Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

Бак Сергій Миколайович

УДК 517.97

РІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕННИХ ЛАНЦЮГІВ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ: ЗАДАЧА КОШІ, ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ, БІЖУЧІ ХВИЛІ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2007

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у Вінницькому державному педагогічному університеті імені М.М. Коцюбинського, Міністерство освіти і науки України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Панков Олександр Андрійович
Вінницький державний педагогічний університет імені
М.М. Коцюбинського, професор кафедри математики, м. Вінниця

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Каленюк Петро Іванович
Національний університет „Львівська політехніка”, директор інституту прикладної математики та фундаментальних наук, м. Львів

доктор фізико-математичних наук, професор
Слюсарчук Василь Юхимович
Національний університет водного господарства та природокористування, професор кафедри вищої математики, м. Рівне

Провідна установа:

Інститут математики НАН України, м. Київ

Захист відбудеться ”_____” ______________2007 року о ____годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 35.051.07 при Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5)

Автореферат розіслано ”____” __________2007 року

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Остудін Б.А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дослідження. Нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. Зокрема, останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною.

Однією з найбільш популярних моделей є нескінченний ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Серед таких систем найбільш відома модель Френкеля–Конторової, вивчена в роботах Я. Френкеля та Т. Конторової 1938 року. (Ця система з'являлась і раніше в роботах Л. Прандтля та У. Делінгера 1928 – 29 рр.) Ця та близькі моделі з фізичної точки зору детально вивчені О. Брауном, Ю. Ківшаром, Д. Хеннінгом, Г. Ціронісом та ін. Математична ж сторона питання досліджена досить слабко. Відмітимо, однак, що близький клас систем Фермі–Паста–Улама вивчено досить добре. В значній мірі досліджено дискретні нелінійні рівняння Шредінгера такими математиками як П. Кеврекідс, К. Расмуссен, А. Бішоп, О. Панков, М. Вейнштейн та ін.

Особливу роль в динаміці подібних систем грають періодичні розв'язки, які в фізиці називаються бризерами. Питання про існування бризерів тої чи іншої частоти є однією із актуальних проблем нелінійної фізики.

На даний час у цьому напрямку є окремі часткові результати, отримані методами теорії збурень для однорідних ланцюгів зі слабким зв'язком. Значних результатів досягли такі вчені як С. Обрі та Р. Маккей.

Іншим важливим класом розв'язків є біжучі хвилі. Такі розв'язки виникають в багатьох задачах. Біжучі хвилі для параболічних рівнянь в частинних похідних досить детально досліджено такими математиками як Дж. Смоллер, А. Вольперт та В. Вольперт. Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі–Паста–Улама можна знайти в роботах О. Панкова. В той же час для ланцюгів осциляторів відома лише одна робота Г. Йосса та К. Кіршгаснера, результати якої отримано методами теорії біфуркацій.

Таким чином, тема даної роботи – дослідження задачі Коші, періодичних по часу розв'язків та біжучих хвиль для ланцюгів лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів – представляється актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в рамках державної бюджетної теми „Варіаційні методи дослідження нелінійних рівнянь математичної фізики в необмежених областях" (номер державної реєстрації 0103U003236), що є складовою частиною досліджень, передбачених планами наукової роботи кафедри математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Мета і завдання дослідження.

1) Дослідження умов існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.
2) Дослідження умов існування періодичних за часом розв'язків для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів та методів їх побудови.
3) Дослідження умов існування біжучих хвиль в ланцюгах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

Об'єктом дослідження є нескінченна система диференціальних рівнянь, що описує динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

Предметом дослідження є умови існування та єдиності розв'язків задачі Коші, умови існування періодичних розв'язків та біжучих хвиль для системи осциляторів.

Методи дослідження. В даній роботі розвинуто варіаційний метод відшукання періодичних розв'язків таких систем, метод умовної мінімізації та метод періодичних апроксимацій.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати, сформульовані і доведені в дисертації, є новими та строго обґрунтованими. У дисертаційній роботі отримано такі результати:

1) Умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.
2) Умови існування періодичних за часом розв'язків для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів та досліджено методи їх побудови.
3) Умови існування біжучих хвиль в ланцюгах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

Зауважимо, що питання коректності задачі Коші взагалі не розглядалось для таких систем, лише для близького класу систем Фермі–Паста–Улама. Щодо періодичних розв'язків, то на даний час у цьому напрямку є окремі часткові результати, отримані методами теорії збурень для однорідних по простору ланцюгів зі слабким зв'язком. Також для ланцюгів нелінійних осциляторів відома лише одна робота, присвячена питанню існування тільки періодичних біжучих хвиль (Г. Йосса та К. Кіршгаснера). Результати цієї роботи отримано методами теорії біфуркацій для ланцюгів зі слабким зв'язком.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосовані в теорії звичайних диференціальних рівнянь та у нелінійній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації одержано автором самостійно. У працях [1] та [3] науковому керівнику Панкову О.А. належать формулювання задач та аналіз одержаних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включено до дисертації, доповідались та обговорювались на:

– VIII всеукраїнській науково-практичній конференції „Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість" (Київ, 2005 р.);
– Обласній звітній науково-практичній конференції викладачів та студентів (Вінниця, 2005 р.);
– міжнародній конференції „Математичний аналіз і суміжні питання" (Львів, 2005 р.);
– Обласній звітній науково-практичній конференції викладачів та студентів (Вінниця, 2006 р.);
– XI міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2006 р.);
– Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (Львів, 2006 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 8-и працях, з них 5 – у наукових журналах та збірниках наукових праць, 3 – у тезах та матеріалах конференцій. Серед публікацій 4 праці у наукових фахових виданнях з переліку ВАК України.

Структура дисертації. Робота складається зі вступу, трьох розділів (перший містить п'ять підрозділів, другий – шість підрозділів і третій – сім підрозділів), висновків та списку використаних джерел, що містить 72 найменування. Повний обсяг роботи – 142 сторінки, з яких 135 сторінок основного змісту та 7 сторінок використаних джерел.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми, формулюється мета роботи та основні задачі, вказано наукову новизну одержаних результатів.

В **першому розділі** розглянуто огляд літератури та основні результати дисертації.

В роботі вивчаються нескінченні системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\ddot{q}_n = -U'_n(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - a_n(q_n - q_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1 }$$

Рівняння такого вигляду описують нескінченний ланцюг нелінійних осциляторів, розміщених в точках цілочисельної решітки $\mathbb{Z}$. Змінна q_n є узагальненою координатою n-го осцилятора в момент часу t, а $U_n(r)$ – його потенціал. Таким чином, при відсутності взаємодії між осциляторами динаміка кожного із них задається рівнянням вигляду

$$\ddot{q}_n = -U'_n(q_n).$$

Якщо ж в системі осциляторів є лінійна взаємодія між будь-якими двома найближчими сусідами, то рівняння руху такої системи мають вид (2.1). Розглядаються такі розв'язки системи (2.1), що

$$\lim_{n\to\pm\infty} q_n(t) = 0, \tag{2.2}$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

В потенціалі U_n зручно виділити квадратичну частину та записати його у вигляді

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2} r^2 + V_n(r).$$

Покладемо також

$$b_n = c_n - a_n - a_{n-1}.$$

Тоді рівняння руху (2.1) набудуть вигляду

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n - V'_n(q_n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Систему рівнянь (2.1) або, що теж саме, (2.3) зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння в просторі l^2 дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, а саме, як рівняння вигляду

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{2.4}$$

де лінійний оператор A задається формулою

$$(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n,$$

а нелінійний оператор B –

$$B(q)_n = V_n'(q_n). \qquad (2.5)$$

Оператори виду $\left(Aq\right)_n$ – різницеві оператори другого порядку, для яких є повна теорія. Вибір простору l^2 в як основного пояснюється двома міркуваннями. По-перше, l^2 є гільбертовим простором, що дозволяє застосовувати багато абстрактних результатів. По-друге, елементи цього простору автоматично задовольняють співвідношенню (2.2). При застосуванні до розглядуваної задачі це співвідношення є звичайною крайовою умовою на нескінченності.

Скрізь далі під розв’язком рівняння (2.4) розуміється C^2-функція від t зі значеннями в l^2, що задовольняє це рівняння при всіх допустимих значеннях t. Іноді, які технічний засіб використовуються слабкі розв’язки.

Розділ 2 присвячений питанню коректності задачі Коші для рівняння (2.4). Скрізь в цьому розділі припускається, що виконуються умови

(i_1) *послідовності* $\{a_n\}$ *і* $\{c_n\}$ *дійсних чисел обмежені;*

(ii_1) $V_n(r)$ *– функція класу* C^1 *на* $\mathbb{R}$, $V_n(0) = V_n'(0) = 0$ *і для будь-якого* $R > 0$ *існує таке* $C = C(R) > 0$, *що для всіх* $n \in \mathbb{Z}$

$$\left|V_n'(r_1) - V_n'(r_2)\right| \le C\left|r_1 - r_2\right|, \quad |r_1|, \quad |r_2| \le R.$$

Задача Коші для рівняння (2.4) полягає у знаходженні розв’язку, що задовольняє початкові умови

$$q(0) = q^{(0)}, \quad \dot{q}(0) = q^{(1)}. \qquad (2.8)$$

Розв’язок може бути визначеним на деякому інтервалі навколо нуля (локальний розв’язок), або ж на всій осі (глобальний розв’язок).

Рівняння (2.4) можна записати як рівняння першого порядку в просторі $l^2 \times l^2$

$$\dot{y} = Gy, \qquad (2.7)$$

де $y = (q,\, p)$ і

$$Gy = \left(p,\, Aq - B(q)\right)$$

(стандартний прийом приведення рівняння другого порядку до системи першого порядку). Оператор G є неперервним за Ліпшицем в просторі $l^2 \times l^2$.

Як наслідок стандартного результату існування та єдиність локального розв’язку для будь-яких $q^{(0)},\ q^{(1)} \in l^2$ випливає із стандартних результатів про диференціальні рівняння в банаховому просторі. Тобто має місце теорема

Теорема 2.1.1. *Нехай виконуються умови* (i_1) *та* (i_2). *Тоді для будь-яких* $q^{(0)}, \ q^{(1)} \in l^2$ *рівняння (2.3) має єдиний розв'язок класу* C^2, *який визначений на деякому інтервалі* $(-t_0; t_0)$ *і задовольняє початкові умови (2.8).*

В **підрозділі 2.2** отримано умови існування глобальних розв'язків задачі Коші.

Оскільки рівняння (2.4) може бути записане у вигляді еквівалентного рівняння (2.7), то наступне твердження про існування та єдиність глобальних розв'язків випливає з відомих результатів.

Теорема 2.2.1. *Нехай виконуються умови* (i_1) *та* (i_2) *з константою* C, *що не залежить від* R. *Тоді для будь-яких* $q^{(0)}, \ q^{(1)} \in l^2$ задача *(2.4), (2.6) має єдиний розв'язок визначений при всіх* $t \in \mathbb{R}$.

Однак, така посилена умова (ii_1) не виконується у більшості цікавих прикладів.

Далі для отримання результатів про глобальні розв'язки використовується гамільтонова структура рівняння (2.4). Дійсно, рівняння (2.4) є гамільтоновою системою з гамільтоніаном

$$H(p, \ q) = \frac{1}{2}\left\{\|p\|^2 - \left(Aq, \ q\right)\right\} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(q_n),$$

де $p = \dot{q}$, а $\| \cdot \|$ і $(\cdot \, , \, \cdot)$ – норма і скалярний добуток в l^2, відповідно. Тому $H(\dot{q}, \ q)$ є константою на розв'язках рівняння (2.4).

Основним загальним результатом є наступна теорема

Теорема 2.2.2. *Додатково до умов* (i_1) *та* (ii_1) *припустимо, що оператор* A *недодатний, тобто* $\left(Aq, \ q\right) \le 0$ *для будь-якого* $q \in l^2$. *Крім того, нехай виконується одна із наступних умов:*

(a) $V_n(r) \ge 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$ *і* $r \in \mathbb{R}$;

(b) *існує така неспадна функція* $h(r), \ \ r \ge 0,$ *що* $\lim\limits_{r\to+\infty} h(r) = +\infty$ *і* $V_n(r) \ge h\left(|r|\right)$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$ і $r \in \mathbb{R}$.

Тоді задача Коші для рівняння (2.4) має єдиний глобальний розв'язок для будь-яких початкових даних $q^{(0)}, \ \ q^{(1)} \in l^2$.

Наступний наслідок дозволяє зняти умову недодатності оператора A.

Наслідок 2.2.2. *Нехай виконуються умови* $\left(i_1\right)$, $\left(ii_1\right)$ *та умова* (b) *теореми 2.2.2, де*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{h(r)}{r^2} = +\infty.$$

Тоді задача Коші для рівняння (2.4) має єдиний глобальний розв'язок для будь-яких початкових даних із l^2.

Далі в цьому розділі вивчається важливий випадок кубічного потенціалу, який не задовольняє умовам теореми 2.2.2, а саме

$$V_n(r) = \frac{d_n}{3} r^3,$$

де послідовність d_n обмежена.

В **підрозділі 2.3** отримано умови існування та єдиності глобальних розв'язків у випадку кубічного потенціалу.

Покладемо

$$\gamma = \inf \left\{ \sup_{\lambda \ge 0} J\left(\lambda q\right) : q \in l^2,\, q \ne 0 \right\} \tag{2.12}$$

та

$$W_\gamma = \left\{ q \in l^2 : 0 \le J\left(\lambda q\right) < \gamma,\, \forall\, \lambda \in \left[0, 1\right] \right\}. \tag{2.13}$$

Основним результатом підрозділу 2.3 є теорема:

Теорема 2.3.1. *Нехай* $V_n(r) = \frac{d_n}{3} r^3$, *де* d_n *– обмежена послідовність, оператор* A *від'ємно визначений і* $q^{(0)} \in W_\gamma$ *і* $q^{(1)} \in l^2$ *такі, що*

$$\frac{1}{2}\left\| q^{(1)} \right\|^2 + J\left(q^{(0)}\right) < \gamma.$$

Тоді задача Коші з початковими даними $q^{(0)}, q^{(1)}$ *має єдиний глобальний розв'язок.*

В теоремі 2.3.1 описується деяка достатньо велика множина початкових даних, для яких задача Коші (2.4), (2.8) з даним кубічним потенціалом має єдиний глобальний розв'язок. Тут припускається, що оператор A від'ємно визначений. Зокрема, це так для всіх початкових даних $q^{(0)}$, $q^{(1)}$ з достатньо малою l^2 - нормою (наслідок 2.3.1):

Наслідок 2.3.1. *Нехай* $V_n(r) = \frac{d_n}{3} r^3$, $V_n(r) = \frac{d_n}{3} r^3$, *де* d_n *– обмежена послідовність, оператор* A *від'ємно визначений. Тоді існує таке* $\delta > 0$, *що для будь-яких* $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ *з* $\left\| q^{(0)} \right\| \le \delta$ *і* $\left\| q^{(1)} \right\| \le \delta$ *задача Коші має єдиний глобальний розв'язок.*

В наступному **підрозділі 2.4** також розглядається випадок кубічного потенціалу та вивчається питання про існування глобальних розв'язків. Рівняння (2.1) в даному випадку приймає вигляд

$$\ddot{q} = Aq - d_n q_n^2, \; n \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

Оператор A припускається недодатним, тобто

$$\left(Aq, q\right) \le 0, \; q \in l^2.$$

Основний результат цього підрозділу – теорема 2.4.1 – стверджує, що для достатньо великої множини початкових даних глобальний розв'язок не існує:

Теорема 2.4.1. *Нехай* $V_n(r) = \dfrac{d_n}{3} r^3$, *де* d_n *– обмежена послідовність і оператор* A *недодатний. Нехай початкові дані* $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ *задовольняють умовам*

$$\left(q^{(0)}, q^{(1)}\right) > 0 \tag{2.15}$$

$$E(0) = H\left(q^{(0)}, q^{(1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|q^{(1)}\right\|^2 - \left(Aq^{(0)}, q^{(0)}\right)\right) + \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^3 \left(q_n^{(0)}\right) < 0. \tag{2.16}$$

Тоді розв'язок рівняння (2.14) з початковими даними $q^{(0)}$ *та* $q^{(1)}$ *має скінченний максимальний інтервал існування.*

Далі наводяться більш явні умови неіснування глобальних розв'язків. Щоб виключити тривіальний випадок, припускається, що $d_n \ne 0$ хоча б для одного $n \in \mathbb{Z}$. Відмітимо, що в тривіальному випадку, коли $d_n \equiv 0$, нелінійність відсутня і $E(0)$ не може бути від'ємним. В цьому випадку, як слідує із загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь в банаховому просторі, глобальні розв'язки існують для будь-яких початкових даних. Покладемо

$$N_{\pm} = \left\{ n \in \mathbb{Z} \,|\, \pm d_n > 0 \right\}.$$

Відмітимо, що в нетривіальному випадку хоча б одна множина N_+ або N_- не порожня.

Наслідок 2.4.1. *Нехай* $d_n \not\equiv 0$ *і* $q^{(0)} = \left\{q_n^{(0)}\right\} \in l^2, q^{(1)} = \left\{q_n^{(1)}\right\} \in l^2$ *такі, що* $q_n^{(0)} q_n^{(1)} \ge 0$ *для будь-якого* $n \in \mathbb{Z}$, $q_n^{(0)} q_n^{(1)} > 0$ *хоча б для одного* $N_+ \cup N_-$, *і* $\mp q_n^{(0)} \ge 0$ *для* $n \in N_{\pm}$. *Тоді існує таке* $\lambda_0 > 0$, *що для будь-якого* $\lambda \ge \lambda_0$ *розв'язок задачі Коші для рівняння (2.14) з початковими даними* $\lambda q^{(0)}$ *і* $q^{(1)}$ *має скінченний максимальний інтервал існування.*

Останній **підрозділ (2.5)** цього розділу присвячений прикладам. Зокрема, для кубічного дискретного рівняння Клейна–Гордона

$$\ddot{q}_n = \Delta q_n - m^2 q_n + a q_n^3, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де

$$\Delta q_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

задача Коші має глобальний розв'язок для будь-яких початкових даних при $a<0$. Відмітимо, що Δ – одновимірний дискретний оператор Лапласа. Якщо ж $a>0$, то питання про існування глобальних розв'язків залишається відкритим і, можливо, має негативну відповідь.

Для квадратного дискретного рівняння Клейна–Гордона

$$\ddot{q}_n = \Delta q_n - m^2 q_n + a q_n^2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $m^2>0$, глобальний розв'язок задачі Коші існує для всіх початкових даних з достатньо малою l^2- нормою, незалежно від знаку a. Існування глобальних розв'язків при $m=0$ залишається відкритим.

Розділ 3 присвячений періодичним за часом розв'язкам рівняння (2.1) з крайовими умовами (2.2), точніше, рівняння (2.4) в l^2. В цьому розділі накладаються наступні умови:

(i_2) *коефіцієнти* a_n *і* c_n *є* N*-періодичними, тобто* $a_{n+N}=a_n$, $c_{n+N}=c_n$, *і* A *додатно визначений в* l^2, тобто існує таке $\alpha_0>0$, що

$$\left(Aq,\ q\right) \geq \alpha_0 \|q\|^2, \quad q \in l^2;$$

(ii_2) *для будь-якого* $n\in\mathbb{Z}$ *функція* $V_n(r)$ *неперервно диференційовна,* $V_n(0)=V_n'(0)=0$, $V_n'(r)=o(r)$ *при* $r\to 0$ *і виконується умова* N*-періодичності* $V_{n+N}=V_n$;

(iii_2) *існує таке* $\mu>2$, *що*

$$0<\mu V_n(r) \leq V_n'(r)\ \ r, \quad r\neq 0.$$

Для побудови періодичних розв'язків використовується варіаційний підхід, а саме, теорема про гірський перевал. При цьому рівняння (2.1) розглядається не тільки з граничними умовами (2.2), але й з періодичними по n умовами

$$q_{n+kN}=q_n, \tag{3.6}$$

де $k>0$ – фіксоване ціле число. Остання задача інтегрується як рівняння

$$\ddot{q} = A_k q - B_k(q) \tag{3.7}$$

в скінченновимірному гільбертовому просторі l_k^2, що складається із kN-періодичних послідовностей. Норма і скалярний добуток в цьому просторі позначаються $\|\cdot\|_{l_k^2}$ і $\left(\ \cdot,\ \cdot\right)_{l_k^2}$, відповідно. Оператори A_k і B_k задаються тими ж формулами (3.2) та (3.3), тільки застосовуються до kN-періодичних послідовностей.

В **підрозділі 3.1** подається варіаційна постановка цих задач. Точніше, з ними пов'язуються функціонали

$$\Phi(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2 + \frac{1}{2}\left(Aq,\ \ q\right) - \sum_{n\in Z} V_n(q_n(t)) \right\} dt,$$

$$\Phi_k(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \frac{1}{2}\|\dot{q}\|_{l_k^2}^2 + \frac{1}{2}\left(A_k q,\ \ q\right)_{l_k^2} - \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} V_n(q_n(t)) \right\} dt$$

відповідно. Ці функціонали визначені на деяких гільбертових просторах X_T і $X_{T,\,k}$ відповідно. Критичні точки цих функціоналів є T-періодичними розв'язками відповідних задач. В цьому підрозділі також наводяться деякі оцінки для критичних точок та критичних значень функціоналів Φ і Φ_k.

Підрозділ 3.2 містить деякі допоміжні відомості про стаціонарні розв'язки, тобто про розв'язки, що не залежать від часу.

В **підрозділі 3.3** доводиться існування T-періодичних розв'язків рівняння (2.1) з умовами просторової періодичності (3.6), тобто рівняння (3.7). Ця задача має незалежний інтерес, однак в наступному підрозділі результати про існування її розв'язків будуть використані для доведення існування T-періодичних розв'язків рівняння (2.1) з крайовими умовами (2.2) на нескінченності, тобто рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q). \tag{3.1}$$

Для побудови шуканих розв'язків, в силу леми 3.1.4, достатньо знайти нетривіальні критичні точки функціоналу Φ_k в просторі $X_{T,\,k}$. З цією метою використано теорему про гірський перевал.

Щодо теореми про гірський перевал, то важливою в ній є наступна умова (так звана умова Пале–Смейла):

Нехай $u^{(m)}$ – така послідовність елементів гільбертового простору H, що послідовність $\varphi\left(u^{(m)}\right)$ обмежена і $\varphi'\left(u^{(m)}\right) \to 0$. Тоді $u^{(m)}$ містить збіжну підпослідовність.

Теорема 3.3.1 (Про гірський перевал). *Нехай φ – C^1-функціонал на гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$, що задовольняє умові Пале–Смейла. Припустимо, що існує $e \in H$ і $r > 0$ такі, що $\|e\| > r$ і*

$$\beta = \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \ge \varphi(e).$$

Нехай

$$b = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{\tau\in[0,1]}\varphi\big(\gamma(\tau)\big),$$

де

$$\Gamma = \big\{\gamma \in C\big([0,\ 1];\ \ H\big):\ \gamma(0)=0,\ \ \varphi(\gamma(1))\le 0\big\}.$$

Тоді b *– критичне значення функціоналу* φ *і* $b\ge\beta$.

В підрозділі 3.3 встановлено наступний результат про існування T-періодичних розв'язків задачі (2.1), (3.6) або, що теж саме, рівняння (3.7):

Теорема 3.3.2. *Нехай виконуються умови* $(i_2)-(iii_2)$. *Тоді для будь-якого* $T>0$ *та будь-якого натурального* k *рівняння (3.7) має ненульовий* T*-періодичний розв'язок. Більше того, існує таке* $T_0>0$, *яке не залежить від* k, *що при* $T\ge T_0$ *побудований розв'язок не є сталим.*

Доведення цієї теореми полягає в перевірці умов теореми про гірський перевал для функціоналу Φ_k. Важливим фактом є те, що функціонал Φ_k задовольняє так звану умову Пале–Смейла.

Підрозділ 3.4 присвячений періодичним розв'язкам задачі (2.1), (2.2). Тут встановлено основний результат другого розділу:

Теорема 3.4.1. *Нехай виконуються умови* $(i_2)-(iii_2)$. *Тоді для будь-якого* $T>0$ *задача (2.1), (2.2) має ненульовий* T*-періодичний розв'язок. При цьому існує таке* $T_0>0$, *що при* $T\ge T_0$ *цей розв'язок не є сталим.*

При доведенні цієї теореми розв'язки шукаються як критичні точки функціоналу Φ. Цей функціонал не задовольняє умову Пале–Смейла, хоча і задовольняє всім іншим умовам теореми про гірський перевал. Тому остання теорема не може бути використана. Замість цього розв'язок в теоремі 2.2.2 знаходиться як границя в деякому смислі розв'язків з теореми 3.3.2 при $k\to\infty$. Цей метод, відомий як метод періодичних апроксимацій, успішно використовувався в багатьох інших задачах.

В **підрозділі 3.5** розглядається випадок потенціалу виду

$$V_n(r) = \frac{d_n}{p}|r|^p,$$

де $p>2$ і $d_n>0$ – N-періодична послідовність. Тут T-періодичні розв'язки задачі (2.1), (2.2) будуються за допомогою методу умовної мінімізації.

Введемо функціонали

$$\Psi(u)=\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\|\dot{u}\|^2+\left(Au,\ \ u\right)\right\}dt,$$

$$S(u)=\frac{1}{p}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\sum_{n\in Z}d_n\left|u_n(t)\right|^p\right)dt$$

на просторі X_T. Відмітимо, що

$$\Phi(u)=\Psi(u)-S(u).$$

Для $\theta>0$ розглянемо задачу мінімізації

$$I_\theta=\inf\left\{\Psi(v):\ \ v\in X_T,\ \ \ S(v)=\theta\right\}. \tag{3.43}$$

Доведено, що ця задача має розв'язок $u\in X_T$, тобто $\Psi(u)=I_\theta$ і $S(u)=\theta.$ Більше того, при достатньо великих $T>0$ цей розв'язок несталий.

В силу правила множників Лагранжа існує таке $\lambda\in\mathbb{R}$ (множник Лагранжа), що

$$\Psi'(u)=\lambda S'(u).$$

Більше того, для множника Лагранжа маємо формулу

$$\lambda=\frac{2I_\theta}{p\theta}.$$

Покладемо $q=\lambda^{\frac{1}{p-2}}u.$ Тоді рівняння $\Phi(u)=\Psi(u)-S(u),$ разом із визначенням функціоналів Ψ та S, показує, що q – критична точка функціоналу Φ і, отже, розв'язок задачі (2.1), (2.2).

В останньому **підрозділі 3.6** встановлені вище теореми застосовуються до рівняння

$$\ddot{q}=a\Delta q_n+cq_n-d\left|q_n\right|^{p-2}q_n.$$

Отримані результати уточнюють та узагальнюють відомі результати.

Розділ 4 присвячений питанню існування біжучих хвиль в однорідних за просторовою змінною $n\in\mathbb{Z}$ ланцюгах ($a_n\equiv a$). В даному випадку

$$U_n(r)=U(r)=-\frac{c_0}{2}r^2+V(r)$$

і рівняння (2.1) набуде вигляду

$$\ddot{q}_n=a\Delta_d q_n+c_0q_n-V'(q_n), \tag{4.1}$$

де

$$\left(\Delta_d q\right)_n=q_{n+1}+q_{n-1}-2q_n\,,$$

Δ_d – одновимірний дискретний оператор Лапласа.

Нагадаємо, що біжучою хвилею називається розв'язок виду

$$q_n(t) = u(n-ct), \tag{4.2}$$

де $u(s)$ – функція неперервного аргументу $s \in \mathbb{R}$. Функція $u(s)$ називається профілем хвилі. Константа $c \neq 0$ є швидкістю хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля рухається вправо, а якщо $c < 0$, то вліво. Інтерес представляють нетривіальні хвилі, тобто хвилі з профілем u тотожно не рівним нулю.

Підстановка розв'язку виду (4.2) в рівняння (2.1) дає рівняння виду

$$c^2 u''(s) = a(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)) + c_0 u(s) - V'(u(s)). \tag{4.3}$$

В даному розділі розглядаються біжучі хвилі двох типів: періодичні та відокремлені. Для періодичної хвилі профіль $u(s)$ є періодичною функцією від $s \in \mathbb{R}$. Надалі період позначається через $2k$, $k > 0$ – дійсне число. Профіль відокремленої хвилі перетворюється в нуль на нескінченності. Відмітимо, що для періодичного профілю $u(s)$ сам розв'язок $q_n(t)$, заданий формулою (4.2), є $2k/c$-періодичною функцією. Періодичність по n виникає тільки у випадку раціонального k.

У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі достатньо знайти розв'язок рівняння (4.3) з умовою періодичності

$$u(s+2k) = u(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Профіль відокремленої хвилі є розв'язком рівняння (4.3) з крайовою умовою на нескінченності

$$\lim_{s \to \pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{4.5}$$

В обох випадках розв'язок може бути знайдено варіаційним методом, використовуючи теорему про гірський перевал.

Скрізь далі припускається, що потенціал задовольняє умови (ii_2), (iii_2), які в нашому випадку приймають вигляд:

(h) *функція* $V(r)$ *неперервно диференційовна,* $V(0) = V'(0) = 0$ *і* $V'(r) = o(r)$, *при* $r \to 0$ *та існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu V(r) \leq V'(r) \ r, \quad r \neq 0.$$

Відзначимо, що в рівняння (4.3) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідки слідує, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівнянню (4.3), то існують дві біжучі хвилі з даним профілем і швидкостями $\pm c$. Одна з них рухається вправо, інша – вліво.

В **підрозділі 4.2**, в залежності від крайових умов (4.4) або (4.5), розглядаються функціонали J_k та J на просторах $E_k = \left\{ u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : \; u(s+2k) = u(s) \right\}$ та $E = H^1(\mathbb{R})$ відповідно, які визначаються формулами

$$J_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2} u'(s)^2 - \frac{a}{2}(u(s+1) - u(s))^2 + \frac{c_0}{2} u(s)^2 - V(u(s)) \right\} ds \tag{4.6}$$

і

$$J(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{c^2}{2} u'(s)^2 - \frac{a}{2}(u(s+1) - u(s))^2 + \frac{c_0}{2} u(s)^2 - V(u(s)) \right\} ds. \tag{4.7}$$

Норми в цих просторах задаються рівностями

$$\|u\|_k = \left(\|u\|^2_{L^2(-k,k)} + \|u'\|^2_{L^2(-k,k)} \right)^{1/2} = \left(\int\limits_{-k}^{k} \left(u(s)^2 + u'(s)^2 \right) ds \right)^{1/2},$$

$$\|u\| = \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right)^{1/2} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(u(s)^2 + u'(s)^2 \right) ds \right)^{1/2}$$

відповідно.

Тут показано, що критичні точки функціоналів J_k та J є C^2-розв’язками рівняння (4.3), що задовольняють умови (4.4) і (4.5) відповідно.

В **підрозділі 4.3** розглянуто допоміжні леми.

В **підрозділі 4.4** за допомогою теореми про гірський перевал встановлено існування нетривіальних біжучих хвиль з періодичним профілем. Для цього достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Зазначимо, що $u = 0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожньо рівна нулю.

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема

Теорема 4.4.1. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c_0 > 0$. *Тоді для будь-яких* $k \ge 1$ *і* $c^2 > \max\left\{0, \; a\right\}$ *рівняння (4.3) має розв’язок* u, *що задовольняє умові (4.4). Тим самим, існують дві біжучі хвилі з профілем* u *та швидкостями* $\pm c$. *Більше того, існують такі константи* $\varepsilon_0 > 0$ *і* $C > 0$, *які не залежать від* k, *що*

$$\varepsilon_0 \le \|u\|_k^2 \le C, \tag{4.21}$$

$$\varepsilon_0 \le J_k \le C. \tag{4.22}$$

В **підрозділі 4.5** доводиться існування відокремлених біжучих хвиль з тими ж припущеннями, з якими встановлено існування періодичних хвиль. Біжучі хвилі в даному випадку знаходяться як критичні точки функціоналу J. Функціонал J задовольняє частині умов теореми про гірський перевал. Однак, умова Пале–Смейла для цього функціоналу не виконується. Тому критичні точки в даному випадку будуються іншим способом – за допомогою переходу до границі в критичних точках функціоналу J_k при $k \to \infty$.

В цьому підрозділі встановлено такий результат

Теорема 4.5.1. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c_0 > 0$. *Тоді для будь-якого* $c^2 > \max\{0, \ \ a\}$ *рівняння (4.3) має розв'язок* $u \in E$, *(отже, він задовольняє умові (4.5)). Таким чином, існують дві відокремлені біжучі хвилі з профілем* u *та швидкостями* $\pm c$.

В **підрозділі 4.6** вивчається поведінка розв'язків задачі (4.3), (4.5) на нескінченності і при відповідних припущеннях доводиться експоненціальна оцінка для розв'язку. Рівняння (4.3) можна подати у вигляді

$$Lu = f(u), \tag{4.29}$$

де

$$Lu(t) = -c^2 u''(t) + a(u(t+1) + u(t-1) - 2u(t)) + c_0 u(t) \tag{4.30}$$

і $f(r) = V'(r)$. Відносно функції $f(r)$ зробимо наступне, більш слабше, ніж (h), припущення.

(h') $f(r)$ *неперервна на* $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$ *і* $f(r) \neq 0$ *при* $r \neq 0$.

Тут розглядаються розв'язки, що лежать в просторі $E = H^1(\mathbb{R})$.

Нехай $u \in E$ – такий розв'язок. Покладемо

$$g(t) = \frac{f(u(t))}{u(t)}$$

(якщо $u(t) = 0$, то $g(t) = 0$ за означенням). Із умови (h') слідує, що

$$\lim_{t \to \pm\infty} g(t) = 0.$$

Тоді рівняння (4.29) набуде вигляду

$$Lu(t) = g(t) \cdot u(t).$$

До останнього рівняння застосуємо перетворення Фур'є

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} u(t) dt.$$

Отримуємо

$$\sigma(\xi)\hat{u}(\xi) = \widehat{g \cdot u}(\xi),$$

де

$$\sigma(\xi)=c^2\xi^2-4a\sin^2\frac{\xi}{2}+c_0.$$

Відмітимо, що функція $\sigma(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}$, продовжується до цілої функції

$$\sigma(\varsigma)=c^2\varsigma^2-4a\sin^2\frac{\varsigma}{2}+c_0, \quad \varsigma\in C.$$

Тут показано, що якщо $c^2>\max\{a, \ 0\}$ і $c_0>0$, то існує таке $\beta_0>0$, що функція $\sigma(\varsigma)$ не має нулів в смужці $|\mathrm{Im}\varsigma|<\beta_0$. (Лема 4.6.1).

Наступне твердження є основним результатом даного підрозділу

Теорема 4.6.1. *Нехай виконується умова* (h'), $c^2>\max\{0, \ a\}$ *і* $c_0>0$. *Якщо* $u\in E$ *– розв'язок рівняння (4.3), то для будь-якого* $\beta\in(0, \ \beta_0)$, *де* β_0 *із леми 4.6.1, існує таке* $C_\beta>0$, *що*

$$|u(t)|\le C_\beta e^{-\beta|t|}. \tag{4.37}$$

Оскільки умова (h) сильніша, ніж умова (h'), то із теореми 4.6.1 випливає

Наслідок 4.6.1. *В умовах теореми 4.6.1 (з умовою* (h) *замість* (h')*) для розв'язку* u *виконується експоненціальна оцінка (4.37) для будь-якого* $\beta\in(0, \ \beta_0)$.

В останньому **підрозділі 4.7** встановлені вище теореми застосовуються до рівняння

$$\ddot{q}=a\Delta q_n+cq_n-d|q_n|^{p-2}q_n.$$

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена побудові класів існування та єдиності розв'язків гамільтонових систем, що описують нескінченні ланцюги лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

У дисертації отримано такі результати:

1) умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів;

2) умови існування періодичних за часом розв'язків для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів та досліджено методи їх побудови;

3) умови існування біжучих хвиль в ланцюгах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

Отримані в дисертації результати є поширенням вже відомих для подібних систем. Для обгрунтування результатів в даній роботі розвинуто варіаційний метод відшукання періодичних розв'язків таких систем, метод умовної мінімізації та метод періодичних апроксимацій.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосованими в теорії звичайних диференціальних рівнянь та в нелінійній фізиці.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Панкову Олександру Андрійовичу за допомогу та постійну увагу до роботи.

ПУБЛІКАЦІЇ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бак С.Н., Панков А.А. О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов //Доповіді НАН України. – 2004. –№9. – С.13-16.
2. Бак С.Н. Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов //Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – №3. – Т.11. – С. 263-273.
3. Бак С.Н., Панков А.А. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов //Український математичний журнал. – 2006. – №6. – Т. 58. – С.723-729.
4. Бак С.М. Задача Коші для ланцюга нелінійних осциляторів //Актуальні проблеми виробничих та інформаційних технологій, економіки і фундаментальних наук: Збірник наукових праць. – Випуск 2. – Вінниця, 2005. – С. 59-61.
5. Бак С.М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів //VIII всеукраїнська науково-практична конференція "Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість". Матеріали конференції. – Київ, 2005. – С.92-95.
6. Бак С.М. Про глобальні розв’язки для нескінченної системи нелінійних осциляторів //Міжнародна конференція „Математичний аналіз і суміжні питання”. Тези доповідей. – Львів, 2005 . – С. 5.

7. Бак С.М. Про періодичні розв'язки нескінченної системи нелінійних осциляторів //Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. – Київ, 2006. – С. 311.
8. Бак С.М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів //Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140-153.

АНОТАЦІЯ

Бак С.М. Рівняння нескінченних ланцюгів нелінійних осциляторів: задача Коші, періодичні розв'язки, біжучі хвилі. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, 2007.

Робота присвячена дослідженню нескінченних систем диференціальних рівнянь, які описують нескінченні ланцюги лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Такі системи представляють собою нескінченновимірні гамільтонові системи в гільбертовому просторі l^2.

Перш за все в роботі отримано результати про існування та єдиність глобальних розв'язків задачі Коші, а також результати про неіснування глобальних розв'язків.

Далі вивчаються періодичні за часом розв'язки. Такі розв'язки описуються нелінійними різницевими рівняннями, які мають варіаційну структуру. За допомогою теореми про гірський перевал встановлено достатні умови існування періодичних розв'язків. У випадку степеневих потенціалів показано, що такі розв'язки можуть бути отримані за допомогою методу умовної мінімізації.

У випадку просторово однорідних ланцюгів встановлено існування розв'язків, що мають вигляд біжучих хвиль. Показано, що профіль таких хвиль експоненціально спадає на нескінченності.

Ключові слова: нескінченні системи диференціальних рівнянь, гамільтонові системи, нелінійні осцилятори, періодичні розв'язки, теорема про гірський перевал, критичні точки, біжучі хвилі.

АННОТАЦИЯ

Бак С. Н. Уравнения бесконечных цепочек нелинейных осцилляторов: задача Коши, периодические решения, бегущие волны. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Винницкий государственный педагогический университет имени Михаила Коцюбинского, Винница, 2007.

Работа посвящена исследованию бесконечных систем дифференциальных уравнений, которые описывают бесконечные цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов. Такие системы представляют собой бесконечномерные гамильтоновы системы в гильбертовом пространстве l^2.

Прежде всего в работе получены результаты о существовании и единственности глобальных решений задачи Коши, а также результаты о несуществовании глобальных решений.

Далее изучаются периодические по времени решения. Такие решения описываются нелинейными разностными уравнениями, которые имеют вариационную структуру. С помощью теоремы о горном перевале установлены достаточные условия существования периодических решений. В случае степенных потенциалов показано, что такие решения могут быть получены с помощью метода условной минимизации.

В случае пространственно однородных цепочек установлено существование решений, имеющих вид бегущих волн. Показано, что профиль таких волн экспоненциально убывает на бесконечности.

Ключевые слова: бесконечные системы дифференциальных уравнений, гамильтоновы системы, нелинейные осцилляторы, периодические решения, теорема о горном перевале, критические точки, бегущие волны.

ABSTRACT

Bak S.M. Equations of infinite chains of nonlinear oscillators: Cauchy problem, periodical solutions, traveling waves. – Manuscript.

Thesis for the Candidate of science degree in the field 01.01.02 – differential equations. – Vinnitsya State Pedagogical Mikhailo Kotcubinskiy University, Vinnitsya, 2007.

The thesis deals with infinite systems of differential equation that describe infinite chains of linearly coupled nonlinear oscillators. Such systems are infinite dimensional Hamiltonian systems in the Hilbert space l^2.

First of all, it is obtained results on existence and uniqueness of global solutions to the Cauchy problem, as well as nonexistence results for such solutions.

Next, it is considered time periodic solutions that are described by certain difference equations having variational structure. By means of the mountain pass theorem, it is obtained sufficient conditions for the existence of such solutions. In the case of pure power potential it is shown that periodic solutions can be found by means of a constrained minimization approach.

In the case of spatially homogeneous chains it is shown the existence of travelling wave solutions whose profile function decays exponentially at infinity.

Key words: infinite systems of differential equations, Hamiltonian systems, nonlinear oscillators, periodic solutions, mountain pass theorem, critical points, travelling waves.