (iii) *виконується тоді і тільки тоді, коли всі оператори* $T_{\pm}^{(i)}$ $(i=1,\,2)$ *є обмеженими в* l_{Θ}^{2}.

Доведення.

Справді, маємо

$$\left\|T_{+}^{(1)}\right\|_{\Theta}^{2}=\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta_{n,\,m}\left|q_{n-1,\,m}\right|^2=\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta_{n+1,\,m}\left|q_{n,\,m}\right|^2=$$

$$=\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta_{n,\,m}\frac{\theta_{n+1,\,m}}{\theta_{n,\,m}}\left|q_{n,\,m}\right|^2.$$

А це означає, що $T_{+}^{(1)}$ є обмеженим у просторі l_{Θ}^{2}, тоді і тільки тоді, коли послідовність $\dfrac{\theta_{n+1,\,m}}{\theta_{n,\,m}}$ обмежена.

Аналогічно, $T_{-}^{(1)}$, $T_{+}^{(2)}$, $T_{-}^{(2)}$ є обмженими у просторі l_{Θ}^{2} тоді і тільки тоді, коли обмеженими є відповідно послідовності $\dfrac{\theta_{n-1,\,m}}{\theta_{n,\,m}}$, $\dfrac{\theta_{n,\,m+1}}{\theta_{n,\,m}}$, $\dfrac{\theta_{n,\,m-1}}{\theta_{n,\,m}}$. Лему доведено. □

Найбільш важливими прикладами ваг, які задовольняють умову (iii) є степенева та експоненціальна ваги:

$$\theta_{n,\,m} = \left(1+|n|+|m|\right)^{\alpha},\ \ \alpha > 0,$$

$$\theta_{n,\,m} = \exp\left(\alpha\left(|n|+|m|\right)\right),\ \ \alpha > 0.$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови* (i) *та* (iii). *Тоді оператор* A *є обмеженим в* l^2_Θ.

Доведення.

Оператор A можна подати у вигляді

$$A = a \circ T_-^{(1)} + T_+^{(1)} \circ a + b \circ T_-^{(2)} + T_+^{(2)} \circ b + c,$$

де a, b, c є операторами множення на послідовності коефіцієнтів $a_{n,\,m}$, $b_{n,\,m}$, $c_{n,\,m}$, $\circ$ позначає композицію операторів. Оскільки оператори $T_-^{(1)}, T_+^{(1)}, T_-^{(2)}, T_+^{(2)}$, a, b, c є обмеженими у просторі l^2_Θ за лемою 1 та умовою (i) відповідно, то це означає, що оператор A є також обмеженим в l^2_Θ. Лему доведено. □

Лема 3. *Нехай виконуються умова* (ii). *Тоді оператор* B *є локально неперевним за Ліпшицем у просторі* l^2_Θ, *тобто для будь-якого* $R > 0$ *існує стала* $C = C(R) > 0$ *така, що*

$$\left\|B\left(q^{(1)}\right) - B\left(q^{(2)}\right)\right\|_\Theta \le C\left\|q^{(1)} - q^{(2)}\right\|_\Theta \tag{7}$$

для всіх $q^{(i)} \in l^2_\Theta$ *з* $\left\|q^{(i)}\right\|_\Theta \le R$ $(i = 1, 2)$. *Якщо ж виконується умова* (ii'), *то оператор* B *є глобально неперевним за Ліпшицем у просторі* l^2_Θ, *тобто сталу* C *в нерівності (7) можна вибрати незалежно від* R.

Доведення.

Нехай виконується умова (ii), $q \in l^2_\Theta$ з $\|q\|_\Theta \le R$. Тоді оскільки

$$\|q\|_{l^\infty} \le \|q\| \le C_1\|q\|_\Theta \le C_1 R = R_1,$$

то нерівність (5) та умова $V'_{n,\,m}(0) = 0$ означає, що

$$\left|V'_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right)\right| \le C\left|q_{n,\,m}\right|$$

та

$$\left\| B(q) \right\|_{\Theta} = \left(\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2} \theta_{n,\,m} \left| V'_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C \left(\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2} \theta_{n,\,m} \left| q_{n,\,m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C \left\| q \right\|_{\Theta}.$$

Такми чином, $B(q) \in l^2_{\Theta}$ та $\left\| B(q) \right\|_{\Theta} \le C \left\| q \right\|_{\Theta}$.

Нехай тепер $q^{(i)} = \left\{ q^{(i)}_{n,\,m} \right\} \in l^2_{\Theta}$ та $\left\| q^{(i)} \right\|_{\Theta} \le R$ ($i = 1, 2$). Тоді $\left\| q^{(i)} \right\|_{l^\infty} \le R_1$ та (6) означає, що

$$\left| V'_{n,\,m}\left(q^{(1)}_{n,\,m}\right) - V'_{n,\,m}\left(q^{(2)}_{n,\,m}\right) \right| \le C \left| q^{(1)}_{n,\,m} - q^{(2)}_{n,\,m} \right|.$$

Аналогічно до попереднього одержуємо

$$\left\| B\left(q^{(1)}\right) - B\left(q^{(2)}\right) \right\|_{\Theta} = \left(\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2} \theta_{n,\,m} \left| V'_{n,\,m}\left(q^{(1)}_{n,\,m}\right) - V'_{n,\,m}\left(q^{(2)}_{n,\,m}\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C \left(\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2} \theta_{n,\,m} \left| q^{(1)}_{n,\,m} - q^{(2)}_{n,\,m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C \left\| q^{(1)} - q^{(2)} \right\|_{\Theta}.$$

Отже, оператор B є локально неперевним за Ліпшицем у просторі l^2_{Θ}.

Доведення у випадку умови (ii') аналогічне. Лему доведено. □

Основним результатом цієї статті є така теорема:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$. *Тоді, якщо* $q \in C^2\left((-T, T); l^2\right)$ *є розв'яком задачі (4), (6) з початковими даними* $q^{(0)} = \left\{ q^{(0)}_{n,\,m} \right\} \in l^2_{\Theta}$ *та* $q^{(1)} = \left\{ q^{(1)}_{n,\,m} \right\} \in l^2_{\Theta}$, *то* $q \in C^2\left((-T, T); l^2_{\Theta}\right)$.

Доведення.

Нехай $q \in C^2\left(\left(-T, T\right); l^2\right)$ – розв'язок задачі (4), (6) з початковими даними $q^{(0)} = \left\{q_{n,\,m}^{(0)}\right\} \in l_\Theta^2$ та $q^{(1)} = \left\{q_{n,\,m}^{(1)}\right\} \in l_\Theta^2$. Виберемо $\tau \in \left(0, T\right)$ і покладемо

$$R_\tau = \sup_{t \in [-t,\, t]} \left\| q\left(t\right) \right\|.$$

Нехай

$$\tilde{V}'_{n,\,m}\left(r\right) = V'_{n,\,m}\left(r\right) \text{ при } \left|r\right| \le R_\tau + 1$$

та

$$\tilde{V}'_{n,\,m}\left(r\right) = V'_{n,\,m}\left(R_\tau + 1\right) \text{ при } \left|r\right| > R_\tau + 1.$$

Тоді на $\left[-\tau, \tau\right]$ функція $q\left(t\right)$ очевидно є розв'язком системи

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,\,m} = a_{n-1,\,m} q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m} q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1} q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m} q_{n,\,m+1} + \\ + c_{n,\,m} q_{n,\,m} - \tilde{V}'_{n,\,m}(q_{n,\,m}),\ \left(n, m\right) \in \mathbb{Z}^2, \end{aligned} \tag{8}$$

з тими ж самими початковими даними.

Очевидно, що функції $\tilde{V}'_{n,\,m}$ задовольняють умову $\left(ii'\right)$, і, згідно леми 3, відповідний оператор $\tilde{B}$ є глобально неперевним за Ліпшицем у просторі l_Θ^2. За лемою, лінійний оператор A є обмеженим оператором у просторі l_Θ^2. Згідно класичних результатів (див. [6], Розділ 6, Теорема 1.2), задача (8), (6) має єдиний розв'язок

$$\tilde{q} \in C^2\left(\left(-T, T\right); l_\Theta^2\right) \subset C^2\left(\left(-T, T\right); l^2\right).$$

Згшідно єдиності розв'язку задачі Коші в просторі l^2 маємо, що $\tilde{q} = q$ на $\left[-\tau, \tau\right]$. Оскільки $\tau \in \left(0, T\right)$ довільна точка, то ми одержуємо, що $q \in C^2\left(\left(-T, T\right); l_\Theta^2\right)$. Теорему доведено. □

Література:

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D*. 1997. Vol. 103. P. 201–250.
2. Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Український математичний вісник*. 2019. Т.16, №4. С. 465-476. (Engl.: Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of

oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 246, No. 5 (May). P. 593-601.)

3. Bak S., N'Guerekata G., Pankov A. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations. *Communications in Mathematical Analysis*. 2010. Vol. 8, № 1. P. 79–86.
4. Bak S. N., Pankov A. A. On the dynamical equations of a system of linearly coupled nonlinear oscillators. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2006. Vol. 58, №6. P.815-822.
5. Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel-Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.
6. Daleckii Yu. L., Krein M. G. Stability of solutions of differential equations in Banach spaces, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1974.
7. Pankov A. Global well-posedness for discrete non-linear Schrödinger equation. *Applicable Analysis.*2010. Vol. 89, № 9. P. 1513–1521.
8. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. Вип. 5. С. 3–9.
9. Бак С. М. Про обмеженість глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. 2019. Вип. 20. С. 5-12.
10. Бак С. М., Баранова О. О., Білик Ю. П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 4. С. 18–24.
11. Бак С. Н., Панков А. А. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов. *Український математичний журнал*. 2006. Т. 58, №6. С.723-729.
12. Бак С. М., Рум'янцева К. Є. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. Вип. 6. С. 29-36.