

**ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО**

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ І ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ОСВІТИ

Кафедра алгебри і методики навчання математики

ДИПЛОМНА РОБОТА

на тему:

«Множини другої категорії Бера в просторі неперервних функцій»

Студентки магістратури, група 1 МАМ
Галузі знань 0402 Фізико-математичні науки
Напрямку підготовки 8.04020101 Математика*
Бурлачук Ірини Миколаївни

Науковий керівник:

доцент кафедри алгебри і методики навчання
математики, кандидат фізико-математичних наук
Панасенко О.Б.

Національна шкала _____

Кількість балів: _____ Оцінка: ECTS _____

Голова комісії _____
(підпис) (ініціали, прізвище)

Члени комісії

_____ (підпис) (ініціали, прізвище)

_____ (підпис) (ініціали, прізвище)

_____ (підпис) (ініціали, прізвище)

_____ (підпис) (ініціали, прізвище)

м. Вінниця – 2016 рік

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ З ТЕМАТИКИ ДОСЛІДЖЕННЯ	6
1.1. Множина неперервних на відрізку функцій як метричний та векторний простори	6
1.2. Поняття категорії Бера	14
1.3. Огляд літератури з тематики дослідження	21
РОЗДІЛ 2. МНОЖИНИ ДРУГОЇ КАТЕГОРІЇ БЕРА СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ФУНКЦІЙ В ПРОСТОРИ $C[a, b]$	23
2.1. Диференціальні властивості типових неперервних функцій	23
2.2. Про множини рівнів типових неперервних функцій	34
2.3. Функції, графіки яких не перехрещуються прямими	38
2.4. Множини другої категорії Бера в просторі монотонних функцій.	43
РОЗДІЛ 3. ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ ТИПОВИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ	46
3.1. Альтернативні означення фрактальної розмірності множини.	46
3.2. Розмірності типових неперервних функцій.	51
ВИСНОВКИ	66
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	67

ВСТУП

Актуальність теми. Розвиток функціонального аналізу в ХХ столітті визначив низку проблем, які розв'язували вчені впродовж десятиліть. Одна з них полягає у визначенні тих властивостей неперервних на відрізку функцій, якими володіє в певному розумінні більшість неперервних функцій.

Для пошуку відповіді на цю проблему потрібно визначити, що ж розуміти під терміном «більшість» у нескінченновимірному просторі. Один із таких підходів базується на понятті категорій Бера. Більш точно: говорять, що множина A повного метричного простору X є множиною *першої категорії Бера*, якщо A є об'єднанням не більше як зчисленої кількості ніде не щільних в X множин. Множина, яка не є множиною першої категорії Бера називається множиною *другої категорії Бера*, а доповнення до множини першої категорії називається *залишковою* множиною. Якраз для повних метричних просторів множини першої категорії є, з цієї топологічної точки зору, «малими», а залишкові множини – «великими».

Простір неперервних функцій з рівномірною метрикою є повним, а тому залишкові множини цього простору можна вважати «великими». Також поняття категорій породило таке поняття як типова властивість неперервних функцій: говорять, що властивість неперервної функції є *типовою*, якщо множина тих функцій, які цією властивістю не володіють, є множиною першої категорії Бера.

Пошуку типових властивостей неперервних функцій присвячено чимало робіт, огляд яких здійснено в п.1.3 дипломної роботи. Також розвиток фрактального аналізу поставив природні питання про типові фрактальні властивості неперервних функцій. В останні 5 років одержано нові цікаві результати з цього приводу.

Отже, дипломна робота присвячена пошуку і строгому обґрунтуванню типових властивостей неперервних функцій.

Мета дослідження дипломної роботи – описати різні класи функцій, які в просторі неперервних на відрізку функцій з рівномірною метрикою утворюють множини другої категорії Бера.

Завданнями дипломної роботи є:

- проаналізувати наукову літературу з тематики дипломної роботи;
- висвітити зміст понять категорія Бера, залишкова множина, типова властивість, фрактальна розмірність і описати основні властивості множин першої та другої категорій Бера;
- обґрунтувати, що множина неперервних і ніде не диференційовних функцій на відрізку $[a, b]$ має другу категорію Бера в просторі $C[a, b]$;
- дослідити, якими властивостями рівнів володіють типові неперервні функції;
- дослідити, якими фрактальними властивостями володіють графіки типових неперервних функцій (зокрема, якою фрактальною розмірністю).

Об'єктом дослідження в дипломній роботі є повний метричний простір неперервних на відрізку функцій з рівномірною метрикою, а **предметом** дослідження – пошук типових властивостей неперервних функцій та пошук множин другої категорії Бера в просторі неперервних на відрізку функцій.

Апробація результатів дипломної роботи. Результати дипломної роботи доповідались на звітній науковій конференції Інституту математики фізики і технологічної освіти «Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти» (2016 року).

Структура дипломної роботи. Дипломна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків і списку використаних джерел. Перший

розділ присвячений висвітленню змісту понять категорії, опису основних властивостей та розгляду множини неперервних функцій як метричного і векторного просторів. В цьому розділі здійснено також огляд літератури з тематики дипломної роботи. В другому розділі обґрунтовуються типові диференціальні властивості неперервних функцій та типові властивості рівнів неперервних функцій. У третьому розділі описуються типові фрактальні властивості неперервних на відрізку функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Balka R. Dimension and measures for generic continuous images / R. Balka, A. Farkas, J. Fraser, J. Hyde // *Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica*. – 2013. – Vol. 38, № 1. – P. 389–404.
2. Banach S. Uber die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen / S. Banach // *Studia Mathematica*. – 1931. – Vol. 3. – P. 174–179.
3. Bruckner A. M. Elementary real analysis. Second edition / A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, B. S. Thomson. – Prentice Hall, 2008. – 740 p. – Режим доступу: <http://classicalrealanalysis.info/com/documents/TBB-AllChapters-Landscape.pdf>
4. Bruckner A. M. Real analysis. Second edition / A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, B. S. Thomson. – Prentice Hall, 2008. – 660 p. – Режим доступу: <http://classicalrealanalysis.info/com/documents/BBT-AllChapters-Landscape.pdf>
5. Bruckner A. The level structure of a residual set of continuous functions // A. Bruckner, K. Garg // *Trans. Amer. Math. Soc.* – Vol. 232, 1977. – P. 307–321.
6. Cater F. S. On the level structure of bounded derivatives / F. S. Cater // *Real Analysis Exchange*. – Vol. 29(2), 2003/2004. – P. 657-662.
7. Cohn D. L. Measure theory. – Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.
8. Edgar G. Measure, topology and fractal geometry / G. Edgar. 2nd edition – N.-Y. : Springer, 2008. xv+268 p.
9. Engelking R. Dimension theory / R. Engelking. – North-Holland Publishing Company, 1978. – 314 p.
10. Falconer K. J. Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications. 2nd edition / K. J. Falconer. – Chichester : Wiley, 2003. – xxvii+337 p.

11. Fraser J. M. Dimension and measure for typical random fractals / J. M. Fraser. – Preprint, 2012.
12. Garg K. M. On a residual set of continuous functions / K. M. Garg // Czech. Math. Journal. – 1970. – Vol. 20, №4. – P. 537–543.
13. Garg K. M. On asymmetrical derivatives of non-differentiable functions / K. M. Garg // Can. Jour. Math. 20, 1968. – P. 135–143.
14. Humke P. D. The packing dimension of a typical continuous function is 2 / P. D. Humke, G. Petruska // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), Vol. 27, 1988–89. – P. 345–358.
15. Hyde J. T. On the box dimensions of graphs of typical functions / J. Hyde, V. Laschos, L. Olsen, I. Petrykiewicz, A. Shaw // J. Math. Anal. Appl. – Vol. 391, 2012. – P. 567–581.
16. Jarnik V. Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen / V. Jarnik // Fund. Math. – 1933. – Vol. 21. – P. 48–58.
17. Kato H. Higher-dimensional Bruckner–Garg type theorem / H. Kato // Topology Appl. 154, 2007, 1690–1702.
18. Kechris A. S.: Classical descriptive set theory / A. S. Kechris. – Springer-Verlag, 1995.
19. Mattila P. Geometry of sets and measures in Euclidean space / P. Mattila // Cambridge Stud. Adv. Math. 44, Cambridge Univ. Press, 1995.
20. Mattila P. Measure and dimension functions: measurability and densities / P. Mattila, R. D. Mauldin // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – Vol. 121, 1997. – P. 81–100.
21. Mauldin R. D. On the Hausdorff dimension of some graphs / R. D. Mauldin, S. C. Williams // Trans. Amer. Math. Soc. 298, 1986, 793–803. [MW]
22. Mazurkiewicz S. Sur les fonctions non dérivables / S. Mazurkiewicz // Studia Mathematica. – 1931. – Vol. 3, Issue 1. – P. 92–94.
23. Saks S. On the functions of Besicovitch in the space of continuous function / S. Saks // Fund. Math. – 1932. – Vol. 19. – P. 211–219.

24. Singh A. N. On the method of construction and some properties of a class of non-differentiable functions / A. N. Singh // Proc. Benares Math. Soc. – 1931. – Vol. 13. – P. 1–17.
25. Singh A. N. The Theory and Construction of Non-differentiable Function / A. N. Singh // Lucknow University Studies. – 1935, Vol. 1. – P. 1–110.
26. Барановський О. М. Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їхні застосування / О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін. – К. : Наукова думка, 2013. – 288 с.
27. Богачов В. И. Функциональный анализ: учебное пособие / В. И. Богачев. – М.: Изд-во ПСТГУ, 2011. – 396 с.
28. Вайнберг М. М. Функциональный анализ. Спец. курс. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / М. М. Вайнберг. – М.: Просвещение, 1979. – 128 с.
29. Гелбаум Б. Контр примеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. – М.: Мир, 1967. – 250 с.
30. Гуревич В. Теория размерности / В. Гуревич, Г. Волмэн – М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. – 232 с.
31. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
32. Ковтонюк М. М. Основи функціонального аналізу. Навчальний підручник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / М. М. Ковтонюк, А. А. Томусяк. – Вінниця: ПП "Едельвейс і К", 2011. – 574 с.
33. Куратовский К. Топология (в двух томах). Том 2 / К. Куратовский. — М. : Мир, 1966. — 623 с.
34. Окстоби Дж. Мера и категория / перевод с английского В. А. Скворцова. – М. : Мир, 1974. – 160 с.

35. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. – К. : НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. – 298 с.
36. Рудин У. Основы математического анализа / У. Рудин. – М. : Мир, 1976.— 320 с.
37. Турбин А.Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. – К. : Наукова думка, 1992. – 208 с.
38. Хирш М. Дифференциальная топология / М. Хирш. – М.: Мир, 1979. – 281 с.