

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

КАТЕРИНЮК ГАЛИНА ДМИТРІВНА

УДК 373.5.016:519.673(043.5)

ДИСЕРТАЦІЯ

**ФОРМУВАННЯ УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
В УЧНІВ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ**

014 – Середня освіта (Математика)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Г.Д. Катеринюк

Науковий керівник: Матяш Ольга Іванівна, доктор педагогічних наук,
професор університету

Вінниця – 2020

АНОТАЦІЯ

Катеринюк Г.Д. Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 014 – Середня освіта (Математика). – Вінницький державний педагогічний університет Михайла Коцюбинського, Міністерство освіти і науки України, Вінниця, 2020.

У дисертації подано теоретичний аналіз і нове практичне вирішення проблеми формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи.

Навчання учнів математичному моделюванню – складний психолого-педагогічний процес, який вимагає від учителя ґрунтовних комплексних знань з математики, психології, дидактики та методики навчання математики. Переосмислення акцентів у навчанні математики, формування системи методів, прийомів і засобів, що є основою розуміння учнями змісту і методу математичного моделювання – одне із ключових завдань вдосконалення методичної діяльності сучасного вчителя математики. Математичне моделювання може виступати сучасним засобом підвищення якості освіти, а також сприяє встановленню міжпредметних зв'язків різного рівня. Здатність до математичного моделювання створює умови розвитку в учнів готовності та вмінь ефективно застосовувати знання в реальному житті.

Результати педагогічних досліджень на світовому рівні, а також висновки дослідників якості української математичної освіти дозволили стверджувати, що більшість учнів загальноосвітніх закладів практично не володіє методами моделювання, а тим більше – дослідженням математичних моделей, мають нечіткі уявлення про те, що таке математичне моделювання. Аналіз наявної методичної літератури, дисертаційних досліджень показав,

що хоча питанням навчання математичному моделюванню в школі займалась значна кількість дослідників, питання ефективних умов формування здатності до математичного моделювання в учнів профільної школи досліджено недостатньо. Систематизація та узагальнення результатів психолого-педагогічних досліджень, в яких розглядалися різні аспекти навчання учнів математичному моделюванню, а також власний досвід науково-пошукової діяльності та навчання учнів математики в профільній школі, уможливили виявлення та розкриття низки **суперечностей**, що виникають між:

- між сучасними вимогами суспільства до рівня володіння математичним моделюванням у випускників школи та реальним станом готовності й здатності учнів до математичного моделювання;
- між існуючими можливостями вивчення й аналізу закордонних надбань щодо формування умінь математичного моделювання в учнів та недостатнім використанням цих можливостей у реальному освітньому процесі;
- між об'єктивною потребою вчителів математики в якісному навчально-методичному забезпеченні процесу формування умінь математичного моделювання в учнів та недостатністю відповідного забезпечення, науково-обґрунтованих методичних рекомендацій щодо прийомів та засобів підвищення ефективності навчання учнів математичному моделюванню в профільній школі.

Розв'язання вказаних суперечностей ми шукали в контексті реалізації Концепції нової української школи та упровадження компетентнісного підходу в навчанні. Увагу акцентовано на методиці формування здатності учнів до математичного моделювання в нових умовах, у новому контексті, з новими завданнями та новими засобами їх вирішення.

Об'єкт дослідження – процес формування математичної компетентності учнів профільної школи.

Предмет дослідження – технологія формування умінь математичного моделювання в учнів.

Мета дослідження полягала в розробці й обґрунтуванні технології формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи та експериментальній перевірці ключових факторів її ефективності.

У відповідності до поставленої мети та завдань дисертаційного дослідження отримані наступні **основні результати**:

- *виокремлено* основні проблеми вчителів математики, які пов'язані з формуванням в учнів умінь математичного моделювання;
- *з'ясовано* ступінь розроблення різних аспектів досліджуваної проблеми у педагогічній вітчизняній та зарубіжній літературі;
- *визначено* актуальні методичні аспекти процесу формування в учнів умінь математичного моделювання та ключові фактори його ефективності;
- *обґрунтовано* місце і роль прикладних задач як основного засобу формування в учнів умінь математичного моделювання;
- *з'ясовано* показники сформованості в учнів умінь математичного моделювання;
- *апробовано* організаційно-методичний інструментарій формування в учнів умінь математичного моделювання, зокрема, авторські задачі, які створені для забезпечення ефективних умов формування умінь математичного моделювання в учнів;
- *запропоновано* технологію формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи та перевірено її ефективність.

Під поняттям «уміння учня» у нашому дослідженні ми розуміємо здатність учня успішно та свідомо виконувати певну діяльність, засновану на доцільному використанні ним набутих знань та досвіду їх застосування. Важливими компонентами вміння моделювати вважаємо попередній аналіз та переклад (інтерпретація, тлумачення) змісту, узагальнення. Нестача часу, складність оцінювання ефективності навчання моделюванню та

недостатність методичних матеріалів (особливо для учнів старших класів) – основні проблеми у процесі формування та розвитку в учнів профільної школи умінь математичного моделювання. Наш аналіз закордонних публікацій дозволяє стверджувати, що проблема формування та розвитку умінь математичного моделювання – одна із найбільш всесвітньо визнаних проблем у дослідженнях математичної освіти. Здатність до математичного моделювання ми розглядаємо як безпосередню ознаку практичної компетентності учнів, яка формується паралельно з формуванням та розвитком умінь використовувати математичне моделювання в навчальній діяльності та на практиці.

На основі аналізу навчання математичному моделюванню в Німеччині, нами виокремлено актуальні для України проблеми та завдання формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання:

- ✓ моделювання є важким для учнів;
- ✓ діяльність з моделювання в навчанні математики може бути значно змінена завдяки розвитку цифрових технологій;
- ✓ діяльність та роль вчителів математики для успішного впровадження математичного моделювання на уроках математики є важливою;
- ✓ у центрі уваги мають бути дослідження дизайну окремих уроків моделювання, а також усього навчального середовища моделювання;
- ✓ важливим фактором, який впливає на ефективність навчання математичному моделюванню, є розуміння текстів, а також розуміння інформації з таблиць та графіків; компетентність з математичного читання є необхідною умовою успішної роботи над задачами із моделюванням;
- ✓ важливо дбати про паралельний розвиток математичних компетентностей та відповідних переконань та поглядів учнів;
- ✓ одним із важливих аспектів у навчанні моделюванню є зв'язок між компетентністю моделювання, з одного боку, та різними видами інших компетентностей учня, з іншого боку;

- ✓ необхідні спеціальні курси з навчання математичному моделюванню для практикуючих учителів математики.

Основним засобом розвитку вмінь математичного моделювання в учнів профільної школи у дисертації вказується спеціальна система задач сконструйована вчителем математики. Нами виокремлено п'ять вимог до систем задач на урок математики та тематичних систем задач, а саме вимоги: цілісності, інтегративності, адитивності, методичної доцільності та методичної відповідності. Широке і системне застосування методу математичного моделювання протягом вивчення всього курсу математики має стати потужним засобом формування в учнів навичок повсякденного користування математикою. В змісті задач використовуваних для навчання моделюванню має бути відображений особистий досвід учнів, враховані їхні інтереси, сучасність, цікавість, актуальність. Необхідною та можливою є превентивна діяльність вчителя математики старшої профільної школи з виявлення помилок учнів при розв'язуванні текстових задач, їх причин, а також ліквідації помилок, які мали місце при розв'язуванні задач на рух, на сумісну роботу, на відсотки при вивченні в основній школі систем рівнянь та дробово-раціональних рівнянь. Ефективними методами організації діяльності учнів старшої школи в навчанні математичному моделюванню є проектний метод та навчальне портфоліо.

Важливим складником технології формування умінь математичного моделювання в учнів став розроблений й експериментально апробований нами навчально-методичний посібник «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання». У посібнику подано та обґрунтовано теоретичні аспекти формування здатності учнів до математичного моделювання, запропоновано систему прикладних задач для формування умінь математичного моделювання (задачі на знаходження найменших або найбільших значень величини; задачі геометричного змісту; задачі фізичного змісту; задачі стохастичного змісту; задачі виробничого змісту; задачі сучасного професійного змісту; задачі побутового змісту),

пояснено методичні аспекти розв'язування задач на основі математичного моделювання. Також дані методичні рекомендації щодо організації самостійної пізнавальної діяльності учнів з метою формування в них умінь математичного моделювання, проектної діяльності учнів, діагностичного інструментарію сформованості умінь математичного моделювання в учнів. Акцентуємо увагу вчителів, що в старшій школі, відповідно до визначених в програмах з математики результатів навчання, вчителі математики мають забезпечити ефективні умови розвитку в учнів умінь математичного моделювання.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що:

- *визначено* цілі та зміст навчання математичному моделюванню в профільній школі, відібрано відповідні прийоми і засоби навчання, які в сукупності презентують нову методику формування здатності учнів до математичного моделювання, яка відповідає сучасним освітнім пріоритетам;
- *обґрунтовано* місце і роль математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів;
- *з'ясовано* психолого-педагогічні передумови формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи;
- *виокремлено*, на основі аналізу вітчизняного та закордонного досвіду, основні напрямки вдосконалення методичної системи формування в учнів умінь математичного моделювання;
- *пояснено* актуальні методичні аспекти процесу формування в учнів умінь математичного моделювання та ключові фактори його ефективності;
- *акцентовано* увагу на організації *превентивної діяльності вчителя та учнів у процесі* формування в учнів умінь математичного моделювання;
- *спроектовано й експериментально перевірено* технологію формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи.

Удосконалено методичний інструментарій формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи.

Подальшого розвитку набули методичні ідеї щодо формування математичної компетентності учнів профільної школи у процесі навчання математичному моделюванню; ідеї щодо підготовки майбутніх учителів математики до формування в учнів умінь математичного моделювання.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що:

- створено навчально-методичне забезпечення формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи з реалізацією принципу наступності у навчанні математики, зокрема, навчальний посібник для вчителів математики, майбутніх учителів математики, викладачів педагогічних університетів та науковців, які досліджують проблеми шкільної математичної освіти та проблеми формування математичних компетентностей учнів, у якому подано та обґрунтовано методичний інструментарій формування в учнів умінь математичного моделювання у процесі навчання математики, систематизовано актуальний матеріал для практичного використання на уроках математики в школі, запропоновані авторські задачі;

- розроблені конкретні методичні рекомендації для вчителів математики щодо ефективних методів, прийомів та засобів формування здатності учнів до математичного моделювання в умовах профільної освіти.

Результати дослідження впроваджено в освітній процес у наступних навчальних закладах: Обласний науковий ліцей-інтернат Комунального закладу вищої освіти «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж»; Фаховий коледж економіки, права та інформаційних технологій Тернопільського національного економічного університету; Тиврівський ліцей-інтернат поглибленої підготовки в галузі науки та загальноосвітні школи: фізико-математична гімназія №17 міста Вінниці; загальноосвітня школа I-III ступенів м. Козятина; загальноосвітня школа I-III ступенів №1 м. Калинівка Вінницької області; Зеленодольська ЗШ I-III ступенів №1 Апостолівського району, Дніпропетровської області.

Ключові слова: математична компетентність, математичне моделювання, формування умінь математичного моделювання, профільна школа, прикладні задачі, система задач, методика розв'язування задач, превентивна діяльність вчителя.

SUMMARY

***H. Kateryniuk* Formation of mathematical modeling skills in students of specialized schools. – Research paper as a manuscript.**

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 014 – Secondary education (Mathematics). – Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Vinnytsia, 2020.

The thesis describes a theoretical analysis and a new practical solution to the problem of developing mathematical modeling skills in students of specialized schools.

Teaching mathematical modeling to students is a complex psychological and pedagogical process that requires a teacher to have deep comprehensive knowledge of mathematics, psychology, didactics, and methods of teaching mathematics. Rethinking the emphasis in teaching mathematics, forming a system of methods, techniques and tools that is the basis for students' understanding of the content and method of mathematical modeling is one of the key tasks of improving the methodological activity of a modern teacher of mathematics. Mathematical modeling can serve as a modern means of improving the quality of education, and also helps to establish interdisciplinary relationships at various levels. The ability to mathematical modeling creates conditions for development of students' readiness and ability to effectively apply knowledge in real life.

Results of the pedagogical research at an international level, as well as researchers' conclusions about the quality of the Ukrainian mathematical education allowed to claim that most students of general educational institutions practically

do not know about modeling methods, and especially about the study of mathematical models, have fuzzy ideas about what mathematical modeling is. Analysis of the available methodological literature and thesis research has shown that although a significant number of researchers were engaged in teaching mathematical modeling at school, the issue of effective conditions for developing the ability to mathematical modeling in students of specialized schools has not been sufficiently studied. Systematization and generalization of the results of psychological and pedagogical research, which considered various aspects of teaching students mathematical modeling, as well as their own experience in research and teaching mathematics to students in a specialized school, made it possible to identify and disclose a number of **contradictions** that arise between:

- modern requirements of society to the level of mathematical modeling proficiency of school graduates and the actual state of readiness and ability of students to mathematical modeling;
- existing opportunities for studying and analyzing foreign achievements in the formation of mathematical modeling skills in students and insufficient use of these opportunities in the real educational process;
- the objective need of mathematics teachers for high-quality educational and methodological support for the process of forming mathematical modeling skills in students and the lack of appropriate support, scientific-based methodological recommendations on techniques and means to improve the effectiveness of teaching students mathematical modeling in a specialized school.

We were looking for a solution to these contradictions in the context of implementing the Concept of a New Ukrainian School and introducing a competence-based approach to teaching. Attention is focused on the method of forming students' ability to mathematical modeling in new conditions, in a new context, with new tasks and new means of solving thereof.

Object of research is the process of formation of mathematical competence of students of specialized schools.

Subject of research is the technology of formation of mathematical modeling skills in students.

Purpose of research was to develop and justify the technology for developing mathematical modeling skills in students of specialized schools and to test experimentally the key factors of its effectiveness.

In accordance with the purpose and objectives of the thesis research, the following **main results were obtained**:

- main problems of mathematics teachers that are associated with the formation of students' mathematical modeling skills are *highlighted*;
- the degree of development of various aspects of the problem under study in the pedagogical domestic and foreign literature is *clarified*;
- current methodological aspects of the process of developing students' mathematical modeling skills and key factors of its effectiveness are *determined*;
- the place and role of applied problems as the main means of developing students' mathematical modeling skills are *substantiated*;
- indicators of developing students' mathematical modeling skills are *identified*;
- organizational and methodological tools for development of students' mathematical modeling skills are *tested*, in particular, the author's tasks created to provide effective conditions for development of students' mathematical modeling skills;
- technology of development of mathematical modeling skills in students of specialized schools is *proposed* and its effectiveness is verified.

In our research, the concept of "student skill" refers to the ability of a student to successfully and consciously perform certain activities based on the appropriate use of the acquired knowledge and experience of application thereof. We consider preliminary analysis and interpretation of content and generalizations to be important components of modeling skills. Lack of time, complexity of evaluating the effectiveness of modeling training, and the lack of methodological materials (especially for high school students) are the main problems in the process of

forming and developing mathematical modeling skills among students of a specialized school. Our analysis of foreign publications suggests that the problem of formation and development of mathematical modeling skills is one of the most internationally recognized problems in the research of mathematical education. We consider the ability to mathematical modeling as a direct sign of practical competence of students, which is formed in parallel with the formation and development of skills to use mathematical modeling in educational activities and in practice.

Based on the analysis of teaching mathematical modeling in Germany, we have identified problems and objectives of formation of mathematical modeling skills among students of a specialized school relevant in Ukraine:

- ✓ modeling is difficult for students;
- ✓ modeling activities in teaching mathematics can be significantly changed by development of digital technologies;
- ✓ activity and role of teachers of mathematics for the successful implementation of mathematical modeling in mathematics lessons is important;
- ✓ the focus should be on the study of design of individual modeling lessons, as well as on the entire modeling learning environment;
- ✓ an important factor that affects the effectiveness of teaching mathematical modeling is the understanding of texts, as well as the understanding of information from tables and graphs; competence in mathematical reading is a prerequisite for successful work on problems with modeling;
- ✓ it is important to take care of the parallel development of mathematical competencies and the corresponding beliefs and views of students;
- ✓ one of the important aspects in modeling training is the relationship between modeling competence, on the one part, and various types of other student competencies, on the other part;
- ✓ special courses are required to teach mathematical modeling for practicing teachers of mathematics.

In this thesis, the main means of developing mathematical modeling skills in students of specialized schools is a special system of problems designed by a teacher of mathematics. We have identified five requirements for systems of problems for the mathematics lesson and thematic systems of problems, namely the requirements of: integrity, additivity, methodological expediency and methodological compliance. A broad and systematic application of the method of mathematical modeling during the study of the entire course of mathematics should be a powerful tool for developing students' skills in everyday use of mathematics. The content of problems used for teaching modeling should reflect the personal experience of students, take into account their interests, modernity, interest, and relevance. It is necessary and possible for a mathematics teacher of a high specialized school to prevent students from making mistakes when solving text problems, to identify causes and eliminate errors that occurred when solving motion problems, collaboration problems, and percentage problems when studying systems of equations and fractional-rational equations in general school. Effective methods of organizing the activities of high school students in teaching mathematical modeling are the project method and the educational portfolio.

An important component of the technology for the formation of mathematical modeling skills among students was the training manual "Methodological tools for the formation of students' ability to mathematical modeling" developed and experimentally tested by us. The manual describes and justifies the theoretical aspects of the formation of students' ability to mathematical modeling, offers a system of applied problems for the formation of mathematical modeling skills (problems for finding the smallest or largest values; geometric problems; physical problems; stochastic problems; production problems; modern professional problems; household problems), describes methodological aspects of solving problems based on mathematical modeling. Methodological recommendations are also given for organizing independent cognitive activity of students in order to form their mathematical modeling skills, project activities of students, diagnostic tools for the formation of mathematical modeling skills in students. We draw the

attention of teachers to the fact that in accordance with the training outcomes defined in mathematics programs in high school, teachers of mathematics should efficiently ensure that students develop mathematical modeling skills.

The scientific novelty of the results is that:

- the goals and content of teaching mathematical modeling in a specialized school are *defined*, and appropriate teaching methods and tools are selected, which together present a new method for developing students' ability to mathematical modeling, which meets modern educational priorities;
- the place and role of mathematical modeling in the system of mathematical competence of students is *proved*;
- the psychological and pedagogical prerequisites for the formation of mathematical modeling skills in students of specialized schools are *identified*;
- based on the analysis of domestic and foreign experience, the main directions of improving the methodological system for developing students' mathematical modeling skills are *highlighted*;
- current methodological aspects of the process of developing students' mathematical modeling skills and key factors of its effectiveness are *clarified*;
- attention is *focused* on the organization of *preventive activities of teachers and students in the process* of developing students' mathematical modeling skills;
- technology for the formation of mathematical modeling skills in students of specialized schools is *designed and experimentally tested*.

Methodological tools for the formation of mathematical modeling skills in students of specialized schools are *improved*.

Methodological ideas for the formation of mathematical competence of students of specialized schools in the process of teaching mathematical modeling, ideas for preparing future teachers of mathematics to form students' mathematical modeling skills *have been further developed*.

The practical significance of the results is that:

- educational and methodological support for the formation of mathematical modeling skills among students of specialized schools with the implementation of

the principle of continuity in teaching mathematics has been created, in particular, a textbook for teachers of mathematics, future teachers of mathematics, teachers of pedagogical universities and scientists who study the problems of mathematical education in schools and the problems of forming mathematical competencies of students, which describes and justifies methodological tools for the formation of mathematical modeling skills in the process of teaching mathematics, systematizes relevant material for practical use in mathematics lessons in schools, offers author's tasks;

- specific methodological recommendations have been developed for teachers of mathematics regarding effective methods, techniques and means of forming students' ability to mathematical modeling in the settings of specialized education.

The study results have been implemented in the educational process in the following educational institutions: Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University; Regional Scientific Lyceum-Boarding School of the Communal Institution of Higher Education "Vinnytsia Humanitarian Pedagogical College"; Vocational College of Economics, Law and Information Technologies of Ternopil National Economic University; Tyvriv Secondary Boarding School for In-Depth Training of Science and secondary schools: Physics and Mathematics Gymnasium №17, Vinnytsia; General Education School of I-III stages in the town of Koziatyn; General Education School of I-III stage No. 1 in the town of Kalynivka, Vinnytska region; Zelenodolsk General Education School of I-III stages No. 1 in Apostolivskyi district, Dnipropetrovska region.

Keywords: mathematical competence, mathematical modeling, formation of mathematical modeling skills, specialized school, applied problems, system of problems, methods of problem solving, teacher's preventive activity.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України

1. Катеринюк Г.Д. Педагогічні умови формування та розвитку здатності до математичного моделювання. «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». К.: Гнозис, 2016. С. 239-246
2. Катеринюк Г.Д. Розвиток математичних компетентностей учнів у процесі формування здатності до математичного моделювання *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 47/редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016. С. 63-67
3. Катеринюк Г. Д. Аналіз програм з математики щодо місця і ролі математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 49 / редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2017. 186с. С.25-28
4. Катеринюк Г. Д. Психолого-педагогічні аспекти формування умінь математичного моделювання в учнів старої школи. *Фізико-математична освіта*. Суми, 2018. Випуск 1(15). С. 52-56
5. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Формування здатності учнів до математичного моделювання в умовах позакласної роботи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 52 / редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2018. 465 с. С.93-97

Статті в зарубіжних наукових періодичних виданнях

6. Михайленко Л. Ф., Катеринюк Г. Д. Развитие рефлексии учащихся в процессе формирования умений математического моделирования. *Evaluarea in sistemul educational: deziderate actuale*. Materialele conferinta stiintifica Internationala. 9-10 noiembrie 2017, Chisinau. P.215-218
7. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Методические особенности системы задач для развития умений математического моделирования в учащихся профильной школы. *Curriculumul școlar: provocări și oportunități de dezvoltare*. Materialele conferinței științifice Internaționale. 7-8 decembrie 2018, Chișinău P. 84-89
8. Катеринюк Г. Д. Место и значение методики решения задачи для формирования умений математического моделирования при обучении учащихся. *Science and Education a New Dimension*. Pedagogy and Psychology, VIII (90), Issue: 222, 2020 Feb. P. 15-19

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

9. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2019. 270 с.
10. Катеринюк Г. Д. Використання персонального web-сайту вчителя для формування умінь математичного моделювання. Збірник тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції з міжнародною участю «Сучасні інформаційні технології та інновації методики навчання: досвід, тенденції, перспективи», 9-10 листопада, 2017 р. Тернопіль: ФОП Осадца Ю. В. 2017. №1. С.91-94
11. Катеринюк Г. Д. Здатність до математичного моделювання як ознака математичної компетентності учнів. *Моделювання у навчальному процесі: матеріали Всеукр. наук.-практ. Інтернет-конф. (03-04 березня 2017 р.)* / укладач Н.А. Головіна Луцьк: Вежа-Друк, 2017. С. 70-73

12. Катеринюк Г. Д. Місце і роль математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи». Одеса, 15-16 вересня 2016. С. 82-84
13. Катеринюк Г. Д. Необхідність вдосконалення умінь математичного моделювання. Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя», 15-16 травня, 2017 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. Краматорськ : ДДМА, 2017. С. 232-234
14. Катеринюк Г. Д. Критерії та показники сформованості здатності до математичного моделювання в учнів профільної школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. наук. праць з матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., 30 травня – 1 червня 2018 р. Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. 334 с. С. 263-264
15. Катеринюк Г. Д. Методичні аспекти формування умінь математичного моделювання в учнів гуманітаріїв. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами II Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 18 жовтня 2018 р. Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2018. 221с. С. 89-92
16. Катеринюк Г. Д. Порівняльний аналіз шкільних навчальних програм щодо завдання формування в учнів умінь математичного моделювання. *Сучасна освіта в контексті нової української школи*: зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11-12 жовтня 2018 р. М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області [та ін.]. Чернівці, 2018. 276 с. С. 48-52

**Наукові праці, які додатково відображають наукові результати
дисертації**

17. Катеринюк Г. Д. Актуальні проблеми формування математичних компетентностей учнів. Матеріали IV Всеукраїнської конференції молодих учених і студентів «Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень». Вінниця, 21-22 листопада 2016. С. 229-231
18. Катеринюк Г. Д. Реалізація прикладної спрямованості навчання математики в спортивно-гуманітарному ліцеї. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики», 11-13 травня 2017 р., Київ: М. П. Драгоманова, 2017. С. 51-52
19. Катеринюк Г. Д. Система задач з математики прикладної спрямованості для учнів спортивно-гуманітарного профілю. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами I Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця, 2017. С. 150-153
20. Катеринюк Г. Д. Теоретичні аспекти формування умінь учнів у процесі навчання математики. *Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень*: зб. наук. пр. Вип. 7 (10) / редкол.: Р.С. Гуревич (голова) [та ін.] Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2017. С.243-245

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	23
ВСТУП.....	24
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В УЧНІВ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ.....	35
1.1. Розкриття сутності ключових понять дослідження	35
1.2. Місце і роль математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів	52
1.2.1. Наскрізний аналіз сучасних навчальних програм з математики щодо місця і ролі математичного моделювання	52
1.2.2. Аналіз досліджень щодо місця і ролі математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів	60
1.3. Психолого-педагогічні передумови формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи	66
1.3.1. Огляд сучасних досліджень психологів щодо специфіки навчання старшокласників.....	66
1.3.2. Аналіз досліджень українських науковців щодо формування умінь математичного моделювання в учнів.....	73
Висновки до розділу 1	81
Список використаних джерел у розділі 1	83

РОЗДІЛ 2. ТЕХНОЛОГІЯ ФОРМУВАННЯ УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В УЧНІВ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ.....98

2.1. Актуальні методичні аспекти процесу формування в учнів умінь математичного моделювання	98
2.1.1. Огляд сучасних закордонних публікацій щодо проблеми формування та розвитку умінь математичного моделювання в учнів.....	98
2.1.2. Аналіз шляхів розв’язування проблеми навчання математичному моделюванню у Німеччині	103
2.1.3. Проектування актуальних завдань та етапів формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання.....	118
2.2. Прикладна задача як основний засіб формування в учнів умінь математичного моделювання	127
2.2.1. Характеристика функцій прикладних задач у навчанні математики учнів профільної школи.....	127
2.2.2. Методичні аспекти побудови та використання систем задач для формування в учнів умінь математичного моделювання	133
2.2.3. Методика розв’язування прикладних задач у навчанні учнів математичному моделюванню	142
2.2.4. Місце і роль дослідницької та проектної діяльності учнів у процесі формування умінь математичного моделювання.....	156
2.3. Організація превентивної діяльності у процесі формування в учнів умінь математичного моделювання	177
2.3.1. Сутність превентивної діяльності у процесі формування умінь математичного моделювання	177
2.3.2. Прийоми та засоби превентивної діяльності вчителя та учнів на уроках математики в процесі формування в учнів умінь математичного моделювання	183

Висновки до розділу 2	202
Список використаних джерел у розділі 2	204
РОЗДІЛ 3. ОРГАНІЗАЦІЯ, МЕТОДИКА ТА РЕЗУЛЬТАТИ	
ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ	218
3.1. Організація й перебіг дослідно-експериментальної роботи	218
3.2. Обробка й аналіз результатів педагогічного експерименту	224
3.3. Статистичний аналіз ефективності запропонованого методичного інструментарію формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання	241
Список використаних джерел у розділі 3	249
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ	254
ДОДАТКИ	261

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології.

ЗНО – зовнішнє незалежне оцінювання.

ЗНЗ – загальноосвітній навчальний заклад

ЗВО – заклад вищої освіти.

ЕГ – експериментальна група.

КГ – контрольна група.

PISA – міжнародне дослідження якості освіти.

TIMSS – міжнародне порівняльне дослідження якості природничо-математичної освіти учнів 4-х та 8-х класів.

ЮНЕСКО (англ. *United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, UNESCO*) – Організація Об'єднаних Націй з питань освіти, науки і культури.

ВСТУП

Актуальність дослідження. Нині немає такої галузі знань, де б не застосовувалися досягнення математики. Математичний апарат використовується в усіх сферах життя, не лише в науках: фізиці, хімії, географії, біології, астрономії, економіці, історії, лінгвістиці, а й в медицині, спорті, архітектурі, музиці, корабле та авіабудуванні, геоекології, мистецтві та різних життєвих ситуаціях. Задачі з різних галузей знань містять поняття та відношення, які в перекладі на математичну мову, тобто мову виразів, формул, рівнянь, нерівностей та їх систем, функцій, графіків, тощо, набувають вигляду математичної моделі. Математичне моделювання застосовують усі природничі та суспільні науки, використовуючи математичний апарат для одержання спрощеного опису реальності за допомогою математичних понять.

Поняття «математичне моделювання» українські дослідники використовують для розкриття змісту поняття «математична компетентність». Найчастіше при цьому посилаються на означення С. А. Ракова: Математична компетентність – це вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень. У цьому визначенні ключовими є поняття: математичне моделювання та математична модель.

Математичне моделювання пронизує весь шкільний курс математики, однак сам термін «математичне моделювання» ще донедавна з'являвся в школі лише в 9 класі при вивченні теми «Елементи прикладної математики». Зараз ситуація змінюється і в навчальній програмі з математики для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів (за новим Державним стандартом) термін «математична модель» зустрічається значно частіше. В програму курсу алгебра 5-9 класів включено ряд тем, в яких присутне

поняття «математичне моделювання». Складання математичної моделі при розв'язуванні текстової задачі, «переклад завдання» на мову математики, поволі готує учнів до моделювання реальних процесів і явищ у їх майбутній професійній та побутовій діяльності. Навчання учнів математичному моделюванню – складний психолого-педагогічний процес, який вимагає від учителя ґрунтовних комплексних знань з математики, психології, дидактики та методики навчання математики. Переосмислення акцентів у навчанні математики, формування системи методів, прийомів і засобів, що є основою розуміння учнями змісту і методу математичного моделювання – одне із ключових завдань вдосконалення методичної діяльності сучасного вчителя математики. Здатність до математичного моделювання створює умови розвитку в учнів готовності та вмінь ефективно застосовувати знання в реальному житті. Математичне моделювання може виступати сучасним засобом підвищення якості освіти, а також сприяє встановленню міжпредметних зв'язків різного рівня.

Результати педагогічних досліджень на світовому рівні, а також висновки дослідників якості української математичної освіти показують, що більшість учнів загальноосвітніх закладів практично не володіє методами моделювання, а тим більше – дослідженням математичних моделей, мають нечіткі уявлення про те, що таке математичне моделювання.

Проблемам навчання математичному моделюванню присвячені праці багатьох українських науковців та методистів: В. Є. Бахрушина, Г. П. Бевза, В. С. Билков, О. В. Міцик, Л. Г. Петерсон, О. П. Пінчук, А. В. Прус, В. М. Самойленко, Т. Д. Сєдової, В. О. Швеця. Досліджували вказану проблему у дисертаційних роботах С. І. Великодний, В. В. Волошена, І. М. Главатських, О. М. Гнатківська, М. І. Голубенко, О. О. Гриб'юк, Л. В. Кавурко, Л. Л. Кирилюк, О. П. Новосад, Е. М. Остапенко, Л. Л. Панченко, Н. Ю. Северин, М. О. Філімонова, С. Г. Цапова, А. О. Чінчой та багато інших.

Великодний С. І. у дослідженні «Методика навчання математичного моделювання учнів основної школи» відстоює думку про те, що математичне моделювання, через свою універсальність, об'єднуючи в собі практично всі прийоми діяльності, які забезпечують готовність учнів використовувати математичні знання, повинно розглядатись як один з найважливіших прийомів діяльності при навчанні школярів математики і заслуговує бути представленим як самостійна змістовна лінія. Філімонова М. О. у своїй дисертації «Формування умінь математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання геометрії» обґрунтувала необхідність і можливість формування в учнів основної школи навичок та вмінь математичного моделювання у процесі навчання геометрії. З іншого боку, закоординована тема Чінчой А. О. «Формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання в процесі навчання алгебри». Панченко Л. Л. розглядає математичне моделювання як метод наукового дослідження і навчального пізнання, її дисертаційне дослідження присвячене формуванню вмінь математичного моделювання в процесі навчання майбутніх учителів математики. Гриб'юк О. О. у дисертації «Математичне моделювання як засіб екологічного виховання учнів у процесі навчання математики в класах хіміко-біологічного профілю» запропонувала експериментально перевірену методику навчання математики в класах хіміко-біологічного профілю в поєднанні екологічним вихованням учнів на основі моделювання різноманітних хіміко-біологічних явищ.

Аналіз наявної методичної літератури, дисертаційних досліджень показує, що хоча питанням навчання математичному моделюванню в школі займалась значна кількість дослідників, питання ефективних умов формування здатності до математичного моделювання в учнів профільної школи досліджено недостатньо. Систематизація та узагальнення результатів психолого-педагогічних досліджень, в яких розглядалися різні аспекти навчання учнів математичному моделюванню, а також власний досвід науково-пошукової діяльності та навчання учнів математики в профільній

школі, уможливили виявлення та розкриття низки суперечностей, що виникають між:

- між сучасними вимогами суспільства до рівня володіння математичним моделюванням у випускників школи та реальним станом готовності й здатності учнів до математичного моделювання;
- між існуючими можливостями вивчення й аналізу закордонних надбань щодо формування умінь математичного моделювання в учнів та недостатнім використанням цих можливостей у реальному освітньому процесі;
- між об'єктивною потребою вчителів математики в якісному навчально-методичному забезпеченні процесу формування умінь математичного моделювання в учнів та недостатністю відповідного забезпечення, науково-обґрунтованих методичних рекомендацій щодо прийомів та засобів підвищення ефективності навчання учнів математичному моделюванню в профільній школі.

Вважаємо, що розв'язання вказаних суперечностей слід шукати в контексті реалізації Концепції нової української школи та упровадження компетентнісного підходу в навчанні. Таким чином, вбачаємо розробку й наукове обґрунтування технології формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи актуальною проблемою теорії та методики навчання математики на сучасному етапі розвитку освіти в Україні. Актуальність означеної проблеми, недостатній рівень теоретичної дослідженості й практичної розробленості, зумовили вибір теми дисертації: **«Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи»**. Вбачаємо необхідним акцентувати увагу на методиці формування здатності учнів до математичного моделювання в нових умовах, у новому контексті, з новими завданнями та новими засобами їх вирішення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Наукова робота є складовою частиною комплексної наукової теми кафедри алгебри і методики навчання математики «Формування та розвиток

методико-математичних компетентностей майбутніх учителів» (номер державної реєстрації: №0113U003003). Тему затверджено на засіданні Вченої ради Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол №5 від 26. 10. 2016 р.) та узгоджено Міжвідомчою радою з координації наукових досліджень з педагогічних і психологічних наук в Україні (протокол №2 від 28. 03. 2017 р.).

Об'єкт дослідження – процес формування математичної компетентності учнів профільної школи.

Предмет дослідження – технологія формування умінь математичного моделювання в учнів.

Мета дослідження полягає в розробці й обґрунтуванні технології формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи та експериментальній перевірці ключових факторів її ефективності.

Для досягнення поставленої мети були сформульовані **завдання дослідження**:

1. З'ясувати ступінь розроблення різних аспектів досліджуваної проблеми у педагогічній вітчизняній та зарубіжній літературі.
2. Визначити актуальні методичні аспекти процесу формування в учнів умінь математичного моделювання та ключові фактори його ефективності.
3. Обґрунтувати місце і роль прикладних задач як основного засобу формування в учнів умінь математичного моделювання.
4. Експериментально перевірити на ефективність запропоновану технологію формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи та розробити відповідні методичні рекомендації для вчителів.

Для реалізації мети та виконання поставлених завдань застосовувалися такі **методи** науково-педагогічних досліджень:

- *теоретичні* – аналіз навчально-методичної, психолого-педагогічної літератури з проблеми дослідження (1.2 – 1.3); систематизація й узагальнення

різних підходів до означення основних понять дослідження (1.1); аналіз та систематизація вітчизняного (зокрема й власного) та зарубіжного досвіду використання методів, прийомів та засобів формування в учнів умінь математичного моделювання в основній та старшій школі (1.3.1 – 1.3.2, 2.1.1 – 2.1.2); теоретичне моделювання оновленого процесу формування умінь математичного моделювання у процесі навчання учнів математики в профільній школі (2.2 – 2.3);

- *емпіричні* – методи збирання та опрацювання емпіричного матеріалу (педагогічне спостереження, дослідницька бесіда, опитування, анкетування учнів, вчителів та майбутніх учителів математики), цілеспрямований педагогічний експеримент (констатувальний, пошуковий, формувальний) (3.1. – 3.2.);

- *статистичні* - опрацювання результатів педагогічного експерименту, їх кількісний і якісний аналіз з метою визначення статистичної значущості отриманих у ході педагогічного експерименту результатів (3.3).

Загальна методологія дослідження базується на положеннях теорії пізнання, теорії особистості і її розвитку, теорії діяльності як чинника розвитку особистості; теорії навчання й освіти взагалі та методики навчання математики зокрема; використанні основних методологічних, загальнонаукових і спеціальних наукових підходів; дотриманні основних методологічних і методичних вимог до проведення експериментальних педагогічних досліджень; засадах Національної стратегії розвитку освіти України в XXI столітті, Законах України «Про освіту», «Про загальну середню освіту», «Про вищу освіту», Державній національній програмі «Освіта» («Україна XXI століття»), «Основних напрямках досліджень з педагогічних і психологічних наук в Україні», Державному стандарті повної загальної середньої освіти, Концепції розвитку педагогічної освіти, проектах Стандартів вищої освіти, інших нормативних документах з урахуванням вітчизняного та зарубіжного досвіду навчання учнів математики.

Теоретичну основу дослідження становлять наукові праці вітчизняних і зарубіжних авторів присвячені: теоріям і технологіям навчання (П. Гальперін, М. Гріндер, Т. Каменєва, В. Кушнір, О. Леонтєв, Н. Тализіна, та інші); проблемам закономірностей засвоєння знань, умінь та навичок (Є. Кабанова-Меллер, Г. Лернер, В. Лозова, С. Максименко, Н. Мойсеюк, Т. Тихонова та інші); структурі навчальної діяльності (Г. Балл, В. Давидов, Д. Ельконін, Г. Костюк, Є. Машбиць та інші); проблемам теорії й методики навчання математики в школі та ЗВО (І. Акуленко, Г. Бевз, В. Бевз, М. Бурда, І. Ленчук, О. Матяш, М. Працьовитий, С. Семенець, С. Скворцова, З. Слєпкань, Н. Тарасенкова, В. Швець, О. Школьний та інші).

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що:

- *визначено* цілі та зміст навчання математичному моделюванню в профільній школі, відібрано відповідні прийоми і засоби навчання, які в сукупності презентують нову методику формування здатності учнів до математичного моделювання, яка відповідає сучасним освітнім пріоритетам;
- *обґрунтовано* місце і роль математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів;
- *з'ясовано* психолого-педагогічні передумови формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи;
- *виокремлено*, на основі аналізу вітчизняного та закордонного досвіду, основні напрямки вдосконалення методичної системи формування в учнів умінь математичного моделювання;
- *пояснено* актуальні методичні аспекти процесу формування в учнів умінь математичного моделювання та ключові фактори його ефективності;
- *акцентовано* увагу на організації *превентивної діяльності вчителя та учнів у процесі* формування в учнів умінь математичного моделювання;
- *спроектовано й експериментально перевірено* технологію формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи.

Удосконалено методичний інструментарій формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи.

Подальшого розвитку набули методичні ідеї щодо формування математичної компетентності учнів профільної школи у процесі навчання математичному моделюванню; ідеї щодо підготовки майбутніх учителів математики до формування в учнів умінь математичного моделювання.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що:

- створено навчально-методичне забезпечення формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи з реалізацією принципу наступності у навчанні математики, зокрема, навчальний посібник для вчителів математики, майбутніх учителів математики, викладачів педагогічних університетів та науковців, які досліджують проблеми шкільної математичної освіти та проблеми формування математичних компетентностей учнів, у якому подано та обґрунтовано методичний інструментарій формування в учнів умінь математичного моделювання у процесі навчання математики, систематизовано актуальний матеріал для практичного використання на уроках математики в школі, запропоновані авторські задачі;

- розроблені конкретні методичні рекомендації для вчителів математики щодо ефективних методів, прийомів та засобів формування здатності учнів до математичного моделювання в умовах профільної освіти.

Особистий внесок здобувача. У працях, які опубліковані у співавторстві, дисертантові належать такі здобутки: на основі власного досвіду гурткової роботи подані рекомендації щодо організації і проведення роботи математичного гуртка, розкрито певні особливості власного педагогічного досвіду в організації і проведенні математичного гуртка з метою покращення умов формування здатності учнів до математичного моделювання на прикладі навчально-дослідницького проекту на тему «Геометрія і футбол», констатовано, що розв'язування задач про футбол дозволило підвищити в учнів інтерес, мотивацію, і як наслідок ефективність

вивчення математики, зокрема геометрії [79]; основним засобом розвитку вмінь математичного моделювання в учнів профільної школи в статті визначено спеціальну систему задач сконструйовану вчителем математики, з урахуванням вимог цілісності, інтегративності, адитивності, методичної доцільності та методичної відповідності та наведено конкретний приклад [77]; зазначено, що процес формування в учнів умінь математичного моделювання може значно підвищити свою ефективність, якщо залучити учнів до створення тематичного портфоліо «Математичне моделювання на службі у людини» та розглянуто орієнтовний зміст основних розділів такого портфоліо [**Помилка! Джерело посилання не знайдено.**].

Результати дослідження впроваджено в освітній процес у наступних навчальних закладах: Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського; Обласний науковий ліцей-інтернат Комунального закладу вищої освіти «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж» та загальноосвітні школи: загальноосвітньої школи I-III ступенів м. Козятина; загальноосвітня школа I-III ступенів №1 м. Калинівка Вінницької області; Зеленодольська ЗШ I-III ступенів №1 Апостолівського району, Дніпропетровської області; Тиврівський ліцей-інтернат поглибленої підготовки в галузі науки; фізико-математична гімназія №17 м. Вінниці

Апробація результатів дослідження. Результати дослідження обговорювалися на засіданнях та методичних семінарах кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського та висвітлювалися на науково-практичних і науково-методичних конференціях різного рівня, зокрема:

міжнародних: IX-а міжнародна науково-практична конференція «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору» м. Київ (24-26 листопада 2016 року); Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» м. Київ (11-13 травня 2017 року); Международная научная конференция «Оценивание в системе образования: текущие цели» Молдова

(9-10 ноября 2017 года); XIV Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми» м. Вінниця (15-17 травня 2018 року); Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики» м. Вінниця (30 травня - 1 червня 2018 року); Conferinței științifice Internaționale «Curriculumul școlar: provocări și oportunități de dezvoltare» Chișinău (7-8 decembrie 2018); Scientific and Professional Conference: «Actual Problems of Science and Education, APSE–2020» Held in Budapest on 2nd of February 2020; Міжнародна науково-практична конференція: «Актуальні проблеми неперервної освіти в інформаційному суспільстві» м. Київ (29-30 травня 2020 року); Міжнародна онлайн-конференція T4 conference for teachers «Освіта після COVID-19» (30 травня 2020 року).

всеукраїнських: Всеукраїнська науково-практична конференція Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи» м. Одеса (15-16 вересня 2016 року); IV Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених та студентів «Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень» м. Вінниця (21-22 листопада 2016 року); Всеукраїнська науково-практична Інтернет-конференція «Моделювання у навчальному процесі» м. Луцьк (02-04 березня 2017 року); I Всеукраїнська дистанційна науково-практична конференція «Методичний пошук вчителя математики» м. Вінниця (16 березня 2017 року); Дистанційна Всеукраїнська наукова конференція «Математика у технічному університеті XXI сторіччя». м. Краматорськ (15-16 травня 2017 року); Всеукраїнська науково-практична Інтернет-конференція з міжнародною участю «Сучасні інформаційні технології та інновації методики навчання: досвід, тенденції, перспективи» м. Тернопіль (9-10 листопада 2017 року); V Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених і студентів «Актуальні проблеми сучасної науки та наукових досліджень» м. Вінниця (21-22 листопада 2017 року); Всеукраїнська науково-практична конференція з міжнародною участю

«Сучасна освіта в контексті нової української школи» м. Чернівці (11-12 жовтня 2018 року); II Всеукраїнська дистанційна науково-практична конференція «Методичний пошук вчителя математики» м. Вінниця (18 жовтня 2018 р.); III Всеукраїнська науково-практична конференція «Методичний пошук вчителя математики» м. Вінниця (25 квітня 2019 року); Всеукраїнська науково-практична онлайн-конференція «Проектування індивідуальної освітньої траєкторії професійного розвитку педагога» м. Біла Церква (13 червня 2019 року); Всеукраїнський педагогічний онлайн-марафон «Навчальна діяльність старшокласників за сучасних умов: організація, мотивація, результат м. Харків (8 квітня 2019 року); Всеукраїнська науково-практична онлайн конференція «Ключові тенденції шкільної освіти 2019/2020» м. Харків (7 грудня 2019 року); Антикризовий національний онлайн-EdCamp 2020: школа зараз і у «світі після» м. Харків (13-17 квітня 2020 року); Всеукраїнська науково-практична онлайн конференція «Педагогічні інновації та інструменти. Техніки для особистого та психологічного розвитку» (25-26 червня 2020 року).

Публікації. Теоретичні положення та основні результати дисертації представлені автором у 20 наукових працях, із них: 5 статей у фахових виданнях України (одна з них індексується в наукометричній базі Index Copernicus), 3 статті у зарубіжних наукових виданнях, 11 тез у збірниках матеріалів наукових конференцій різних рівнів, 1 навчальний посібник для вчителя.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, списку використаних джерел до кожного розділу, загальних висновків та додатків. Повний обсяг роботи становить 390 сторінок, з них 203 сторінки основного тексту, 130 сторінок додатків. Робота містить 10 таблиць та 53 рисунки.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В УЧНІВ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ

1.1. Розкриття сутності ключових понять дослідження

До ключових понять даного дослідження ми відносимо поняття: «математичне моделювання», «формування умінь учнів», «профільна школа».

1.1.1. Математичне моделювання

Сутність поняття «математичне моделювання» по-різному пояснюється в багатьох сучасних доступних джерелах:

- *Математичне моделювання* (англ. Mathematical simulation, нім. mathematische Modellierung f) — метод дослідження процесів або явищ шляхом створення їхніх математичних моделей і дослідження цих моделей. Математичне моделювання дозволяє замінити реальний об'єкт його моделлю і потім вивчати останню [74].
- Моделювання — дослідження об'єктів пізнання на їх моделях; побудова моделей реально існуючих предметів і явищ (живих організмів, інженерних конструкцій, суспільних систем, різних процесів і т. п.). *Математичне моделювання* є найбільш сучасним всеосяжним методом наукового дослідження; це процес створення математичних моделей. Математична модель – це система математичних співвідношень, які описують об'єкт, процес чи явище, що досліджується [73].
- *Математичним моделюванням* називається дослідження математичної моделі [35].

- *Математичне моделювання* є одним з основних сучасних методів дослідження систем. Зазвичай воно передбачає створення концептуальної моделі об'єкта дослідження, її формалізацію та перетворення у математичну або комп'ютерну модель, перевірку адекватності й подальше дослідження отриманої моделі за допомогою аналітичних або чисельних методів і сучасних комп'ютерних технологій [111]
- Моделювання – це процес дослідження реальної системи, який включає побудову моделі, її дослідження та перенесення одержаних результатів на досліджувану систему. Модель можна визначити як об'єкт, що в деяких відношеннях збігається з прототипом і є засобом опису, пояснення та/або прогнозування його поведінки. Під *математичною моделлю* реальної системи (процесу) розуміється сукупність співвідношень (формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов, операторів тощо), які визначають характеристики станів системи залежно від її параметрів, зовнішніх умов (вхідних сигналів, впливів), початкових умов та часу [3].
- Моделювання – це побудова (або вибір) і вивчення такого об'єкта будь-якої природи (моделі), що здатний замінити собою досліджуваний об'єкт (оригінал) і вивчення якого дає нову інформацію про досліджуваний об'єкт. *Математичне моделювання* є найвищою формою моделювання. Воно сприяло розвитку науки й техніки індустріального суспільства, а з появою електронно-обчислювальних засобів обробки інформації привело до бурхливого розвитку сучасного – постіндустріального суспільства [125].
- Моделювання – це один із прогресивних методів, що широко застосовується у сучасній науці, і в першу чергу, її прикладних галузях. Моделювання дозволяє прискорити технічний прогрес, суттєво змінити терміни освоєння нових виробництв. Під *математичним моделюванням* розуміють вивчення властивостей

об'єкту на математичній моделі. Математичною моделлю називається приблизний опис деякого явища чи процесу зовнішнього світу, який наданий за допомогою математичної символіки. Математичне моделювання є одним із найсучасніших напрямків, що тісно пов'язано з впровадженням сучасної комп'ютерної техніки та інформаційних технологій [72, с.9].

- *3D-моделювання*. Нині широко використовується комп'ютерна графіка. Програми для 3D-моделювання допомагають перетворити окремі ідеї в красиві моделі і прототипи. 3D-моделі використовуються в різних сферах: кіно, комп'ютерні ігри, дизайн інтер'єру, архітектура і багато іншого. Вибір програмного забезпечення для моделювання часто буває важким, так як непросто знайти програму, в якій був би весь необхідний функціонал.

У нашому дослідженні зміст *математичної моделі* ми розкриваємо, як сукупність математичних співвідношень, рівнянь, нерівностей, що описують основні закономірності, властиві досліджуваному процесу, об'єкту або системі [50, с.9]. Задача моделювання полягає в тому, що для заданого об'єкта потрібно підібрати такий опис, який у повній мірі відображав би оригінал з точки зору заданої мети моделювання. Метою моделювання є здобуття, обробка, представлення і використання інформації про об'єкти, які взаємодіють між собою. Модель виступає засобом пізнання властивостей і закономірностей поведінки об'єкту. Розробка моделей поєднує в собі науку і мистецтво. Немає чіткого формального алгоритму, який би дозволив побудувати модель для будь-якого об'єкта [50, с.12].

Розглянемо, яким чином пропонується вводити поняття «математичне моделювання» авторами шкільних підручників.

У підручнику алгебри для 7 класу авторів Г. П. Бевз, В. Г. Бевз при вивченні теми «Функції» зустрічаємо оперування поняттям «математична модель»: «Функція одне з найважливіших понять математики. З її допомогою моделюють і досліджують різноманітні процеси, що відбуваються навколо

нас. Для цього реальну ситуацію перекладають зі звичайної мови на алгебраїчну, тобто складають математичну модель даної відповідності» [5, с.142]. Трохи згодом, при вивченні теми «Розв'язування задач за допомогою рівнянь» присутнє таке пояснення: «Щоб розв'язати задачу за допомогою рівняння, спочатку слід скласти відповідне до цієї задачі рівняння. Власне кажучи, треба перекласти задачу зі звичайної мови на алгебраїчну, тобто скласти математичну модель даної задачі» [5, с.191]

У підручнику «Алгеба» для 7 класу О. С. Істера поняття математичне моделювання вперше зустрічається в темі «Функція» наступним чином: «Щоб розв'язати задачу практичного змісту, доцільно спочатку створити її математичну модель, тобто записати залежність між відомими і невідомими величинами за допомогою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо» [38, с.130].

У підручнику алгебри для 7 класу авторів А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір поняття «математична модель» вперше згадується в темі «Розв'язування задач за допомогою рівнянь», а саме: «Часто умова задачі є описом якоїсь реальної ситуації. Складене за цією умовою рівняння називають математичною моделлю цієї ситуації» [80, с.18].

Г. П. Бевз [4, с.3] зазначає, що поняття математичної моделі нині набуло особливого значення, оскільки воно стало визначальним для сучасної математики: математика – наука про математичні моделі та їх застосування. На основі ґрунтовного порівняльного аналізу праць науковців, сучасних програм з математики та шкільних підручників Г. П. Бевз приходить до висновку, що математичні моделі в школі не слід пов'язувати тільки з прикладними задачами. Г. П. Бевз пропонує дослідникам не звужувати поняття математичної моделі й закликає до дискусії на цю тему. Позиція Г. П. Бевза у цій дискусії: «Математична модель – це система математичних понять чи відношень, які відповідають досліджуваному об'єкту чи процесу» [4, с.7]. Математичні моделі можна застосовувати для розв'язування не тільки прикладних задач, а й абстрактних.

Підсумовуючи, зазначимо: математичне моделювання набуло нині широкого застосування в різних сферах діяльності людини. За допомогою математичного моделювання проводяться дослідження суспільно-політичних ситуацій і формуються стратегії політичної поведінки. За допомогою математичного моделювання досліджуються фактори динаміки та стійкості геосистем і власне їх екологічного стану та тенденцій зміни. За допомогою математики моделюється і досліджується економічна безпека України [1]. Розвиток математичних моделей та методів сприяє розширенню області пізнання в найрізноманітніших сферах життєдіяльності людини. Наприклад, у медицині дослідження математичних моделей сприяло появі нових високоефективних методів діагностики та лікування, створенню медичної техніки. За останні роки активне впровадження в медицину методів математичного моделювання і створення автоматизованих, в тому числі комп'ютерних, систем суттєво розширило можливості діагностики та терапії захворювань. Нині математичне моделювання широко використовується в біофізиці, біохімії, генетиці, імунології, епідеміології, фізіології, фармакології, медичному приладобудуванні, при створенні біотехнічних систем та інше. Все це свідчить про необхідність формування відповідних уявлень, знань і вмінь математичного моделювання в учнів, зокрема профільної школи.

1.1.2. Формування умінь учнів у процесі навчання математики

Одним із головних завдань курсу математики, як вказано в навчальній програмі з математики [86], є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності. У Державному стандарті базової та повної загальної середньої освіти [31, с.33] зазначено, що предметна (галузева) компетентність – це набутий учнями в процесі навчання досвід специфічної для певного предмета діяльності, пов'язаної із засвоєнням, розумінням і застосуванням нових знань. Предметні (галузеві) компетентності стосуються змісту конкретної освітньої галузі чи предмета, і для їх опису

використовуються такі ключові поняття: «знає і розуміє», «уміє і застосовує», «виявляє ставлення і оцінює» тощо.

Зміст поняття «математична компетентність» чітко не розкрито в жодній з діючих програм з математики для основної та старшої школи, хоча в кожній із них наголошено, що в основу побудови змісту й організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід. С.А. Раков [103, с. 4-5] визначає математичну компетентність як уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, уміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень. Дослідник вважає, що до математичних умінь, належать: уміння математичного мислення, уміння аргументування, уміння математичного моделювання; уміння постановки та розв'язування математичних задач, уміння презентації даних; уміння оперування математичними конструкціями; уміння математичного спілкування; уміння використання математичних інструментів.

Розглянемо ґрунтовніше поняття «уміння», та що означає формувати уміння.

- Уміння – це дії, які виконуються певним способом і з певною якістю (В. П. Кутішенко) [60, с. 79];
- Уміння – це готовність успішно виконувати певну діяльність, яка ґрунтується на знаннях і навичках (М. Й. Варій) [10];
- Уміння — здатність належно виконувати певні дії, заснована на доцільному використанні людиною набутих знань і навичок [128];
- Уміння - знання певної справи, розуміння послідовності її виконання. (Р. В. Павелків) [93];
- Уміння - це знання в дії (І. В. Малафійк) [66];
- Уміння – це засвоєні та перетворені на особисті здобутки учня способи виконання дій. Уміння формуються в діяльності й у той же

час проявляють себе як здатність людини до цілеспрямованої діяльності (С. О. Пустовіт) [102, с.8];

- Уміння – це заснована на знаннях і навичках здатність людини успішно досягати свідомо визначеної мети діяльності в змінних умовах її проходження (Є. О. Мілерян) [81];
- Уміння - це готовність (здатність) доцільно виконувати розумові або фізичні дії за мінливих умов (Д. М. Кирюшкін) [51];
- Уміння - здатність використовувати наявні знання, поняття, оперувати ними для виявлення суттєвих властивостей об'єктів і явищ, успішного розв'язання теоретичних і практичних завдань (О. П. Сергієнкова) [112].

В українському педагогічному словнику С. У. Гончаренко визначив уміння як «здатність належно виконувати певні дії, засновану на доцільному використанні людиною набутих знань і навичок. Уміння передбачає використання раніше набутого досвіду, певних знань. Вивчення кожного навчального предмета, виконання вправ і самостійних робіт виробляє в учнів уміння застосовувати знання» [24, с. 338].

У психолого-педагогічній літературі розрізняють елементарні вміння, які йдуть відразу за знаннями і першим досвідом дій, і вміння, які виявляються як майстерність у виконанні діяльності. Елементарні вміння — це дії, які виникають на основі знань у результаті наслідування діям або самостійних спроб і помилок. Уміння, які виявляються як майстерність, формуються на основі ґрунтовних знань та належного досвіду виконання відповідних дій.

Утворення умінь є складним процесом аналітико-синтетичної діяльності кори великих півкуль головного мозку, в ході якого створюються й закріплюються асоціації між завданням, необхідними для його виконання, знаннями та застосуванням знань на практиці [128]. Формування умінь проходить кілька стадій. Спочатку — ознайомлення з умінням, усвідомлення його суті, початкове оволодіння ним. Згодом самостійне й дедалі точніше

виконання необхідних дій. Уміння являють собою свідомо контрольовані частини діяльності. Психологи (О.П.Сергієнкова та інші) стверджують, що уміння формується краще за умови глибокого розуміння учнями суті понять, властивостей, закономірностей зв'язків. Варто учнів спеціально навчати розумовій діяльності, необхідній для використання знань. На практиці педагоги використовують різні шляхи формування вмінь, однак часто це відбувається стихійно. Психологи [112] радять, що на перших етапах формування умінь учень має послідовно обґрунтовувати свої дії, усвідомлювати всі прийоми, операції і теоретичні положення, на яких вони ґрунтуються. Учитель має спонукати учнів розгортати міркування і операції, вимагаючи, щоб пояснювали вголос, чому саме так варто діяти. На вищому рівні деякі ланки міркувань втрачають свою актуальність, удосконалюються вміння, але ще не всі операції усвідомлюються. Показником сформованості уміння на вищому рівні є свідоме перенесення способу розв'язання старих завдань на нові.

Отже, уміння учнів формується у процесі виконання різноманітних завдань. Формування вмінь учнів залежить від умов навчання, організації процесу вправління, від індивідуальних особливостей: теоретичних знань, нахилів і здібностей, усвідомлення мети завдання, розуміння його змісту, способів виконання. Тривале, безперервне вправління, як і тривалі перерви у ньому, не сприяють успішному формуванню вмінь.

Таким чином, необхідною умовою формування вміння у процесі навчання математики є свідоме засвоєння необхідних математичних знань, належний досвід їх застосування у процесі виконання спеціальних вправ, вправність у виконанні необхідних дій. На думку Н. М. Федорової [129], формуючи математичні уміння, необхідно створити для учнів оптимальні умови для поступового переходу від дій під керівництвом учителя до самостійних, даючи їм змогу самим шукати шлях розв'язання пізнавальних та практичних завдань. Для формування вмінь у процесі навчання математики, учні мають бути залучені до діяльності з порівняння,

розпізнавання, розрізнення, виявлення відмінностей і подібності, класифікації, аналізу, синтезу, узагальнення, абстрагування, категоризації об'єктів, протиставлення, створення, проектування, запам'ятовування, перенесення, уяви, відтворення, прикладання, обстеження, орієнтування, побудови здогадок, впізнавання, реконструкції і перетворення, відтворення в пам'яті, перегрупування, відновлення, розчленування, об'єднання, виділення, віднесення невідомого до відомого та інше [66].

Вчені (Долинська Л. В., Коханова О. П., Максименко С. Д., Скрипченко О. В., Огороднійчук З. В., Сергеєнкова О. П., Столярчук О. А., Пасєка О. В., Павелків Р. В.) висловлюють думку, що діяльність — це свідомо активність, динамічна система взаємодії зі світом, яка виражається системою дій, спрямованих на досягнення визначеної мети.

Отже, під поняттям «уміння учня» у нашому дослідженні будемо розуміти здатність учня успішно та свідомо виконувати певну діяльність, засновану на доцільному використанні ним набутих знань та досвіду їх застосування. Під навичкою ми розуміємо автоматизоване вміння, що виникає в процесі багаторазових тренувань учнів і успішно реалізується в їхній діяльності.

Формування вмінь учнів у процесі навчання математики має відбуватися відповідно до державних вимог, які визначені в Державному стандарті базової та повної загальної середньої освіти [31], а також в навчальних програмах з математики [84, 85, 86, 87]. Згідно вказаних документів, у процесі навчання учнів математики, маємо завдання формувати в них математичну компетентність. Математична компетентність за своєю структурою включає знання, уміння, досвід застосування та ціннісні ставлення. Сутнісний опис формування математичної компетентності, який подано у розділі «Державні вимоги до загальноосвітньої підготовки учнів» шкільних програм з математики, представлено такими ключовими поняттями: учень пояснює зміст понять, наводить приклади, формулює означення або властивості, записує і пояснює, класифікує, зображує та

знаходить на малюнках, вимірює та обчислює, розв'язує вправи тощо. Наш аналіз останніх програм з математики для профільної школи дозволяє стверджувати, що результати навчання математики на рівні сформованості умінь учнів подано ключовими поняттями: «учень розв'язує» та «учень застосовує». Наприклад: учень *розв'язує* задачі, моделями яких є відомі рівняння або системи рівнянь; учень *застосовує* інтеграл до розв'язування прикладних задач. Математичні уміння учнів ми відносимо до діяльнісного компонента їхньої математичної компетентності. Сформованість конкретного уміння учня у процесі навчання математики (наприклад, уміння математичного моделювання) ми тлумачимо як знання учнем відповідного способу діяльності, закріплене його систематичним використанням та успішним застосуванням у типових та незвичних ситуаціях.

В. В. Волошена стверджує, що до вмінь математичного моделювання, найчастіше відносять свідоме використання таких розумових операцій, як аналіз, синтез, узагальнення, порівняння, конкретизація. У дисертації В. В. Волошеної [18] щодо формування умінь математичного моделювання в учнів старшої школи зроблено висновки:

- уміння виділяти головне потребує свідомого використання умінь аналізу, синтезу, абстрагування та узагальнення, порівняння та конкретизації;
- уміння інтерпретувати потребує розшифровувати мову об'єкта розгляду;
- вміння шукати аналогії потребує наявності в учнів умінь аналізу та синтезу;
- уміння класифікації потребує операції поділу обсягу поняття, аналізу, синтезу, інтерпретування, а також побудови причинно-наслідкових зв'язків, узагальнення.

Основними компонентами вміння моделювання авторка вказує попередній аналіз та переклад (інтерпретація, тлумачення) змісту,

узагальнення. Ми використовували вказані висновки дослідниці у власному дослідженні методики формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи.

1.1.3. Профільна школа

У сучасних умовах інтенсивного зростання нової інформації та комунікативних технологій приходиться розуміння, що ні вчителям, ні тим паче учням, немає необхідності засвоювати в повному обсязі значні теоретичні відомості. Прогнозований динамізм зміни знань, інформації, технологій означає, що є потреба формування в учнів розуміння необхідності та уміння навчатися впродовж усього життя. А це спонукає переосмислити підходи щодо визначення базових дисциплін у школі. Нині більшість дослідників вважають, що базовою навчальною дисципліною для учня є та, яку він бажає досконало вивчити. Тобто виникає необхідність розподілу учнів старшої школи за освітніми інтересами та потребами. З іншого боку, стає очевидною низька ефективність традиційного для української школи навчання всіх і всьому. Тому основна ідея сучасних освітніх реформ: дати можливість вибору кожному учневі індивідуальної освітньої програми, із врахуванням його природних здібностей та життєвих планів.

Різноманітні дослідження якості освіти в світі засвідчують, що ті європейські країни, які показують хороші результати навчання в школі, мають освітній стандарт не менше 12 років, причому останні два-три роки – профілізація навчання. Така закономірність підтверджується дослідженнями взаємозалежності секторів освіти та економіки, які проведені за ініціативою Всесвітнього банку, Ради Європи та Організації з економічного співробітництва і розвитку Європейського Союзу. За результатами цих досліджень: збільшення періоду середньої і вищої освіти та її диференціація позитивно впливають на економічні показники держав (Англія, Німеччина, Норвегія, Нідерланди).

Упроваджуючи європейські стандарти освіти, Україна стала на шлях профілізації старшої школи. У проекті нового Закону про освіту зазначено: «З метою задоволення інтересів потреб дітей та батьків та дотримання норм Конституції України щодо обов'язковості повної загальної середньої освіти, планується старша 3-річна профільна школа з двома групами профілів: академічні і професійні». Профільна середня освіта передбачає набуття та вдосконалення знань, умінь і навичок критичного та системного мислення, підготовку до свідомого життєвого вибору і самореалізації, професійної діяльності та громадянської активності, забезпечення готовності до продовження навчання на наступному рівні освіти. Профільна середня освіта передбачає два напрями: загальноосвітній та професійний. Загальноосвітній напрям передбачає профільне навчання на основі поєднання змісту, визначеного стандартом повної загальної середньої освіти, та поглибленого навчання окремих предметів з урахуванням здібностей та освітніх потреб учнів та орієнтацію на продовження навчання на наступному рівні освіти. Професійний напрям передбачає орієнтовану на ринок праці профільну освіту на основі поєднання змісту, визначеного стандартом повної загальної середньої освіти, та професійно орієнтованого підходу до навчання з урахуванням здібностей і потреб учнів [34].

У Концепції «Нова українська школа» визначено, що третій ступінь школи (профільна освіта) буде відокремлено від другого базового ступеня. «У рамках профільної освіти старшокласник зможе обирати одне з двох спрямувань навчання: академічне, із поглибленим вивченням окремих предметів з орієнтацією на продовження навчання в університеті; професійне, яке поряд зі здобуттям повної загальної середньої освіти забезпечує отримання першої професії.» [55, с.23] Здобуття профільної середньої освіти за академічним спрямуванням планується здійснювати в академічних ліцеях, а за професійним спрямуванням - у професійних ліцеях та профільних коледжах. В академічних ліцеях перший рік навчання буде

перехідним. На цьому етапі учень ще зможе змінити профіль навчання. Учні матимуть право обирати не лише предмети, а й рівні їхньої складності.

У Концепції «Нова українська школа» також наголошено, що молоді люди, які закінчать профільну школу, розумітимуть свою майбутню роль у родині, професійній діяльності, суспільстві. Отже, у власному дослідженні ми зосереджуємо увагу на формуванні конкретних умінь в учнів профільної школи, що є актуальним для сучасного етапу реформування шкільної освіти в Україні.

Поняття «профільна школа» для української педагогічної теорії та практики не є новим. Зокрема, українська практика реалізації ідеї профільного навчання унормована такими ключовими документами:

- Концепція профільного навчання в старшій школі (Наказ МОН України №10/2-2 від 25.09.2003 р.).
- План заходів на 2006-2010 роки щодо впровадження профільного навчання учнів 10-12 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Наказ МОН України №744 від 3.11.2006 р.).
- Галузева програма впровадження профільного навчання в 2008-2010 роках.
- Оновлення Концепції профільного навчання в старшій школі (Наказ МОН України №854 від 11.09.2009 р.).
- З 2010/2011 навчального року старша школа в усіх типах середніх загальноосвітніх закладів почала функціонувати як профільна.
- Всеукраїнський моніторинг дослідження стану реалізації Концепції профільного навчання в старшій школі (Інститут інноваційних технологій і змісту освіти).
- Концепція профільного навчання в старшій школі, затверджена рішенням колегії МОН України №1456 від 21.10.2013 року.

- Проект типового навчального плану для учнів 10 – 11 класів (2017 рік).

У Концепції профільного навчання в старшій школі [57, с. 4] визначено основні завдання профільної школи:

- 1) створення умов для врахування й розвитку навчально-пізнавальних і професійних інтересів, нахилів, здібностей і потреб учнів старшої школи в процесі їхньої загальноосвітньої підготовки;
- 2) забезпечення умов для життєвого і професійного самовизначення старшокласників, формування готовності до свідомого вибору і оволодіння майбутньою професією;
- 3) формування загальнокультурної, соціальної, комунікативної, інформаційної, громадянської, технічної, здоров'язбережної компетенцій учнів на допрофесійному рівні, спрямування молоді щодо майбутньої професійної діяльності;
- 4) забезпечення наступно-перспективних зв'язків між загальною середньою і професійною освітою відповідно до обраного профілю.

У Концепції профільного навчання в старшій школі визначено:

- Профіль навчання - це спосіб організації диференційованого навчання, який передбачає поглиблене і професійно зорієнтоване вивчення циклу споріднених предметів.
- Профільне навчання у 10-12 класах здійснюється за такими основними напрямками: суспільно-гуманітарний, філологічний, художньо-естетичний, природничо-математичний, технологічний, спортивний.

Типовий навчальний план для 10-11 класів закладів загальної середньої освіти [126] розглядають як крок до змін у межах реформи «Нова українська школа», як перший крок до профільної старшої школи. У проекті передбачені наступні ключові новації:

- скорочення кількості обов'язкових предметів (інваріантної складової) – з 22 до 9. Це дає можливість школі визначати свій профіль і поглиблено викладати обрані предмети;
- старша школа має стати профільною. Пропонується позбутися такого явища, як «універсальний профіль». Залежно від власних ресурсів і можливостей, школи самостійно обирають профіль (однопрофільна школа), або школа зможе мати класи з різними профілями викладання (багатопрофільна школа).
- можливість для шкіл створювати власні «спецкурси» для поглиблення профільного навчання. Тобто йдеться про викладання вузьких спеціалізованих дисциплін, які є близькими до профілю, що обирає школа.
- з'являються інтегровані предмети «Література», «Історія», «Людина і суспільство», «Математика».

Реалізація вказаного типового навчального плану для 10-11 класів передбачає зростання кількості шкіл, що профільно навчатимуть точних дисциплін. У проекті вказаного документа кількість годин на тиждень на вивчення математики як профільної навчальної дисципліни визначено – 10 годин. Згідно Концепції «Нова українська школа», перехід на 12-річне навчання та старт нової української школи передбачається як один з етапів реалізації Концепції. Основні завдання реформування шкільної освіти визначені в Концепції наступним чином:

- школа має працювати на засадах особистісно-орієнтованої моделі освіти, в рамках якої школа максимально має враховувати права дитини, її здібності, потреби та інтереси, на практиці реалізуючи принцип дитиноцентризму;
- школа має працювати на засадах «педагогіки партнерства»: повага до особистості; доброзичливість і позитивне ставлення; довіра у відносинах; діалог – взаємодія – взаємоповага; розподілене лідерство; принципи соціального партнерства;

- школа має широко застосовувати методи викладання, засновані на співпраці (ігри, проекти – соціальні, дослідницькі, експерименти, групові завдання тощо);
- має відбутися зміна підходів до оцінювання результатів навчання: оцінки слугуватимуть для аналізу індивідуального прогресу і плануванню індивідуального темпу навчання, а не ранжуванню учнів;
- у рамках запровадження компетентнісного підходу має бути створено нову систему вимірювання й оцінювання результатів навчання;
- запровадження ІКТ в освітній галузі має перейти від одноразових проектів у системний процес, який охоплює всі види діяльності;
- нову українську школу буде підтримувати електронна платформа для створення і поширення електронних підручників і навчальних курсів для школярів та вчителів;
- учні матимуть свободу вибору предметів та рівня їхньої складності, з'явиться можливість навчання в різновікових предметних або міжпредметних групах;
- слід збалансувати на всіх рівнях гуманітарну та природничо-математичну освіту; є необхідність у збереженні добрих традицій й забезпеченні високого рівня природничо-математичної освіти та вивченні інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у всіх школах;
- буде заохочуватися інклюзивна освіта: для учнів з особливими потребами буде створено умови для навчання спільно з однолітками.

У процесі розробки методики формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи, ми вибрали ключовим орієнтиром вказані завдання реформування шкільної освіти в Україні.

Щодо наукових досліджень проблем організації навчання в профільній школі, то обсяг таких досліджень в українській педагогічній науці значний, а зміст різновекторний. У працях І. А. Акуленко [1], Н. М. Бібик [6,56], Л. Ю. Благодаренко [7], М. І. Бурди [8, 9, 56], С. П. Величка [13], М. В. Головка [23], Г. В. Жабєєва [33], В. Г. Кременя,

Ю. І. Мальованого [63, 67], Н. Г. Ничкало [88], О. І. Ляшенка [63], В. В. Рибалка [106], А. П. Самодріна [109, 110], П. І. Сікорського [114], В. Д. Сиротюка [113], Н. І. Шиян [146] та інших висвітлюються теоретико-методичні засади профільного навчання, розкриваються особливості проектування змісту профільного навчання на основі введення державного стандарту, пропонуються дидактичні моделі та організаційні форми профільного навчання. У дослідженнях Г. Г. Ващенка [11], М. Гончарова, І. В. Ловянової [62, 63], В. Ревякіної, А. П. Самодріна [109, 110] та інших висвітлено становлення системи профільної освіти в Україні.

У докторській дисертації О. І. Ордановської [89] досить ґрунтовно проаналізовано історію становлення, сутність та зарубіжний досвід профільного навчання, сучасний стан та перспективи навчання фізико-математичних дисциплін у профільній школі. Різним аспектам навчання математики у профільній школі присвячені дисертаційні роботи М. В. Василь'євої, Т. А. Грицик, Т. С. Жданової, С. В. Іванової, В. М. Козири, Н. В. Кугай, Т. Х. Пономарьової, Ю. М. Ткач, О. В. Шаран та інших. У роботах вказаних авторів досліджувалися, зокрема, окремі практичні способи здійснення рівневого навчання у профільних класах. У дисертації І. В. Шищенко [145] досліджувалися прийоми активізації пізнавальної діяльності старшокласників на уроках математики в класах гуманітарних профілів. І. В. Ловянова у докторській дисертації [63] акцентувала увагу на теоретико-методичних засадах навчання математики у профільній школі.

На думку багатьох українських науковців у профільній школі слабо реалізовані функції курсів за вибором, слід запроваджувати спеціальні варіативні методики навчання, які забезпечували б реалізацію різних моделей та організаційних форм профільного навчання. На нашу думку, особливого значення набуває нині проблема розроблення методики навчання математики в профільній школі в цілому, а також її окремих змістових ліній та ключових тем. Узагальнюючи доробок українських науковців щодо методики навчання математики в профільній школі зазначимо, що проблема розроблення

спеціальної методики формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи окремо не досліджувалася.

У вищезгаданих працях українських науковців поняття «профільна школа» визначається по-різному. Наприклад: профільна школа – це школа в якій реалізуються програми поглибленого навчання одного або кількох предметів. Ми будемо використовувати поняття «профільна школа» у розумінні форми організації навчання у старшій школі. Оскільки за відповідними законодавчими актами старша школа має функціонувати як профільна, то замість «старша школа», або «профільна старша школа» прийнятно використовувати поняття «профільна школа». Згідно з Концепцією «Нова українська школа» поняття «старша школа» не буде використовуватися взагалі. Ми розмежуємо поняття «профільна школа» та «профільний навчальний заклад», оскільки існують профільні навчальні заклади в яких функціонує не лише профільна школа, а й початкова та основна.

1.2. Місце і роль математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів

1.2.1. Наскрізний аналіз сучасних навчальних програм з математики щодо місця і ролі математичного моделювання

Змістове наповнення навчальної програми з математики [86], як зазначено в її пояснювальній записці, реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, яка дає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в різних сферах.

Основною метою освітньої галузі «Математика» є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших

освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції.

Найчастіше в українській педагогічній теорії й практиці використовується означення С. А. Ракова [104], який визначає математичну компетентність, як уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, уміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень.

Практична компетентність, як зазначено в навчальних програмах з математики рівня стандарту [86], передбачає, що випускник загально-освітнього навчального закладу: вміє будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних із ними, за допомогою математичних об'єктів, відповідних математичних задач; вміє оволодівати необхідною оперативною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; уточнювати вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв'язування задачі; переформулювати задачу; розчленовувати задачі на складові, встановлювати зв'язки між ними, складати план розв'язання задачі; вибирати засоби розв'язання задачі, їх порівнювати і застосовувати оптимальні; перевіряти правильність розв'язання задачі; аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; узагальнювати задачу, всебічно її розглядати; приймати рішення за результатами розв'язання задачі.

Формування навичок застосування математики, зазначено в пояснювальній записці навчальної програми з математики, є однією із головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними,

характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. В програмі наголошено: математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Реалізація прикладної спрямованості в процесі навчання математики означає:

1) створення запасу математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах;

2) формування в учнів знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей;

3) навчання учнів побудові і дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів.

У навчальних програмах з математики для профільного рівня [85] зазначено: широке і системне застосування методу математичного моделювання протягом вивчення всього курсу математики має стати потужним засобом формування в учнів навичок повсякденного користування математикою при вивченні природничих предметів.

З метою створення необхідних умов для більш повної реалізації освітньої, розвивальної та виховної складових навчання математики, врахування інтересів, здібностей, потреб та можливостей учнів, у профільних фізико-математичних та математичних класах у повному обсязі має бути використаний потужний потенціал варіативної складової навчального плану, яка передбачає проведення факультативів, курсів за вибором. Як приклад у пояснювальній записці програми вказано курс за вибором «Застосування математичних моделей у розв'язуванні задач фізики».

Особливу увагу, зазначено в навчальній програмі з математики, слід приділити в профільній школі з'ясуванню ролі математики в сферах її застосувань. Зокрема, слід забезпечити засобами математики формування в учнів правильних уявлень про математичне моделювання та навчити школярів його застосуванню до розв'язування широкого кола прикладних задач, зокрема фізичних. Вивчаючи математику в класах математичного,

фізичного та фізико-математичного профілів, старшокласники мають усвідомити, що процес її застосування до розв'язування будь-яких прикладних задач розподіляється на три етапи: 1) формалізація (перехід від ситуації, описаної у задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, і від неї — до чітко сформульованої математичної задачі); 2) розв'язування задачі у межах побудованої моделі; 3) інтерпретація одержаного розв'язку задачі та його застосування до вихідної ситуації.

Розглянемо вибірку вимог і завдань програм з математики, які орієнтують вчителя на пріоритети в змістовій частині навчання учнів математичному моделюванню. Щоб цілісно побачити мету і завдання такої роботи в профільній школі, побудуємо вибірку для усієї вертикалі навчання математики, починаючи з початкової школи (Таблиця 1, Таблиця 2, Таблиця 3, Таблиця 4).

У Таблиці 1 (Додаток А) нами виокремлено зміст та вимоги програм з математики для 1-4 класів [71] щодо формування в учнів умінь математичного моделювання. Аналіз Таблиці 1 дозволяє стверджувати, що у програмах з математики для початкової школи, відповідно до Державного стандарту початкової загальної освіти [32], серед основних змістових ліній курсу математики 1-4 класів наявні такі: величини; сюжетні задачі; робота з даними. Вказані змістові лінії, очевидно, є основою формування в учнів умінь математичного моделювання.

У пояснювальній записці навчальних програм для 1-4 класів зазначено: «Навчання математики забезпечує формування у молодших школярів ключових компетентностей, які позначаються через уміння вчитися, здатність логічно міркувати, уміння критично мислити, готовність розв'язувати проблеми із застосуванням досвіду математичної діяльності для вирішення повсякденних задач, уміння працювати в команді тощо. Крім того, навчання математики сприятиме виробленню в учнів передумов самостійного пошуку й аналізу інформації, фінансової грамотності та підприємницьких навичок» [71].

У пояснювальній записці навчальних програм з математики для 1-4 класів також чітко виписані завдання кожної із вказаних нами змістових ліній:

- Змістова лінія «Величини» є пропедевтичною основою для побудови моделей навколишнього світу, важливою ланкою, що пов'язує математику з іншими науками. Важливо формувати в учнів уміння використовувати різні одиниці вимірювання величин у процесі розв'язування практично - зорієнтованих задач. Поняття величини є одним із головних у контексті формування в учнів цілісної картини світу, практичного застосування досвіду навчальної математичної діяльності в життєвих ситуаціях.
- Особливо значуща роль для формування в учнів здатності розпізнавати практичні проблеми, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів відведена змістовій лінії «Сюжетні задачі». Сюжетні задачі, особливо практично - зорієнтовані, забезпечують зв'язок математики із реальним життям дитини. Метою цієї змістової лінії є формування в учнів загального уміння працювати із задачею, умінь розв'язувати задачі певних типів. Уявлення про процес розв'язування задачі формується як перехід від текстової моделі (текст задачі) до схематичної (короткий запис, схема), а далі – до математичної (вираз). Процес розв'язування задачі передбачає аналіз її умови, подання результатів цього аналізу у вигляді допоміжної моделі – короткого запису, схеми, малюнка тощо; пошук шляхів і складання плану розв'язування задачі, запис її розв'язання, відповідь на запитання задачі. Для розв'язування сюжетних задач переважно обирається арифметичний метод. Передбачається подання аналізу тексту задачі у вигляді схеми, рисунка, таблиці, ілюстрування шляхів її розв'язання за допомогою граф-схеми («дерево міркувань»).
- Основне завдання наскрізної змістової лінії «Робота з даними» – ознайомити молодших школярів на практичному рівні зі способами

подання інформації та роботи з нею при розв'язуванні практично - зорієнтованих задач, моделювання описаних ситуацій у формі таблиць, схем, діаграм. Для унаочнення порівняння результатів вимірювання величин використовують лінійні або стовпчасті діаграми, формують первинні уявлення про добір і накопичення даних, занесення до таблиці; зчитування інформації, заданої за допомогою лінійних і стовпчастих діаграм, таблиць, графів.

Що стосується змісту та вимог формування в учнів умінь математичного моделювання у програмах з математики для базової школи (5-9 класи), то відповідна вибірка представлена у Таблиці 2 (Додаток Б).

На доповнення до Таблиці 2 зазначимо, що як слідує з неї, у 9 класі тепер відсутня тема «Елементи прикладної математики», яка у попередніх навчальних програмах для 9-го класу була представлена наступним змістом:

Тема 3. ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ.

Математичне моделювання. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків. Випадкова подія. Ймовірність випадкової події. Статистичні дані. Способи подання даних. Частота. Середнє значення.

Відповідно вимоги до знань та умінь учнів вказувалися наступним чином: учень/учениця *наводить приклади*: математичних моделей реальних ситуацій, випадкових подій; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків; *Описує поняття*: випадкова подія; ймовірність випадкової події, частота, середнє значення статистичних вимірювань; *розв'язує задачі, що передбачають*: виконання відсоткових розрахунків; знаходження ймовірності випадкової події; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків; знаходження середнього значення.

У сучасних програмах вказана тема наявна лише в програмах з математики для 9 класу при поглибленому навчанні математики:

Тема 5. ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Математичне моделювання. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків. Комбінаторні правила додавання і множення. Основні формули

комбінаторики. Розміщення, сполучення (комбінації), перестановки. Випадкова подія. Ймовірність випадкової події. Статистичне і класичне означення ймовірності. Обчислення ймовірностей за допомогою формул комбінаторики. Статистичні дані. Способи подання даних. Частота. Вибірка. Середні значення

Учень/учениця: *пояснює поняття*: випадкова подія, ймовірність випадкової події, частота, середнє значення статистичних вимірювань; *формулює* комбінаторні правила додавання і множення; означення понять: перестановка, сполучення (комбінації), розміщення, ймовірність випадкової події; *розв'язує вправи, що передбачають*: використання формули обчислення складних відсотків, формул для обчислення перестановок, сполучень і розміщень, знаходження ймовірності випадкової події, знаходження частоти, моди і медіани статистичної вибірки.

Ми порівняли зміст і вимоги кількох послідовних програм з математики для основної школи [68, 69, 70, 84] щодо формування в учнів умінь математичного моделювання і прийшли до висновку, що у сучасних програмах, у порівнянні із попередніми, дещо звужений зміст і знижений рівень вимог щодо формування в учнів умінь математичного моделювання. Як аргумент для такого висновку наведемо порівняльну таблицю (Таблиця 3) (Додаток В). зміни змісту та вимог проаналізованих нами послідовних програм з математики щодо формування в учнів умінь математичного моделювання в 5-6 класах.

В останніх програмах з математики для основної школи [68, 84] виокремлена наскрізна лінія «Підприємливість і фінансова грамотність», яка націлена на розвиток лідерських ініціатив, здатність успішно діяти в технологічному швидкозмінному середовищі, забезпечення кращого розуміння учнями практичних аспектів фінансових питань (здійснення заощаджень, інвестування, запозичення, страхування, кредитування тощо).

Ця наскрізна лінія пов'язана з розв'язуванням практичних задач щодо планування господарської діяльності та реальної оцінки власних

можливостей, складання сімейного бюджету, формування економного ставлення до природних ресурсів. Вона реалізується під час вивчення відсоткових обчислень, рівнянь та функцій. Особливе місце у вивченні курсу алгебри 7-9 класів відведене текстовим задачам, основними функціями яких є розвиток логічного мислення учнів та ілюстрація практичного застосування математичних знань. Під час розв'язування текстових задач учні мають навчитися використовувати математичні моделі. Розв'язування таких задач супроводжує вивчення всіх тем, передбачених програмою.

Що стосується змісту та вимог формування в учнів умінь математичного моделювання у програмах з математики для профільної школи, то відповідна вибірка представлена у Таблиці 4 (Додаток Г).

11 клас, поглиблене вивчення. Вимоги: *формулює* означення основних понять комбінаторики; *розв'язує* комбінаторні задачі; *наводить* геометричну інтерпретацію операцій над подіями; *обчислює* ймовірність події, користуючись комбінаторними та геометричними схемами; *обчислює* математичне сподівання випадкової величини; *пояснює* зміст середніх показників, *оцінює* числові характеристики випадкової величини за її вибірковими характеристиками та навпаки.

Приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст. Обчислення визначеного інтеграла. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об'ємів тіл. Використання інтеграла для розв'язування прикладних задач.

У вимогах зазначено: *застосовує* визначений інтеграл до розв'язування геометричних задач.

Навчання математичному моделюванню, зазначено в програмі [86], може здійснюватися не тільки на уроках математики, а й у процесі навчання усім природничим предметам.

Програма з математики для 12-річної школи [69] більше уваги приділяє навчанню математичного моделювання, ніж попередня. Зокрема, однієї з

цілей навчання математики в основній школі є така: «...формування в учнів математичних знань, як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві на основі ознайомлення школярів з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишньої дійсності» [84]. Особливо велика увага навчанню математичного моделювання приділяється в пояснювальній записці програми для старшої школи [86].

Щодо цілей викладання математики в старшій школі, то у програмі зазначено: «Формування навичок застосування математики є однією з головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі й до навчання математики зокрема.

1.2.2. Аналіз досліджень щодо місця і ролі математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів

Проблема необхідності застосування математичного моделювання в навчанні учнів у школі розглядалася в багатьох наукових дослідженнях, зокрема, Ю. О. Кусого, Л. Г. Петерсон, В. С. Билкова, Є. В. Величка, Л. О. Соколенко, А. В. Прус, І. А. Обойщиковой та інших. Ними доведена доцільність і можливість засвоєння учнями понять «модель», «моделювання», «математичне моделювання».

М. О. Філімонова [132] стверджує, що для набуття учнями відповідного рівня умінь застосовувати методи математичного моделювання, його навчання має бути наскрізним і організованим за такими етапами:

- 1) Пропедевтичний етап (5 – 6 класи) передбачає формування уявлень про математичну модель, її види, деякі властивості; уміння будувати математичну модель до задачі або складати задачу за даною математичною моделлю.
- 2) Початковий етап (7 – 8 класи) передбачає формування поняття про математичну модель, її види, етапи математичного моделювання; уміння будувати або добирати доцільні математичні моделі до задачі.
- 3) Основний етап (9 клас) передбачає узагальнення знань про математичну модель, її види, етапи математичного моделювання; формування уміння використовувати інформаційно-комунікаційні технології при створенні та дослідженні математичної моделі.
- 4) Дослідницький етап передбачає більш глибоке вивчення математичного моделювання на гуртках, факультативах; написання дослідницьких робіт в системі діяльності Малої академії наук; створення проєктів.

Щодо ролі вивчення і використання елементів математичного моделювання на уроках математики в 5 – 6 класах та геометрії в 7 – 9 класах, то М. О. Філімонова [134] стверджує, що математичне моделювання створює сприятливі умови для: свідомого оволодіння учнями математичним моделюванням як універсальним методом навчального пізнання навколишнього середовища; підвищення рівня розвитку творчих здібностей школярів; активізації пізнавального інтересу до вивчення предмету та ефективності навчання.

В. О. Швець [142, с. 17] називає математичне моделювання радикальним методом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики і стверджує, що математичне моделювання має стати наскрізною змістовою лінією цього курсу. Автором пропонується концептуальна модель

формування в учнів основної школи навичок та умінь математичного моделювання:

Навчальний предмет «Математика 5-6». *Чисельне моделювання:* числові і буквені вирази, діаграми і графіки, як математичні моделі.

Навчальний предмет «Алгебра 7-9». *Аналітичне моделювання:* вирази, рівняння, нерівності і їх системи, функції і їх графіки як математичні моделі.

Навчальний предмет «Геометрія 7-9». *Геометричне моделювання:* планіметричні фігури як моделі реальних об'єктів.

Навчальний предмет «Алгебра і початки аналізу 10-12». *Аналітичне моделювання:* функції і їх графіки, рівняння і нерівності та їх системи, похідна і інтеграл, диференціальні рівняння як математичні моделі. *Стохастичне моделювання:* гістограми, полігон, ймовірність.

Навчальний предмет «Геометрія 10-12». *Геометричне моделювання:* стереометричні фігури як моделі реальних об'єктів.

Навчальна тема «Математичне моделювання». (12 клас): Математична модель, види математичного моделювання, етапи побудови і дослідження моделі. Математичні моделі шкільного курсу математики.

На думку Г. М. Черкасової [139], одним з провідних методів пізнання є метод математичного моделювання, тому навчання розумінню змісту поняття «моделювання» і формування вміння застосувати його в оволодінні знаннями, і взагалі в житті, доцільно розпочинати з молодшого шкільного віку. Робота з моделями значною мірою розвиває такі уміння молодших школярів, як самостійність в отриманні нових знань для застосування їх до розв'язування задач.

В. В. Волошена [17] стверджує, що маючи властивості загального методу наукового пізнання, математичне моделювання в шкільному навчанні відіграє роль інтегруючого компонента предметного змісту природничих навчальних предметів. Моделювання в навчанні природничих предметів у процесі розв'язування задач, на думку дослідниці, виступає як матеріалізована форма продуктивної розумової діяльності учнів, а самі

моделі — як продукти і засоби її здійснення. Використання різних видів моделей створює підґрунтя для оволодіння школярами вміннями самостійно здобувати знання, стимулює їхній пізнавальний інтерес, предметну зацікавленість, позитивно впливає на мотивування учнів до навчання, активізує самостійний пошук ними способів вирішення навчальних проблем, а тому сприяє формуванню системи природничо-математичних знань, навичок і умінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності, розвитку конструктивного мислення як невід’ємної складової загальної культури людини. Розвиток в учнів умінь математичного моделювання В. В. Волошена називає важливим завданням сучасної шкільної освіти, насамперед природничо-математичної.

У той же час В. В. Волошена [19] зазначає: аналіз науково-методичної літератури та практики шкільного навчання показав, що, незважаючи на можливості широкого застосування методу математичного моделювання в процесі навчання різних навчальних предметів, формування в учнів відповідних умінь відбувається переважно на уроках математики. Це, на думку дослідниці, значно знижує дидактичну ефективність використання методу математичного моделювання в процесі навчання. Подолати таку обмеженість, стверджує В. В. Волошена [20], можна, якщо розвиток умінь математичного моделювання відбуватиметься не лише на уроках математики, а й під час вивчення всіх природничих предметів.

У висновках дисертаційного дослідження В. В. Волошеної [18] зазначено: з’ясовано, що математичне моделювання, як загальнонауковий метод дослідження, виконує пояснювальну, систематизуючу й узагальнюючу функції, сприяє відкриттю нового і за відповідності певним методичним умовам залишається доступним у застосуванні старшокласниками для розв’язання навчальних задач. Також авторка стверджує, що використання елементів математичного моделювання природних явищ є ефективним засобом активізації навчально-пізнавальної діяльності старшокласників на практичних та лабораторних заняттях. Застосування побудованих моделей

дає можливість інтенсифікувати навчання за рахунок диз'юнкції процесів засвоєння навчальної інформації та формування пізнавальних умінь у здобутті нових знань, сприяє підвищенню теоретичної підготовки учнів з математики та природничих предметів, впливає на рівень науковості набутих знань. У дисертації В. В. Волошеної [18] встановлено, що використання системи навчальних завдань з елементами математичного моделювання сприяє розвитку творчих здібностей та наукового типу мислення старшокласників, підвищує рівень їхніх теоретичних знань із математики та природничих предметів, стимулює розвиток логічного мислення та інтелектуальних умінь.

С. У. Гончаренко, Л. В. Ісичко, Є. В. Коршак [37, 25] вважають, що метод моделювання, зокрема математичного, є змістовним «ядром» методів розв'язування задач. При цьому метод моделювання, як загальнонауковий метод дослідження, є способом та засобом розв'язування фізичних задач. Фізична задача є, по суті, фізичною моделлю певного реального явища, при цьому фізичне моделювання фактично відбувається на етапі аналізу змісту задачі та усвідомлення тих фізичних законів, про які йдеться в задачі. При складанні системи рівнянь (або рівняння), що описують фізичну модель, вже відбувається математичне моделювання. Процеси побудови фізичної та математичної моделі задачі є взаємопов'язаними. Моделі і процес моделювання, стверджує Л. В. Ісичко [37], одночасно є засобом унаочнення, усвідомлення задачі і методом її постановки та розв'язання.

Аналіз проблеми встановлення міждисциплінарних інтеграційних зв'язків у викладанні математики і різних профільюючих дисциплін, як зазначають Л. Ф. Вікуліна, В. О. Артемов, О. С. Малащук, Е. В. Бахчеван [15], дозволяє стверджувати, що потенціал математики, зокрема математичного моделювання, у формуванні вмінь і навичок, необхідних в майбутній професійній діяльності, залишається повною мірою невикористаним. Це пояснюється стрімким розвитком методів моделювання,

їх проникненням в нові області господарювання і переходом в нові якості, наприклад, економіко-математичне моделювання та імітаційне.

З точки зору нашого дослідження привертає увагу позиція: доцільно включити в навчання в середній школі елементи математичного моделювання в дещо більшому обсязі та з більшим проникненням в сутність моделей, ніж це здійснюється в багатьох випадках нині. Очевидно, що це варто робити і в класах поглибленого вивчення математики і в загальноосвітній школі. Однак, в класах без поглибленого вивчення математики, фізики або інформатики звернення до математичного моделювання має бути в міру дозованим і збалансованим з інтересами і можливостями учнів [58].

Підсумовуючи, зазначимо, що українські вчені, розробляючи методи математичного моделювання та його застосування в різних галузях науки й техніки, ще наприкінці минулого століття дійшли думки про необхідність навчання математичного моделювання учнів загальноосвітніх шкіл.

Отже, метод математичного моделювання є потужним інструментом для дослідження різних процесів та систем. Приклади застосування цього методу до вирішення конкретних задач викладені в багатьох відомих монографіях та навчальних посібниках. Разом з тим, багато з них передбачають досить високий рівень математичної підготовки учнів, що часто викликає певні труднощі при вивченні матеріалу. Поняття математичної моделі та деякі загальні положення, пов'язані з цим, повинні в тій чи іншій формі ілюструватися протягом всього курсу математики, а розділи шкільних програм з різних навчальних дисциплін, що стосуються розв'язування задач на роботу, рух, відсотки, прогресії, застосування похідних та інтегралів, можуть слугувати формуванню в учнів умінь математичного моделювання.

Що ж стосується методу математичного моделювання як методу наукового дослідження і навчального пізнання, то їх систематичне та неперервне впровадження в шкільний курс математики в останні три

десятиріччя, фактично, обмежилося лише побажаннями щодо їх необхідності.

1.3. Психолого-педагогічні передумови формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи

1.3.1. Огляд сучасних досліджень психологів щодо специфіки навчання старшокласників

Психологічний аспект закономірностей мислительної діяльності, переформулювання задач, моделювання як засобу пізнання розглянуто в роботах Д. М. Богоявленського, Л. С. Виготського, П. Я. Гальперіна, Є. М. Кабанової-Меллер, Г. С. Костюка, В. А. Крутецького, О. М. Леонтьєва, Є. І. Машбиця, С. Л. Рубінштейна та інших науковців.

У старшому шкільному віці свідомо і цілеспрямовано формуються такі якості характеру, як сила волі, витримка, наполегливість, самоконтроль, обдуманість, критичність тощо. На думку Г. С. Костюка, важливим аспектом психічного розвитку людини в юнацькому періоді є інтенсивне інтелектуальне дозрівання. Збільшується обсяг уваги, здатність довго зберігати її інтенсивність і переключатися з одного предмету на інший. Увага стає більш вибірковою, залежить від спрямованості інтересів. Пам'ять старшокласників характеризується подальшим зростанням довільності та продуктивності логічного запам'ятовування. Відбувається спеціалізація пам'яті, пов'язана з провідними інтересами старшокласників та їх намірами щодо вибору майбутньої професії. Помітно зростає і продуктивність пам'яті стосовно абстрактного матеріалу. Старшокласники переконуються, що запам'ятовування не зводиться до розуміння, що потрібні спеціальні прийоми запам'ятовування, збереження та відтворення. Вони прагнуть оволодіти своєю пам'яттю, керувати нею, збільшувати її продуктивність. У ранньому юнацькому віці розвивається здатність тривало зосереджуватись на пізнавальних об'єктах, переборювати дію сильних відволікаючих

подразників, розподіляти й переключати увагу. Зростає роль післядовільної уваги, яка виявляється за умови, що учіння спонукається спеціальними інтересами.

Більшість сучасних робіт психологів, присвячених питанню розумового розвитку, спираються на ідеї Піаже. Вчений виділив п'ять стадій когнітивного розвитку, що відповідають певним віковим періодам. Старшокласники переходять до вищих рівнів абстрагуючого та узагальнюючого мислення. Учні цього віку більш усвідомлено і міцно оволодівають логічними операціями. Розрізнені знання перетворюються в систему знань, яка є основою формування наукового світогляду, зокрема, переконань. Актуальною стає потреба в науковому обґрунтуванні, пошуку теоретичних пояснень явищ дійсності, логічному доказі. Завдяки цьому процес міркування стає економнішим і продуктивнішим; формується система взаємопов'язаних узагальнених і образних операцій. Мислення стає дедуктивно-гіпотетичним завдяки перетворенню конкретних мислительних операцій на формальні, які включаються в єдину, цілісну систему. За даними Піаже, основна особливість розвитку логічного мислення (у віці від 12 до 18 років) полягає в новому орієнтуванні суб'єкта на співвідношення гіпотетичного і можливого, реально існуючого і потенційно можливого. Це дає можливість фундаментально переорієнтуватися суб'єктові в його ставленні до пізнавальних завдань. Учень прагне розкрити реальне в можливому через сукупність гіпотез, які вимагають перевірки або доведення.

Навчання старшокласників передбачає радикальну перебудову змісту і методів навчання, максимальне врахування індивідуальних особливостей та інтересів учнів, що дає простір їх власній розумовій і соціальній ініціативі. Розумовий розвиток старшокласника полягає в формуванні індивідуального стилю розумової діяльності. В навчанні формуються загальні інтелектуальні здібності, понятійне теоретичне мислення. Юнацьке мислення характеризується схильністю до теоретизування, створення абстрактних узагальнень, захоплення філософськими побудовами. Абстрактна можливість

здається старшокласнику більш цікавою і важливішою, ніж дійсність. Руйнування універсальних законів і теорій стає улюбленою розумовою грою старшокласника. Широта інтелектуальних інтересів часто пов'язана з відсутністю системи. Старшокласники починають оцінювати учбову діяльність з позиції свого майбутнього. У них змінюється ставлення до окремих предметів. Воно починає, на відміну від підліткового віку, зумовлюватися не ставленням до вчителя, а інтересами, нахилами учня, намірами отримати певну професію. Старшокласники критично ставляться до засвоєваних ними знань, до висловлювань дорослих. Вони схильні до постановки проблем, до диспутів і філософствування. Здатність до інтроспекції (самопостереження) проявляється через здатність розрізняти протиріччя між думками, словами та вчинками.

У роки навчання в старшій школі думка учня остаточно поєднується зі словом, внаслідок чого утворюється внутрішнє мовлення як основний засіб організації мислення та регуляції інших пізнавальних процесів. Інтелект стає мовленнєвим, а мовлення інтелектуалізованим. Виникає повноцінне теоретичне мислення. Інтелектуальний розвиток старшокласників можна прискорити, вдосконалюючи понятійну форму мислення, мовленнєвий інтелект та внутрішній план дій. Психологи вважають, що в сучасній школі недостатньо уваги приділяється розвитку внутрішнього плану дії (заважають калькулятори, готові програми та ін.). Необхідні спеціальні вправи, спрямовані на те, щоб одні і ті самі дії якомога частіше виконувалися не з реальними, а з уявними предметами, тобто в думках. До тих пір, поки рішення до кінця не продумано в голові, доки не складений план включених до нього дій і поки він не вивірений на логічність, до практичного здійснення рішення не варто приступати. Цими правилами варто користуватися на заняттях з усіх шкільних предметів.

В умовах переходу до ринкових відносин значення практичного інтелекту старшокласників особливо зростає. У структуру практичного інтелекту входять такі якості розуму як діловитість, економність,

обачливість, вміння швидко вирішувати задачі, що виникають. Діловитість виявляється в тому, що людина може відшукати оптимальне рішення у будь-якій складній ситуації. Економність виявляється у тому, що людина здатна знайти спосіб дії з найменшими витратами, що веде до потрібного результату. Обачливість, як якість практичного мислення, — вміння передбачити наслідки тих чи інших рішень. Вміння оперативно вирішувати задачі проявляється у кількості часу, який минає з моменту виникнення задачі до її практичного вирішення.

Складний навчальний матеріал вимагає від старшокласників досконалішої репродуктивної уяви, і водночас, у них розвивається і творча уява, що виявляється у різноманітних видах творчої діяльності. Характерним для інтелекту старшокласника є розвиток творчих здібностей, це виявляється в інтелектуальній ініціативі та створенні чогось нового. Розумовий розвиток старшокласників заключається не стільки у зміні окремих властивостей інтелекту, скільки у формуванні індивідуального стилю розумової діяльності. Стиль мислення старшокласника залежить від типу його нервової системи, який впливає і на успішність. Старшокласники з інертною нервовою системою в умовах перевантаження учбовими завданнями навчаються гірше, ніж учні з рухливим типом нервової системи. Але ці недоліки компенсуються стараннішим плануванням та контролем своєї діяльності. Індивідуальний стиль розумової діяльності старшокласника вимагає від вчителя індивідуалізації навчання та надання своєчасної допомоги у формуванні особистості.

Правильно побудоване навчання старшокласників у школі полягає в організації учбової діяльності учнів. Правильна організація учбової діяльності полягає в тому, що вона здійснюється на основі потреби самих школярів в оволодінні духовними багатствами; у постановці перед школярами учбових задач, розв'язання яких потребувало експериментування матеріалу, який засвоюється; забезпечувала б повноцінне виконання учнями дій та операцій, формування та розвиток у школярів основи теоретичної

свідомості і мислення, сприяла розвитку їх особистості. Згідно поглядів американського психолога Дж. Брунера, щоб учні могли логічно та системно мислити, засвоюючи навчальний предмет, вони повинні розуміти його структуру. На його думку, засвоєння структури предмету — це розуміння всіх основних взаємозв'язків у ньому, а тому це засвоєння буде глибоким, результатом його буде не просто використання знань завдяки сформованим умінням, а — перенесення принципів та відношень.

Для засвоєння структури навчального предмету необхідно, щоб учні засвоювали основні поняття, зв'язані між собою основні наукові поняття та на основі цього — виділені загальні, основні принципові положення, а також вироблялась здатність до перенесення знань, умінь і навичок.

Управління учбовою діяльністю повинно полягати у створенні умов для розвитку потреб, мотивів і цілей діяльності. Жорсткість управління повинна поступово зменшуватися і вести учнів до самоуправління на основі їх особистісного зростання. Головною є необхідність створювати умови для виникнення в учнів потреби у вчительських впливах та бажання виконувати їх. Л.М. Фрідман [137] зазначає, що цього можна досягти навчанням, яке буде відповідати таким вимогам: 1) учні мають знати плани, програми своєї діяльності; 2) вони повинні чітко знати, які потрібно засвоїти знання та якими уміннями і навичками володіти; 3) вивчення будь-якої теми повинно бути вмотивованим, розпочинатися з постановки проблеми; 4) роботу кожного учня потрібно контролювати, оцінювати.

Коли навчання учнів буде здійснюватися відповідно до вище описаних вимог, то учні будуть поступово переходити від неусвідомлених, некерованих форм діяльності до свідомих та самоуправлінських. Психологи вважають, що для того, щоб досягнути єдності у навчанні і вихованні, управління учінням не повинно зводитися лише до засвоєння знань, умінь та розумових дій. У цьому процесі є ще великі резерви корисних впливів на учня. Управління не є повноцінним, коли воно не стосується процесів становлення особистості. Учень не є об'єктом, активність якого повністю

визначається тим, хто навчає. Він має свій досвід, інтереси, цілі, потреби, установки, рівень домагань і інші компоненти психіки.

Особистісний компонент цього підходу означає, що центром навчання є учень зі своїми потребами, цілями, інтересами, тобто з своєю неповторністю. Всі вчительські впливи через зміст, форму, навчальні завдання стимулюють особистісну та інтелектуальну активність. І. С. Якиманська [149], розвиваючи цілісну концепцію особистісно-орієнтованого навчання, вважає, що навчання має спрямовуватися на розвиток особистості учня, який є суб'єктом пізнання. З позицій вчителя особистісно-діяльнісний підхід розуміють, як організацію і управління учбовою діяльністю учнів у контексті впливів на спрямованість інтересів, життєвих планів, ціннісних орієнтацій, інтелекту та на потребу у виробленні узагальнених способів та прийомів. З позицій учня особистісно-діяльнісний підхід полягає у створенні умов, в яких учні могли б робити власний вибір (підручник, додаткові джерела, цілі учіння тощо), для свободи своїх особистісних виявів, для самоактуалізації та особистісного зростання, для формування активності учнів, для єдності зовнішніх та внутрішніх мотивів, для прийняття навчальної задачі та переживання задоволення від правильного розв'язання її, для зняття соціальних бар'єрів.

З метою виявлення індивідуальних особливостей діяльності старшокласників у процесі навчання математики, а саме, інтелекту та мотиваційно-особистісної сфери, Г. Г. Колінець [52] радить використовувати: тест інтелекту Равена, методику визначення рівня сформованості загальних творчих здібностей, тест для визначення потреби в досягненнях, орієнтовно-діагностичну анкету навчальних інтересів, серії математичних задач дослідницького характеру, що дозволяють встановити не лише рівень знань учнів, а й ступінь сформованості мислительних операцій, творчого підходу при розв'язанні завдань, загальний рівень інтелектуального розвитку.

Підсумовуючи огляд досліджень психологів щодо специфіки навчання старшокласників, вкажемо чинники, які впливають на ефективність їхнього

навчання: зміст навчання (складність і значущість); процес навчання (методи навчання, здійснення диференціації і індивідуалізації навчання, особливості навчальних планів та програм); особистість учня (рівень розвитку довільної уваги; осмисленість сприйняття навчального матеріалу; рівень розвитку довільної логічної пам'яті; особливості розвитку мислення та уяви; мотивація навчальної діяльності; вміння вчитися); особистість вчителя (знання, професійна майстерність, здібності, спрямованість, ставлення до учнів, предмету, професії).

Дослідження Філімоною М. О. [135] психолого-педагогічних передумов навчання учнів умінням математичного моделювання показало, що для старших підлітків доцільною буде така організація навчально-виховного процесу, при якій перевага віддавалася б методам, прийомам і формам діяльності з опорою на наукові засади шкільних предметів (проведення уроку-лекції, уроку-семінару, уроку-конференції тощо, залучення до написання науково-дослідницьких робіт, виконання проектів).

В. В. Волошена [18] акцентує увагу на результатах досліджень, проведених психологами В. В. Давидовим, Л. І. Айдаровою, А. К. Марковою, Л. М. Фрідманом та іншими, які свідчать, що спеціальне цілеспрямоване навчання учнів методу моделювання є ефективним засобом, який суттєво впливає на характер їхньої навчальної діяльності: навчання стає більш усвідомленим, цілеспрямованим та продуктивним.

Підсумовуючи зазначимо, що розв'язування задачі людиною розглядається психологами як процес її послідовного переформулювання (перетворення), під час якого відбувається безперервний аналіз умов і вимог задачі через синтетичний акт їх співвіднесення один з одним. При цьому всі переформульовані задачі будуть моделями задачі вихідної. Тому переформулювання задачі вважається психологами способом моделювання.

1.3.2. Аналіз досліджень українських науковців щодо формування умінь математичного моделювання в учнів

Українськими науковцями, на попередньому етапі розвитку шкільної освіти, досить різнобічно досліджувалася проблема формування умінь математичного моделювання в учнів. Зокрема, визначено зміст навчання школярів методам математичного моделювання; виділено основні етапи побудови математичної моделі, їх операційний склад; описано функції моделювання у навчально-виховному процесі; розроблено методичні рекомендації навчання учнів математичному моделюванню; запропоновано шляхи використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання школярів математичному моделюванню.

Дієвим заходом реалізації математичного моделювання на практиці в працях науковців обґрунтовано розв'язування прикладних задач. Реалізація у навчанні прикладної спрямованості навчання математики означає: 1) створення запасу математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах; 2) формування в учнів знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей; 3) навчання учнів побудові та дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів. Прикладна спрямованість математичної освіти суттєво підвищується завдяки впровадженню комп'ютерів у навчання математики, повноцінному введенню ймовірносно-статистичної змістової лінії у шкільний курс математики [86]. Основні положення прикладної спрямованості шкільного курсу математики розкрито у роботах Г. П. Бевза, Г. М. Возняка, Л. С. Межейнікова, А. В. Прус, Л. О. Соколенко, В. О. Швеця та інших математиків-методистів. Зокрема, у їхньому доробку не тільки наукові, а й практично значущі результати дослідження проблеми прикладної спрямованості шкільних курсів алгебри і початків аналізу, стереометрії, інтегрованого шкільного курсу «Математика».

Розвиток умінь математичного моделювання в учнів під час вивчення окремих навчальних предметів розглядали Ю. К. Бабанський, В. І. Бондар, М. І. Бурда, Л. В. Занков, Л. Н. Ланда, І. Я. Лернер, О. І. Ляшенко, В. Ф. Паламарчук, О. І. Пометун, М. М. Скаткін, З. І. Слєпкань, О. М. Топузов та інші; у контексті вдосконалення процесу навчання математики засобами методу математичного моделювання – М. І. Бурда, О. І. Глобін, М. П. Лапчик, Ю. І. Мальований, Р. Ю. Маханов, В. М. Монахов, В. М. Остапенко, А. В. Скороход, А. А. Столяр, І. Ф. Тесленко, Л. П. Червочкіна, М. Й. Ядренко та інші; під час використання ІКТ для розв’язування навчальних і практичних задач – В. Ю. Биков, Ю. О. Дорошенко, А. П. Єршов, М. І. Жалдак, О. А. Кузнецов, В. В. Лапінський, В. С. Лєдньов, Г. С. Луньова, Л. Г. Лучко, Л. М. Калініна, Л. А. Карташова, Ю. І. Машбиць, В. М. Монахов, Н. В. Морзе, Ю. А. Первін, О. В. Співаковський, І. Ф. Тесленко, Т. В. Тихонова та ін.

Основні методичні положення навчання учнів математичного моделювання розкрито в роботах Г. М. Возняка [16], Б. В. Гнеденка [22], Л. Р. Калапуши [39], В. М. Монахова [83], З. І. Слєпкань [118], Л. О. Соколенко [121, 122, 123, 124], В. В. Фірсова [130], С. І. Шварцбурда [140], В. О. Швеця [141, 142, 143, 144].

В Україні найбільш глибокі і змістовні наукові дослідження в цьому напрямі проведено С. І. Великодним, Г. М. Возняком, В. В. Волошеною, О. О. Гриб`юк, Л. Р. Калапушею, Л. Л. Панченко, Л. О. Соколенко, М. О. Філімоною.

У дисертації М. О. Філімонової [132] обґрунтовано необхідність і можливість формування в учнів основної школи навичок і вмінь математичного моделювання у процесі навчання геометрії в основній школі; окреслено етапи формування в учнів навичок і вмінь математичного моделювання з урахуванням пізнавальних можливостей підлітків; визначено місце і зміст методів математичного моделювання в курсі математики 5 – 6 класів та геометрії 7 – 9 класів; розроблено методику (цілі, завдання, зміст,

організаційні форми, методи і засоби) формування в учнів умінь математичного моделювання в основній школі під час навчання геометрії.

М. О. Філімонова [131] запропонувала конкретні методичні рекомендації з формування навичок і вмінь математичного моделювання до вивчення таких змістових ліній шкільного курсу математики, як «Вирази», «Геометричні фігури», «Геометричні величини»; обґрунтувала використання у процесі формування навичок і вмінь математичного моделювання в учнів основної школи методу проектів та інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема мультимедійних презентацій та flash-роликів. Дослідниця розробила цикл вимірювальних робіт на місцевості з методичними рекомендаціями щодо їх проведення у процесі навчання математики в 5 – 6 класах та геометрії в 7 – 9 класах; запропонувала добірки прикладних задач за основними змістовими лініями курсу математики 5 – 6 класів та геометрії 7 – 9 класів.

Серед основних положень, розробленої М. О. Філімоною [134], методики формування в учнів основної школи знань, умінь та навичок математичного моделювання візьмемо до уваги наступні:

- Визначаючи цільовий компонент методики формування в учнів навичок і вмінь математичного моделювання, слід враховувати психолого-педагогічні особливості школярів кожної вікової групи, зміст математичної освіти, а також забезпечувати наступність у навчанні.
- Формування вмінь математичного моделювання має забезпечуватися через вдале використання організаційно-методичного інструментарію. Зокрема: раціональне поєднання традиційних та інноваційних методів навчання. Особливу роль при цьому необхідно відвести інтерактивним методам та методу проектів.
- Контроль результатів навчання математичного моделювання в учнів має здійснюватися на основі комплексного підходу, який полягає у виконанні школярами різних видів завдань: розв'язування прикладних

задач, виготовлення засобів навчання, виконання вимірювальних робіт на місцевості, написання дослідницьких та розрахунково-графічних робіт, створення проектів тощо.

- Однією з ефективних форм навчальної діяльності з формування в учнів основної школи навичок математичного моделювання є гурткова робота.

У дисертації В. В. Волошеної [18] визначено й теоретично обґрунтовано дидактичні умови розвитку в старшокласників умінь математичного моделювання у процесі навчання природничо-математичних предметів; з'ясовано критерії та показники сформованості вмінь математичного моделювання у старшокласників на міжпредметній основі; розроблено дидактичну модель розвитку в старшокласників умінь математичного моделювання в процесі навчання природничо-математичних предметів у вигляді курсу за вибором «Математичне моделювання як метод розв'язування прикладних проблем». Це міжпредметний курс для учнів класів з поглибленим вивченням математики.

Авторка стверджує [19], що педагогічно доцільне й грамотне впровадження методичної системи розвитку знань і вмінь математичного моделювання з урахуванням психолого-педагогічних основ навчальної діяльності та відповідно до принципу диференціації навчання забезпечує належний рівень розвитку вмінь математичного моделювання і підвищує ефективність навчання математики у школі; сприяє більш якісному та свідомому засвоєнню навчального матеріалу, надає навчально-пізнавальній діяльності дослідницького, творчого характеру, сприяє формуванню навичок і вмінь самостійної роботи у старшокласників.

В. В. Волошеною [17] визначено і теоретично обґрунтовано дидактичні умови розвитку умінь математичного моделювання у старшокласників у процесі навчання природничо-математичних предметів, розглянуто особливості планування роботи вчителя, структурування змісту навчального матеріалу, вивчення теоретичного матеріалу, пов'язаного з математичним

моделюванням, розкрито роль практичних занять у формуванні навичок і вмінь в учнів, дібрано систему задач, сформульовано вимоги до неї та описано методику її використання в процесі навчання математичного моделювання, представлено програму курсу за вибором «Математичне моделювання як метод розв'язування прикладних проблем».

В. В. Волошена [19] виокремила та обґрунтувала дидактичні умови розвитку вмінь математичного моделювання старшокласників у процесі навчання природничо-математичних предметів:

- наявність у старшокласників інтересу й потреби у свідомому оволодінні методом математичного моделювання;
- адекватна зумовленість змісту і форм організації навчання методу математичного моделювання;
- забезпечення варіативності змісту навчання в контексті розвитку вмінь математичного моделювання;
- систематичність і послідовність пізнавальної діяльності;
- наявність взаємоконтролю та самоконтролю результатів навчально-пізнавальної діяльності;
- оцінювання сформованості у старшокласників умінь математичного моделювання за результатами діяльності;
- єдності навчальної, науково-дослідної діяльності у процесі розвитку вмінь математичного моделювання.

В. В. Волошена [18] пропонує послідовність етапів у системі навчання математичного моделювання:

- Вступні лекції з математичного моделювання, на яких мотивується необхідність оволодіння методом математичного моделювання, вводяться поняття «модель», «математична модель», «моделювання», «математичне моделювання», пропонується спрощена евристична схема діяльності математичного моделювання, наводяться приклади розв'язування задач за цією схемою.

- Лекції, практичні, семінарські та лабораторні заняття (з кожного конкретного природничого предмета) з елементами математичного моделювання, тобто розглядається застосування матеріалу, що вивчається, до розв'язання конкретних практичних проблем через математичне моделювання або демонструється вирішення практичних проблем через математичне моделювання на конкретних математичних моделях.
- Виконання проєктів та робіт для Малої академії наук із суміжних предметів з елементами математичного моделювання.
- Спецкурси з математичного моделювання для учнів старших класів, вступні лекції для ознайомлення восьми- та дев'ятикласників із методом математичного моделювання, відкриті семінарські заняття тощо.

У дисертації О. О. Гриб'юк [29] зазначено: метод математичного моделювання нагадує метод від супротивного в геометрії, що дає право при формуванні знань і вмінь використання методу математичного моделювання скористатись концептуальним підходом, запропонованим О. В. Погорєловим. У розглядуваному випадку необхідними умовами вивчення та використання методу математичного моделювання є наявність: знання про досліджувані явища, що лежать в основі тієї чи іншої прикладної задачі, яку потрібно розв'язувати; набору математичних моделей, серед яких може бути придатна для розв'язування розглядуваного типу прикладної задачі на екологічні теми; умінь і навичок оперування математичними поняттями, що використовуються при побудові математичних моделей. Забезпеченню зазначених умов сприяє використання математичного моделювання як засобу формування понять (функції, рівняння та системи рівнянь, різні види многогранників, тіла обертання тощо), при цьому доцільним є, з одного боку, використання такого виду моделей (матеріальні, ідеальні) з метою формування визначених математичних понять, а з іншого боку – з метою ознайомлення з такими моделями, якими учні будуть користуватись на

наступних етапах, де передбачається розв'язування прикладних задач, зокрема задач на екологічні теми, з використанням методу математичного моделювання. О. О. Гриб'юк [27] координатний і векторний методи також відносить до методу математичного моделювання та зазначає, що забезпечується готовність старшокласників до використання методу математичного моделювання як на рівні розв'язування прикладних задач взагалі, зокрема екологічного змісту, так і для проведення моделювання як процесу дослідження певного явища навколишнього природного середовища, яке може бути не представлене у вигляді конкретної задачі. На етапі свідомого використання методу математичного моделювання авторкою пропонується старшокласникам виконувати графічно-розрахункові роботи і досліджувати явища природи, проаналізувавши попередньо теми з підручників хімії, біології, основ екології, та вказати математичні поняття, які використовувались для опису екологічних, хімічних, біологічних явищ. О. О. Гриб'юк створено системи задач на екологічні теми та запропоновано методику їх використання на уроках математики в класах хіміко-біологічного профілю. Необхідність такої системи задач обґрунтовується авторкою методичними вимогами щодо реалізації прикладної спрямованості курсу математики. У дослідженні О. О. Гриб'юк [28] розглянуто питання систематичного застосування математичного моделювання протягом усього курсу вивчення дисциплін математичного циклу. Виконання розроблених в процесі дослідження графічно-розрахункових робіт на застосування методу математичного моделювання при розв'язуванні задач екологічного змісту і дослідження учнями старшої школи різноманітних явищ природи в процесі навчання математики надали можливість авторці зробити висновок, що поряд з навчальною доцільно і можливо проводити і виховну роботу – за допомогою математичного апарату досліджувати природні явища та процеси.

У дисертації Л. Л. Панченко [95] стверджується, що не набагато краще порівняно зі школою, метод математичного моделювання знайшов своє місце в системі підготовки вчителя математики. Саме це авторка називає основною

причиною зволікання систематичного впровадження ідеї та методу математичного моделювання в шкільний курс математики. Другою, не менш важливою причиною зазначеного негативного явища, є недостатня розробленість методичного забезпечення вивчення методу математичного моделювання як в загальноосвітній школі, так і у вищих навчальних закладах, які здійснюють підготовку вчителя математики.

Однією з цілей математичної підготовки вчителя математики у вищій школі Л. Л. Панченко [96] називає навчання студентів основам математичного моделювання та підготовка їх до впровадження ідей і методу математичного моделювання в курс математики загальноосвітньої школи. На думку Л. Л. Панченко [94], для досягнення цієї цілі необхідно виконати ряд завдань, а саме:

- Ознайомити студентів з методом математичного моделювання як методом наукового дослідження і навчального пізнання.
- Домогтися усвідомлення студентами спрощеної і розширеної евристичних схем, які лежать в основі діяльності математичного моделювання [95, с. 91-92].
- Протягом усього терміну навчання в педагогічному університеті систематично вчити студентів математизувати ситуацію і складати математичні моделі, спочатку за спрощеною схемою, а на старших курсах – за розширеною.
- Підготувати студентів до ознайомлення учнів з методом математичного моделювання в шкільному курсі і навчання складанню моделей простіших задач, в тому числі прикладного і міжпредметного змісту.
- Вчити студентів та учнів використовувати інформаційно-комунікаційні технології при створенні та дослідженні математичних моделей.

Висновки до розділу 1

Метод математичного моделювання є потужним інструментом для дослідження різних сучасних процесів та систем. Приклади застосування цього методу до вирішення конкретних задач викладені в багатьох українських публікаціях та навчальних посібниках. Разом з тим, багато з цих прикладів передбачають досить високий рівень математичної підготовки учнів, що часто викликає певні труднощі у реальному процесі формування умінь математичного моделювання в учнів загальноосвітніх шкіл.

Результати дослідження TIMSS (що проводилось в Україні в 2007 та 2011 роках) а також результати дослідження PISA (2018 рік) засвідчили, що більшість українських учнів виконують завдання традиційного для нашої школи формулювання, але не спроможні розв'язати елементарні математичні завдання в контексті повсякденного життя, використовувати здобуті знання в розв'язанні нестандартних завдань, вибудовувати міркування. Проблема прикладної спрямованості навчання учнів математики залишається актуальною. Як зазначено в навчальній програмі з математики для учнів 10-11 класів, радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом вивчення всього курсу [86]. Реалізація прикладної спрямованості в процесі навчання математики означає: створення запасу математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах; формування в учнів знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей; навчання учнів побудові і дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів. Систематичне та неперервне впровадження в шкільний курс математики методу математичного моделювання в останні три десятиріччя, фактично, обмежилось лише побажаннями щодо необхідності формування необхідних компетентностей.

Необхідною умовою формування вміння у процесі навчання математики є свідоме засвоєння необхідних математичних знань, належний досвід їх застосування у процесі виконання спеціальних вправ, набутий рівень вправності у виконанні необхідних дій. Під поняттям «уміння учня» у нашому дослідженні ми розуміємо здатність учня успішно та свідомо виконувати певну діяльність, засновану на доцільному використанні ним набутих знань та досвіду їх застосування. Важливими компонентами вміння моделювати ми вважаємо попередній аналіз та переклад (інтерпретація, тлумачення) змісту, узагальнення.

На думку багатьох українських науковців у профільній школі слід запроваджувати спеціальні варіативні технології навчання, які забезпечували б реалізацію різних моделей та організаційних форм профільного навчання. Особливого значення набуває нині проблема розроблення методики навчання математики в профільній школі в цілому, а також її окремих змістових ліній та ключових тем. До таких ключових тем ми відносимо «Математичне моделювання» і погоджуємося із думкою С. І. Великоднього, що математичне моделювання, через свою універсальність, заслуговує бути представленим як самостійна змістова лінія. Навчання старшокласників передбачає максимальне врахування індивідуальних особливостей та інтересів учнів, що дає простір їх власній розумовій і соціальній ініціативі. Згідно досліджень психологів, навчання учнів старших класів має відповідати таким вимогам: 1) учні мають знати план, програму своєї діяльності; 2) вони повинні чітко знати, які потрібно засвоїти знання та якими вміннями і навичками володіти; 3) вивчення будь-якої теми повинно бути вмотивованим, розпочинатися з постановки проблеми; 4) роботу кожного учня потрібно контролювати, оцінювати.

Основні результати першого розділу дисертації відображено у роботах автора [41], [42], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [77], [78], [79], [82].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ У РОЗДІЛІ 1

1. Акуленко І. А. Формування математичних компетентностей учнів профільної школи. Вісник Черкаського університету. Черкаси, 2008. с. 3-10.
2. Баженова Е. В. Экономико-математическое моделирование экономической безопасности Украины. Диссертация на соискание научной степени кандидата экономических наук по специальности 08.03.02 – экономико-математическое моделирование. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко. Киев, 2004.
3. Бахрушин В. Є. Математичне моделювання. Запоріжжя: ГУ "ЗІДМУ", 2004.
4. Бевз Г. П. Не звужуймо поняття математичної моделі. *Математика в школі*. 2009. № 12. С. 3-7.
5. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К.: Видавництво «Відродження», 2015. 288 с.
6. Бібік Н.М. Проблема профільного навчання в педагогічній теорії і практиці. *Профільне навчання: Теорія і практика* Зб. наук. праць за матеріалами методолог. Семінару АПН України. К.: Пед.преса, 2006. С. 23-29.
7. Благодаренко Л.Ю. Теоретико-методичні засади навчання фізики в основній школі: монографія. К.: Вид-во НПУ імені МП Драгоманова., 2011. 427 с.
8. Бурда М. І. Нові підходи до організації освіти у старшій школі. Проект концепції профільного навчання у старшій школі *Директор школи, ліцею, гімназії*. 2004. №1. С. 72-77.
9. Бурда М.І. Структура і зміст профільного навчання математики. *Математика в школі*. 2007. №7. С. 3-6.
10. Варій М. Й. Загальна психологія. Навчальний посібник / 2-ге видан., випр. і доп. К.: «Центр учбової літератури», 2007. 968 с.

- 11.Ващенко Г.Г. Розвиток радянської педагогіки і школи. *Визвольний шлях*. 1965. № 3. С. 283-294; № 4. С. 379-391.; № 7-8. С. 763-774.
- 12.Великодний С. І. Математичне моделювання при розв'язуванні задач. Донецьк: ДонНУ, 2003. 137 с.
- 13.Величко С. П.,Сірик Е. П. Основні аспекти створення концептуальної моделі діяльності викладача фізики у підготовці фахівців нефізичного профілю. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка*. Серія : Педагогічна. 2017. Вип. 23. С. 125-129.
- 14.Видра О. Г. Вікова та педагогічна психологія: Навчальний посібник. К.: Центр учбової літератури, 2011. 112 с.
- 15.Вікуліна Л. Ф., Артемов В. О., Малащук О. С., Бахчеван Е. В. Математичне моделювання як засіб інтеграції навчальних курсів. *Аграрний вісник Причорномор'я*. Технічні науки. 2013. Вип. 67. С. 187-192.
- 16.Возняк Г. М., Возняк О. Г. Математика. Прикладні задачі: від теорії до практики. Тернопіль : Мандрівець, 2003. 196 с.
- 17.Волошена В. В. Математичне моделювання в процесі формування практичних компетентностей учнів. *Science and education a new dimension. Pedagogy and Psychology*. Vol. 5, 2013. С. 64–67.
- 18.Волошена В. В. Розвиток умінь математичного моделювання у старшокласників в процесі навчання природничо-математичних предметів: дис... канд. пед. наук: 13.00.09 НАПН України. Київ, 2017. 236 с.
- 19.Волошена В. В. Формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання як складової математичної компетентності. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Вип. 40 / Редкол. : І. А. Зязюн (голова) та ін.. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2014. С. 37-40.

20. Волошена В. В. Математичне моделювання в процесі розв'язування фізичних задач. *Математика в рідній школі*. 2015. № 6. С. 30-32.
21. Выготский Л. С. Развитие психических функций. М., 1960.
22. Гнеденко Б. В. Математика и математическое образование в современном мире. М. : Просвещение, 1985. 192 с.
23. Головка М. В. Наукові підходи у формуванні змісту навчання фізики й астрономії в профільній школі Педагогічна думка. Київ, 2017. С. 175-176.
24. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник. К. : Либідь, 1997. 376 с.
25. Гончаренко С. У., Коршак Є. В., Павленко А. І. та ін. Розв'язування навчальних задач з фізики: питання теорії і методики. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. 185с.
26. Горстко А. Б. «Познакомьтесь с математическим моделированием» М.: Знание, 1991.
27. Гриб'юк О. О. Математичне моделювання як засіб екологічного виховання учнів у процесі навчання математики в класах хіміко-біологічного профілю *Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт*. Вип. 27. Донецьк.: Фірма ТЕАН, 2007. С. 132-139.
28. Гриб'юк О. О. Математичне моделювання екологічних процесів у профільних класах. *Математика в школі*. 2004. №8. С. 45-48.
29. Гриб'юк О. О. Математичне моделювання як засіб екологічного виховання учнів у процесі навчання математики в класах хіміко-біологічного профілю: автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. К., 2011. 24 с.
30. Давыдов В. В., Варданыан А. Ч. Учебная деятельность и моделирование. Ереван: Луйс, 1981. 220 с.
31. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти : затв. постановою КМУ від 23 листопада 2011р. № 1392. *Комп'ютер у школі та сім'ї*. 2012. № 1. С. 33-38.

32. Державний стандарт початкової освіти URL: <http://dano.dp.ua/attachments/article/303/Державний%20стандарт%20початкової%20освіти.pdf>
33. Жабєєв Г. В. Методика використання інтернет-ресурсів у процесі профільного навчання фізики: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Київ, 2009. 19 с.
34. Закон України «Про освіту». URL: <https://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/2145-19>.
35. Зарубин В. С. Крищенко А. П. . Математическое моделирование в технике: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 496 с.
36. Зимняя И. А. Педагогическая психология. Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.
37. Ісичко Л. В. Математичне моделювання як один з етапів процесу розв'язування фізичних задач. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Педагогічні науки*. 2013. Вип. 109. С. 176-180.
38. Істер О. С. Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ : Генеза, 2015. 258 с.
39. Калапуша Л. Р. Моделювання у вивченні фізики. Київ : Радянська школа, 1982. 160 с.
40. Каменєва Т.М. Теоретичні основи навчання: Навчально-методичний посібник. К.: МНУЦ, 2018. 282 с.
41. Катеринюк Г.Д. Актуальні проблеми формування математичних компетентностей учнів. Матеріали IV Всеукраїнської конференції молодих учених і студентів. *Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень*. Вінниця, 21-22 листопада 2016. С. 229-231.
42. Катеринюк Г.Д. Здатність до математичного моделювання як ознака математичної компетентності учнів *Моделювання у навчальному процесі: матеріали Всеукр. наук.-практ. Інтернет-конф. (03-04 березня 2017 р.)* / укладач Н.А. Головіна. Луцьк: Вежа-Друк, 2017. С. 70-73.
43. Катеринюк Г.Д. Місце і роль математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів. Матеріали Всеукраїнської

науково-практичної конференції «Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи». Одеса, 15-16 вересня 2016. С. 82-84.

44. Катеринюк Г.Д. Необхідність вдосконалення умінь математичного моделювання. Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя», 15-16 травня, 2017 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. Краматорськ : ДДМА, 2017. С. 232-234.
45. Катеринюк Г.Д. Розвиток математичних компетентностей учнів у процесі формування здатності до математичного моделювання *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 47/ редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016. С. 63-67.
46. Катеринюк Г. Д. Аналіз програм з математики щодо місця і ролі математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 49 / редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2017. 186с. С.25-28.
47. Катеринюк Г. Д. Психолого-педагогічні аспекти формування умінь математичного моделювання в учнів старої школи. *Фізико-математична освіта*. Суми, 2018. Випуск 1(15). С. 52-56.
48. Катеринюк Г. Д. Теоретичні аспекти формування умінь учнів у процесі навчання математики. *Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень*: зб. наук. пр. Вип. 7 (10) / редкол.: Р.С. Гуревич (голова) [та ін.] Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2017. С.243-245.
49. Катеринюк Г. Д. Формування ключових компетентностей учнів в освітньому процесі (на прикладі навчання математики). *Професійно-*

- педагогічна компетентність: навчальний посібник / за ред. І. Л. Холковської. Вінниця: ТОВ «Нілан ЛТД», 2018. 308с. С.114-131.*
- 50.Кветний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софіна О. Ю., Шушура О. М. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1: навчальний посібник / за заг. ред. Р. Н. Кветного. Вінниця: ВНТУ, 2012. 193 с.
- 51.Кірюшкін Д. М., Полосін В. С. Методика навчання хімії. К.: Вища школа, 1974. 416 с.
- 52.Колінець Г. Г. Психологічні передумови формування математичних дослідницьких здібностей у старшокласників: дис...канд. психол. наук: 19.00.07 – педагогічна та вікова психологія. Ін-т психології ім. Г. С. Костюка АПН України. Київ, 1999. 172 с.
- 53.Колмогоров А. Н. Современная математика и математика в современной школе. *Математика в школе*. 1971. № 6. С. 2-3.
- 54.Кононова О. Застосування методу математичного моделювання під час розв'язування задач. *Математика в школі*. 2008. № 2. С. 26-29.
- 55.Концепція нової української школи. Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи. Документ ухвалений рішенням колегії МОН 27/10/2016 URL: <https://www.kmu.gov.ua/storage/app/media/reforms/ukrainska-shkola-compressed.pdf>
- 56.Концепція профільного навчання в старшій школі, затверджена рішенням колегії МОН України №10/2-2 від 25.09.2003 року (нова редакція, затверджена наказом міністра освіти і науки України, наказ № 854т від 11.09.2009 р.) / уклали: Березовська Л.Д., Бібік Н. М., Бурда М. І., Денисенко Л. І., Єгоров Г. С., Іванюк Г. І., Калініна Л. М., Кизенко В. І., Корсакова О. К., Онищук Л. А., Трубачева С. Е. URL: <http://consultant.parus.ua/?doc=021T5DE4A1>
- 57.Концепція профільного навчання в старшій школі, затверджена рішенням колегії МОН України №1456 від 21.10.2013 року.

- 58.Красницький М. П., Швець В. О. Передумови здійснення диференціації при поглибленому вивченні математики *Сучасні інформаційні технології в навчальному процесі*: Зб. наук. праць. К.: НПУ, 1997. С. 156-164.
- 59.Крилова Т. В. Початки математичного моделювання: Наукові основи навчання математики студентів технічних спеціальностей. К.: Вища школа, 1997. 278 с.
- 60.Кутішенко В. П. Вікова та педагогічна психологія. (курс лекцій). 2-ге вид.: Навч. посіб. К.: Центр учбової літератури, 2010. 128 с.
- 61.Леонтьев А. Н. Проблемы развития психики. Изд. 3-е. М., 1972.
- 62.Лов'янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: теоретичний аспект: монографія. Черкаси: Видавець Чабаненко Ю. А., 2014. 368 с.
- 63.Лов'янова І.В. Теоретико-методичні засади навчання математики у профільній школі: автореф. дис. ... доктора пед. наук. Черкаси, 2015. 42 с.
- 64.Ляшенко О. І., Мальований Ю. І. Профільне навчання: концептуальні підходи до реалізації в українській школі. *Педагогіка і психологія : наук.-теорет. та інформ. журн.* Нац. акад. пед. наук України. Київ : Педагогічна преса. 2014. № 4. С. 30–35.
- 65.Максименко С. Д., Соловієнко В. О.; відп. ред. І. В. Хронюк. Загальна психологія: навч. посіб. К. : Вид-во МАУП, 2000. 256 с.
- 66.Малафіїк І. В. Дидактика. Навчальний посібник К.: Кондор, 2009. 406 с.
- 67.Мальований Ю. І., Кизенко В. І. Курси за вибором у змісті профілю навчання. *Педагогічна і психологічна науки в Україні*. 2012. С. 218-225.
- 68.Математика. 5–9 класи. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів (автори М. І. Бурда, Б. В. Кудренко, О. Я. Білянна, А. І. Азаренкова, О. І. Буковська, Т. С. Кіндюх, О. Є. Лисенко, А. В. Милянник, Н. В. Панова, А. В. Паньков), 2017. URL: <http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html>

69. Математика. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів (укладачі: М. І. Бурда, Ю. І. Мальований, Є. П. Нелін, Д. А. Номировський, А. В. Паньков, Н. А. Тарасенкова, М. В. Чемерис, М. С. Якір), 2012. 56 с.
70. Математика. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів (автори: М. І. Бурда, А. В. Паньков, М. С. Якір, Д. А. Номировський), 2015. 56 с.
71. Математика. Навчальна програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів 1-4 кл., 2017. МОН. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-pochatkovoyi-shkoli>
72. Математичне моделювання та оптимізація об'єктів хімічної технології: метод. вказівки до виконання лабораторних робіт для студ. напряму підготовки 6.051301 «Хімічна технологія» [Електронний ресурс] / [уклад. Бойко Т. В., Фоглер О. М., Абрамова А. О.]. К: 2014. 162 с. URL: [https://kxtp.kpi.ua/common/mm\(mv_3k_xtf\).pdf](https://kxtp.kpi.ua/common/mm(mv_3k_xtf).pdf)
73. Математичне моделювання. URL: <http://manualsem.com/book/577-modelyuvannya-i-prognozuvannya-stanu-dovkillya/8-22-matematichne-modelyuvannya.html>
74. Математичне моделювання: [Електронний ресурс] // Вікіпедія – вільна енциклопедія. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Математичне_моделювання
75. Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М., 1972.
76. Матяш О., Волошук-Тихоненко Н. Методичні вказівки щодо впровадження прикладної спрямованості в процесі навчання планіметрії в основній школі. Вінниця: ВДПУ, 2010. 54 с.
77. Матяш О.І., Катеринюк Г.Д. Методические особенности системы задач для развития умений математического моделирования в учащихся профильной школы. Curriculumul școlar: provocări și oportunități de

dezvoltare materialele conferinței științifice internaționale 7–8 decembrie 2018, Chișinău P. 84-89.

78. Матяш О.І., Катеринюк Г.Д. Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2019. 270 с.
79. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Формування здатності учнів до математичного моделювання в умовах позакласної роботи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 52 / редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2018. 465 с. С.93-97.
80. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручник для 7 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Х. : Гімназія, 2015. 256 с.
81. Милерян Е. А. Психология труда и профессионального образования: избр. науч. труды. К. : Интерсервис, 2013. 290 с.
82. Михайленко Л. Ф., Катеринюк Г. Д. Развитие рефлексии учащихся в процессе формирования умений математического моделирования. *Evaluarea in sistemul educational: deziderate actuale*. Materialele conferinta stiintifica Internationala. 9-10 noiembrie 2017, Chisinau. P.215-218
83. Монахов В. М. Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград, 1995. 168 с.
84. Навчальна програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, 5-9 кл. МОН. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>
85. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. МОН. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
86. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. МОН. URL:

<https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

87. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень. МОН URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
88. Ничкало Н.Г. Розвиток професійної освіти в умовах глобалізаційних та інтеграційних процесів: монографія. К.: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. 125 с.
89. Ордановська О. І. Теорія і практика підготовки майбутніх учителів фізико-математичних дисциплін до роботи у профільній школі: технологічно-орієнтований підхід: дис... док. пед. наук: 13.00.04 / Південноукраїнський Національний педагогічний ун-т ім. К. Д. Ушинського Одеса, 2016. 500 с.
90. Орлов А. Б. Психология личности и сущности человека: парадигмы, проекции, практики. М., 1995.
91. Особенности обучения психического развития школьников 13-17 лет. М., 1988. С. 69-71.
92. Охитина Л. Т. Психологические основы урока. М.: Просвещение, 1977.
93. Павелків Р. В. Загальна психологія : підруч. [для студ. вищ. навч. закл.] К., 2002. 506 с.
94. Панченко Л. Л. Формування вмінь математичного моделювання в процесі навчання майбутніх учителів математики: дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова. К., 2006. 260 с.
95. Панченко Л. Л. Математичне моделювання як метод наукового дослідження і навчального пізнання. *Математика в школі*. 2008. № 11/12. С. 12-18.
96. Панченко Л. Л., Шаповалова Н. В. Цільові аспекти навчання студентів педагогічного університету математичного моделювання. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у*

- вищій і середній школі: Зб. наукових праць.* К.:НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. № 6. С. 101-108.
97. Педагогічна психологія. За ред. Л. М. Проколіснко і Д. Ф. Ніколенка. К.: "Вища школа", 1991.
98. Петров В. Математичне моделювання та прикладні задачі в шкільному курсі математики. *Математика в школі.* 2007. № 1. С. 28-31.
99. Практикум по возрастной и педагогической психологии. Под ред. А. И. Щербакова. М.: Просвещение, 1987.
100. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-12 класи. К.: Ірпінь: Перун, 2005. 64 с.
101. Програма для класів з поглибленим вивченням математики (8-9 класи). К.: Вікторія, 2010. 54 с.
102. Пустовит С. О. Методика формування експериментальних умінь школярів по хімії на основі проблемного навчання : автореф. дисс. на соискание учен. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 "Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)". М., 2011. 22 с.
103. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. Х.: Факт, 2005. 360 с.
104. Раков С. А. Формування математичних компетентностей вчителя математики на основі дослідницького підходу з використанням інформаційних технологій: Автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02. К., 2005. 47 с.
105. Раков С. А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти. *Математика в школі.* 2005. № 5. С. 2-7.
106. Рибалка В. В. Особистісний підхід у профільному навчанні старшокласників: автореф. дис... д-ра психол. наук: 19.00.07. Інститут педагогіки і психології професійної освіти АПН України. К., 1998. 40 с.

107. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования М.: Педагогика, 1989. 488 с.
108. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: физ.-мат. лит., 2001. 320 с.
109. Самодрин А. П. Профільне навчання в середній школі. Монографія. Кременчук: ВЦ СГЕІ за участю РВЦ ПНТУ, 2004. 384 с.
110. Самодрин А. П., Забеліна О. В., Куліш Н. М. Технологія відбору учнів до профілів навчання в умовах профільно-диференційованої школи (формування профілів в 5-11(12), 5-9 кл. гімназії, 8-11(12) кл. ліцею) Серед. загальноосвіт. проф.-диференц. шк. I-III ступенів N 3. Кременчук, 1999. 88 с.
111. Семенова І. Ю. Математичні моделі МСС, Навчальний посібник. Київ 2014.
112. Сергєєнкова О. П., Столярчук О. А., Коханова О. П., Пасєка О. В. Загальна психологія : навч. посіб. К.: Центр учб. літ-ри, 2012. 296 с.
113. Сиротюк В.Д., Засєкіна Т.М. Основи диференційованого навчання фізики у класах фізико-математичного профілю. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка*. 2007. №13. С. 58-60.
114. Сікорський П. І. Теорія і методика диференційованого навчання. Л. : Сполом, 2000. 422 с.
115. Скрипченко О. В., Долинська Л. В., Огороднійчук З. В. та ін. Загальна психологія. К.: А.П.Н., 1999. 461 с.
116. Скрипченко О. В., Лисянська Т. М., Скрипченко Л. О. Психолого-педагогічний аналіз уроку. К., 1999.
117. Скрипченко О. В., Долинська Л. В., Огороднійчук З. В. та ін. *Вікова та педагогічна психологія*. К.: Просвіта, 2001. 416 с.
118. Слепкань З. И. Методическая система реализации развивающей функции обучения математике в средней школе: Дис. в форме научного

- доклада на соискание учёной степени д-ра пед. наук: 13.00.03 /НИИ СИМО АПН СССР/ Слепкань Зинаида Ивановна. М., 1987. 47 с.
119. Слепкань З. І. Методика навчання математики. К. : Зодіак ЕКО, 2000. 512 с.
120. Слепкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. 204 с.
121. Соколенко Л. О. Збірник прикладних задач з алгебри і початків аналізу 10 - 11 кл. : навчально.-методичний посібник для вчителів і учнів серед. шк., ліцеїв та гімназій фіз.-мат. спрямування. Київ : Тираж, 1997. 127 с.
122. Соколенко Л. О. Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 К, 1997. 245 с.
123. Соколенко Л. О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник Чернігів: Сіверянська думка, 2002. 128 с.
124. Соколенко Л. О. Про необхідність створення систем прикладних задач природничого характеру для профільного навчання математики. *Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт.* Донецьк: ДонНУ, 2005. Вип. 24. С. 218-222.
125. Станжицький О. М., Таран Є. Ю., Гординський Л. Д. Основи математичного моделювання: Навчальний посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. 96 с.
126. Типовий навчальний план для 10-11 класів ЗЗСО. URL: <https://www.pedrada.com.ua/article/1653-nova-redaktsya-tipovogo-navchalnogo-planu-dlya-starsho-shkoli>
127. Уемов А. И. «Логические основы метода моделирования» М.: Просвещение, 1996.
128. Уміння: [Електронний ресурс] Вікіпедія – вільна енциклопедія. URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Уміння>

129. Федорова Н. М. Проблеми самовизначення молодії людини в умовах сучасності. *"Перспективи". Соціально-політичний журнал. філософія, політологія, соціологія.* 2015. № 1. С. 134-138.
130. Фирсов В. В., Шварцбург С. И. Состояние и перспективы факультативных занятий по математике. М. : Просвещение, 1977. 48 с.
131. Філімонова М. О. Використання flash-анімації на уроках геометрії під час розв'язування прикладних задач. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі.* 2014. Вип. 13. С. 111-116.
132. Філімонова М. О. Формування умінь математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання геометрії [Текст]: автореф. дис. канд. пед. наук : [спец.] 13.00.02 "Теорія та методика навчання" / Філімонова Марія Олександрівна ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2015. 20 с.
133. Філімонова М. О., Швець В. О. Елементи математичного моделювання у процесі вивчення геометричного матеріалу в 5-6 класах. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology.* 2013, Vol. 5. С.149-152.
134. Філімонова М. О., Швець В. О. Математичне моделювання в курсі основної школи: зміст і вимоги до підготовки учнів. *Didactics of mathematics: Problems and Investigations.* Issue # 34. 2010. С.72-76.
135. Філімонова М. О., Швець В. О. Психолого-педагогічні особливості навчання підлітків методу математичного моделювання. *Математика в школі.* 2010. №11. С. 21-25.
136. Фридман Л. М. Наглядность и моделирование в обучении. М.: Знание, 1984. 80 с.
137. Фридман Л. М., Кулагина И. Ю. Психологический справочник учителя. М.: Просвещение, 1991. 288 с.
138. Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Под ред. И. И. Ильясова, В. Я. Ляудис. Изд-во Моск. ун-та, 1981.

139. Черкасова А. М. Моделирование как метод развития познавательной самостоятельности учащихся начальной школы на уроках математики *Начальное образование: реалии и перспективы в условиях внедрения стандартов второго поколения: Материалы III Международной научно-практической конференции, Дагестанский государственный педагогический университет, 19-21 апреля 2012 г.* С.409-410.
140. Шварцбурд С. И., Ковалев М. П. Электроника помогает считать. М.: Просвещение, 1978. 96 с.
141. Швець В. О., Прус А. В. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник. Житомир: Видавництво ЖДУ імені І. Франка, 2007. 156 с.
142. Швець В.О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики *Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 32.* Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2009. С. 16-23.
143. Швець В.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії. *Математика в школі.* 2009. № 4. С. 17-24.
144. Швець В.О., Філімонова М.О. Еволюція математичного моделювання як методу пізнання і навчання. *Математика в школі.* 2010.№ 4. С.22-25.
145. Шищенко І. В. Активізація пізнавальної діяльності старшокласників на уроках математики в класах гуманітарних профілів : автореферат дис. ... канд. пед. наук. Київ, 2017. 24 с.
146. Шиян Н. І., Стрижак С. В. Поглиблення обраного профілю навчання у позаурочній діяльності загальноосвітньої школи сільської місцевості. *Науковий вісник Ужгородського національного університету.* Серія : Педагогіка. Соціальна робота. 2018. Вип. 1. С. 276-279.
147. Штофф В. А. «Моделирование и философия». М.: Наука, 1966.
148. Штофф В. А. Роль модели в познании Л.: Наука, 1973. 128 с.
149. Якиманская И. С. Разработка технологии личностно-ориентированного обучения. Педагогика. 1995, №2.

РОЗДІЛ 2

ТЕХНОЛОГІЯ ФОРМУВАННЯ УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В УЧНІВ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ

2.1. Актуальні методичні аспекти процесу формування в учнів умінь математичного моделювання

2.1.1. Огляд сучасних закордонних публікацій щодо проблеми формування та розвитку умінь математичного моделювання в учнів

Наш аналіз закордонних публікацій дозволяє стверджувати, що проблема формування та розвитку умінь математичного моделювання – одна із найбільш всесвітньо визнаних проблем у дослідженнях математичної освіти. Найбільш вагомими аргументами для такого висновку вважаємо:

- Міжнародний конгрес з математичної освіти (ICME) проводиться раз в чотири роки під егідою Міжнародної комісії з математичної освіти (ICMI). Актуальність застосувань та моделювання набула розвитку після ICME 3, який відбувся у Карлсруе (Німеччина) у 1976 році. З того часу ICMI вивчає моделювання та застосування в навчанні математики та показує міжнародний розвиток у цій галузі. Останній тринадцятий Міжнародний конгрес з математичної освіти відбувся в Гамбурзі (Німеччина) 24–31 липня 2016 року. Одна із секцій конгресу 2016 року «Математичні програми та моделювання у навчанні та вивченні математики».
- Починаючи з 1983 року (Ексетер, США), з періодичністю кожні два роки, проводиться Міжнародна конференція з викладання та вивчення математичного моделювання та застосувань (IKTMA). На конференції у формі міжнародної дискусії обговорюються стан та проблеми з навчання учнів або студентів математичному моделюванню. Тези виступів на цій

конференції регулярно публікуються у серії «Перспективи Springer» щодо викладання та навчання математичного моделювання.

- Пошукова система Springer, одного із найпрестижніших закордонних видавництв наукової літератури, видала 58613 результатів пошуку за запитом «Математичне моделювання в середній школі». Причому це публікації останніх десятиліть, які стосуються розгляду проблеми формування та розвитку умінь математичного моделювання.

Розглянемо окремі з цих публікацій останнього п'ятиріччя з метою отримання інформації про напрями актуальних досліджень та їх результати у різних країнах.

Кіпрські вчені у статті «Математика через 5E «Інструктивна модель» та математичне моделювання: Геометричні об'єкти» (Tezer, M., Cumhuri, M. 2017) [115], аналізують результати досліджень щодо впливу на математичні досягнення, навички розв'язування задач та погляди учнів за допомогою навчальної моделі 5E та методу математичного моделювання у процесі вивчення теми «Геометричні об'єкти». В результаті статистичного аналізу зроблено висновок, що навчання з допомогою 5E «Інструктивна модель» в експериментальній групі 1 та метод математичного моделювання у експериментальній групі 2, покращило академічні досягнення учнів; проте метод математичного моделювання був більш результативним для математичних досягнень та навичок розв'язування задач.

У статті «Математичне моделювання в математичній освіті: Основні поняття та підходи» (Ayhan Kürşat Erbaş, 2014) [54] автори із Туреччини стверджують, що зростаючий обсяг літератури на цю тему виявляє різноманітні підходи до математичного моделювання та пов'язаних з ними понять, поряд із різними перспективами використання математичного моделювання у навчанні та вивченні математики з точки зору визначень моделей та моделювання, теоретичної основи моделювання тощо. У статті аналізуються та обговорюються два підходи до використання моделювання в

математичній освіті, а саме моделювання як засіб навчання математиці та моделювання як мета навчання математиці.

Вплив методу математичного моделювання на рівень творчого мислення учнів досліджувався в Польщі (Alper Ciltas, 2012) [52]. Було встановлено, що метод інструкції, який застосовувався в експериментальній групі, позитивно вплинув на рівні творчого мислення учнів. Зроблено висновок, що буде корисно враховувати метод математичного моделювання при введенні нових понять у процесі навчання з урахуванням його позитивного впливу на рівень творчого мислення учнів.

У статті «Компетентність математичного моделювання у майбутніх учителів математики» (Riyan Hidayat, Zanaton H. Iksan, 2018) [105] автори з Індонезії наводять результати досліджень згідно яких – компетентність у математичному моделюванні вчителів-початківців з математики в Індонезії має невисокий рівень. Найбільші труднощі при цьому виникають у використанні графічного подання та інтерпретації і зв'язку математичного розв'язку з контекстом реального світу.

Активно досліджуються проблеми формування в учнів умінь математичного моделювання російськими ученими. У статті «Розвиток мета-предметних компетентностей учнів 7-9 класів базових шкіл шляхом впровадження міждисциплінарних математичних курсів» (Gorev, P. M., Masalimova, A. R., 2017) [71], описано один з можливих міждисциплінарних курсів для учнів 7-9 класів базової школи, що зв'язує математику з природничими науками, та з'ясовано роль таких курсів у формуванні та розвитку метапредметних компетентностей учнів.

У статті «Інтеграція математичних та природничих знань у проектну діяльність школярів» (Luneeva, O. L., Zakirova, V. G., 2017) [94], автори визначають можливості застосування проектної діяльності в інтеграції математичних та природничо-наукових дисциплін та формулюють методичні рекомендації щодо їх широкого застосування в процесі навчання. Обґрунтовується необхідність застосування технології, що базується на

проектах, у вигляді міжпредметних проектів з математики; запропоновано основні моделі інтеграції шкільних дисциплін у контексті реалізації можливостей навчання на основі проекту; проектні теми інтегрованих дисциплін, що відрізняються за часом, обсягом та кількістю; виявлено особливості їх використання в процесі вивчення математики. У статті «Викладання елементів математичного моделювання в курсі математики середньої школи» (Krutikhina, M. V., Vlasova, V. K., Galushkin, A. A., Pavlushin, A. A., 2018) [87], автори прагнуть визначити елементи математичного моделювання, які можуть і мають бути належним чином сформовані в школі. Автори пропонують скористатися системою змінених завдань, що містяться в підручниках шкільної математики. Стаття доводить необхідність ознайомлення школярів із структурою процесу математичного моделювання, особливостями моделей, метою їх використання.

У статті «Автентичний досвід математичного моделювання в середній школі: тематичне дослідження» (Spooner K., 2017) [110] проаналізовані результати дослідницького проекту, метою якого було перевірити, чи можливо на автентичному математичному моделюванні, заснованому на характеристиках та поведінці реальної групи моделювання, здійснювати навчання математики в старших класах. Дані були зібрані з навчальної діяльності новозеландських студентів. Результати продемонстрували, що справжній досвід процесу математичного моделювання можливий у середній школі.

У статті «Навчання математиці в середній школі: випадок математичного моделювання за технологією» (Ghosh JB, 2015) [70] описано дослідження, яке було проведено для визначення впливу викладання математики з використанням математичного моделювання на рівень математичної компетентності учнів старшої школи в Індії. Хоча традиційно акцент у навчанні математики в Індії робиться на розвитку процедурних навичок, дослідження показує, що використання моделювання та

застосувань, покращило розуміння учнями понять і спонукало їх до вивчення математики.

Німецькі дослідники у статті «Використання стратегії навчання читання для сприяння компетентності математичного моделювання учнів: результати квазі-експериментального контролю» (Hagena, M., Leiss, D., Schwippert, K. 2017) [75], наводять результати досліджень рівня компетентностей математичного моделювання учнів за 15-тижневим тренінгом. Результати показали, що учні, які брали участь у тренуванні читання, відчувають зростання компетенцій математичного моделювання, але це ж збільшення також може спостерігатися і в учнів, які не брали участі у тренінгу читання. Зроблено висновок, що питання про розвиток компетенцій математичного моделювання з використанням навчання читання є відкритим для обговорення.

У статті «Порівняння знань німецьких та тайваньських середніх шкіл щодо розв'язування задач з математичного моделювання, що вимагають припущень» (Chang, Y., Krawitz, J., Schukajlow, S. et al., 2020) [66] зазначається, що неадекватні припущення в задачах з моделюванням призводять до неадекватної ситуаційної моделі та до неадекватної математичної моделі проблемної ситуації. Автори стверджують, що сучасні дослідження, які порівнюють ефективність умінь моделювання між західними та незахідними учнями, не враховують відмінностей у знаннях учнів. Результати дослідження показали, що тайваньські учні старшої школи володіють значно вищими математичними знаннями, ніж німецькі учні старшої стосовно понятійних знань чи процедурних знань. Однак, якщо учні обох країн були на однаковому рівні математичних знань, то німецькі учні мали більш високу ефективність моделювання порівняно з тайваньськими учнями при розв'язуванні одних і тих же завдань моделювання. Ці результати свідчать про те, що німецька математична освіта є більш ефективною в покращенні можливостей учнів розв'язувати задачі засобами моделювання.

Тому розглянемо досвід навчання математичному моделюванню в Німеччині та результати досліджень з цієї проблеми проведених німецькими ученими.

2.1.2. Аналіз шляхів розв'язування проблеми навчання математичному моделюванню у Німеччині

В обов'язкових освітніх стандартах з математики, які були введені в Німеччині в 2003 році, математичне моделювання стало однією з шести загальних математичних компетенцій. Німецькі освітні стандарти з математики на середньому рівні 2003 року, а також освітні стандарти на початковому рівні 2004 року та для вступної кваліфікації вищої освіти 2012 року описують математичне моделювання як компетентність. За допомогою різного математичного змісту учні мають набути вміння перекладу між реальністю та математикою в обох напрямках. Наприклад, освітні стандарти для вступної кваліфікації до загальної вищої освіти відображають вимоги щодо компетентності моделювання у трьох наступних областях:

Область вимог I. Учні можуть:

- Застосувати звичні та прямо очевидні моделі;
- Перенести реальні ситуації безпосередньо в математичні моделі;
- Підтвердити математичні результати стосовно реальної ситуації.

Область вимог II. Учні можуть:

- Здійснювати процеси моделювання, що складаються з декількох етапів і з невеликими і не чітко сформульованими обмеженнями;
- Інтерпретувати результати таких процесів моделювання;
- Пристосувати математичні моделі до різних фактів.

Область вимог III. Учні можуть:

- Моделювати складні реальні ситуації, за яких слід визначати змінні та умови;
- Перевірити, порівняти та оцінити математичні моделі з урахуванням реальної ситуації (КМК 2012) [86].

У Німеччині інтерес до проблеми навчання математичному моделюванню значно зріс з 1980-х років. Були розроблені та обговорені різні програми щодо прикладної спрямованості та моделювання в навчанні математики. У 1980-х роках так звана Нова практична арифметика (*Neues Sachrechnen*) розвивалася в усіх типах шкіл (Franke та Ruwisch, 2010). Нова практична арифметика мала на меті знайти такі теми для учнів, щоб здійснювати довгострокові проекти, які могли бути відірвані від поточної математичної теми, проте здатні формувати вміння пропонувати різні розв'язання актуальних проблем. Одночасно з розвитком нової практичної арифметики термін *моделювання* став більш відомим у навчанні з математики (Greefrath 2010) [72]. Спочатку моделювання розглядалося як певний аспект прикладної математики.

У 2006 році Кайзер та Спіраман систематизували і класифікували історичні та новітні погляди на математичне моделювання в школі. Було докладено багато зусиль для активного навчання математичному моделюванню в німецькій школі, а діяльність з моделювання в навчанні математики за останні роки в Німеччині значно змінилася завдяки розвитку цифрових технологій. Багато останніх якісних та кількісних досліджень з навчання моделюванню в німецькій школі стосуються учнів; проте не менше уваги приділено діяльності та ролі вчителів математики для успішного впровадження математичного моделювання на уроках математики. У Німеччині нині активізувалися емпіричні дослідження щодо компетентностей вчителів з моделювання. Крім безпосередньо діяльності вчителя математики, у центрі уваги дослідження дизайну окремих уроків моделювання, а також усього навчального середовища моделювання.

До найавторитетніших німецьких дослідників проблеми формування та розвитку умінь математичного моделювання можна віднести Вернера Блюма та Габріеле Кайзера, які створили групу ISTRON. Ідея ISTRON полягає в тому, щоб пояснити, обґрунтувати, що з багатьох причин математична освіта має приділяти більше уваги застосуванням. Як стверджують Вернер Блюм та

Габріеле Кайзер учні мають навчитися розуміти ситуації навколишнього середовища та реального життя за допомогою математики та прагнути розвивати математичні навички і відкритість до нових ситуацій. Розуміння самої математики може формуватися у процесі використання математики для розв'язання ситуацій реального життя (Blum 1993) [59]. У видавництві Springer з 2014 року видано групою ISTRON 20 томів публікацій для підтримки вчителів у вирішенні реальних проблем навчання учнів математичному моделюванню у школі. При цьому вчителі вважаються компетентними фахівцями з викладання математики, тому рекомендації мають дорадчий характер, можуть бути модифікованими і є зручними для того, щоб вчителі могли творчо адаптувати їх до конкретної ситуації. Наприклад, перший том серії ISTRON містить результати методичного конкурсу, який проведено групою ISTRON - шукали кращий досвід вчителів у викладанні математики, який характеризувався гармонійним і ефективним поєднанням навчання математики із застосуваннями в реальному житті.

Було докладено багато зусиль для впровадження ефективного навчання математичному моделюванню в школах у німецькомовних країнах. Зокрема, видано спеціальні збірки завдань (наприклад, серія ISTRON), збірки завдань MUED (www.mued.de) [98]. Для різних цілей, наприклад на допомогу учням, були створені в різних проектах задачі з однаковим математичним змістом, задачі для моделювання різними способами тощо. Крім того, Böhm [62] у 2013 році розробив теоретичні концепції систематичного вдосконалення компетентностей учнів у математичному моделюванні.

Дослідження проблем навчання моделюванню в німецькомовних країнах перетворилися від просто якісних кейсів на дослідження до великих науково-дослідних проектів. Основна увага була зосереджена на факторах, що впливають на процеси ефективності навчання моделюванню, на аспектах, які необхідно враховувати під час навчання моделюванню на уроках

математики, та на можливих шляхах вдосконалення компетентностей учнів в математичному моделюванні. Такі дослідження можна умовно розділити на три основні групи:

- основний об'єкт дослідження – діяльність учнів різного віку в процесі навчання моделюванню;
- основний об'єкт дослідження – діяльність вчителів в процесі навчання учнів математичному моделюванню;
- основний об'єкт дослідження – ефективні умови навчання математичному моделюванню.

Розглянемо окремі результати досліджень німецьких науковців для кожної із цих груп.

Значна частка досліджень проблеми формування умінь математичного моделювання, виконаних німецькими дослідниками, стосується задач та їх систем. Результати досліджень проектування задач моделювання можна розділити на результати, що стосуються характеристик (і, отже, впливу) окремих задач, та результати, що стосуються сукупності проблем. Крім того, можна виділити результати впливу задач на пізнавальну активність учнів, а також результати впливу задач на формування компетентності моделювання в учнів. У дослідженнях Кайзера [81], які стосуються впливу навчання моделюванню, теоретично з'ясовано різні потенційні наслідки, які можуть мати проблеми моделювання. Один з потенційних наслідків - можливість розвитку *особистого сенсу* для навчання математики. В емпіричному дослідженні з 15-ма учнями 10 класу Ворхольтер проаналізував роль задач на моделювання в усвідомленні учнями значимості математичної компетентності. Взагалі у дослідженні з'явилося 12 різних особистих смислів, які були згруповані у п'ять напрямів: (1) як інструмент для життя, (2) для отримання соціальної оцінки, (3) для отримання задоволення, (4) розгляд уроків математики та (5) щодо математичних знань. Найважливішими особистими сенсами для учнів виявилися: математика як інструмент для життя та математика для отримання задоволення. Однак багатьом учням було

важко усвідомити ці особисті сенси, тобто їх не переконали раніше і вони самі не розуміли, як вони можуть використовувати математику. Уроки моделювання, як засвідчили результати досліджень, допомогли більшості таких учнів усвідомлювати ці два важливі особистісні сенси. Однак не лише контекст завдань моделювання допоміг учням усвідомити свій особистий сенс; інші характеристики моделювання завдань (наприклад, відкритість і можливість розробити власний підхід), а також організація діяльності (наприклад, групова робота) допомогла учням досягти власного особистого сенсу (Vorhölter 2009) [117].

Кайзер (1995) [81] також показав, що розв'язування проблем навчання моделюванню також має позитивний вплив на розвиток *мотивації* учнів до навчання математики в цілому. Ця гіпотеза була доведена в проекті STRATUM. В рамках проекту 959 учнів-учасників та 54 викладачі-учасники були розділені на дві експериментальні групи та одну контрольну групу. Мотивацію учнів вимірювали до та після навчання моделюванню. Результати дослідження частково підтвердили гіпотезу Кайзера: мотивація учнів різко не зросла, однак зниження мотивації навчання було заблокованим в експериментальних групах (Maas та Mischo 2012) [97]. Дослідження Креклера 2015 р. певним чином підтвердили цей результат: більшість із 332 учнів, які брали участь у дослідженні, хотіли частіше працювати з моделюванням під час уроків математики, незалежно від статі, математичної компетентності та теми, яка вивчалася. Крім того, навчальний блок на чотири уроки навчання математичному моделюванню, в рамках проекту Креклера, призвів до стійкого підвищення компетентності в моделюванні для учнів.

Отже, за останні роки в Німеччині було проведено низку досліджень з метою визначення оптимального розвитку компетентностей учнів з моделювання. Проекти були зосереджені на різних групах учнів, а також на різних видах діяльності. У всіх цих дослідженнях комплексно аналізувалися різні аспекти проблеми навчання моделюванню. Зокрема, одним з навчальних середовищ, розроблених спеціально для початківців у

моделюванні, досліджувалося комп'ютерне навчальне середовище КОММА. Навчальне середовище КОММА включає в себе чотири варіанти прикладів евристичної діяльності. У цих прикладах два вигадані персонажі вирішують проблему моделювання та пояснюють свої ідеї, евристичні стратегії та евристичні інструменти. Усі приклади були структуровані за допомогою 3-ступінчатого циклу моделювання. Компетентність моделювання у 316 учнів восьмого класу була перевірена до експериментального навчання, відразу після нього, і через чотири місяці після проведення експерименту. Результати досліджень засвідчили значне підвищення компетентності моделювання відразу після впровадження навчального середовища та трохи менший довгостроковий ефект. Загалом, потенціал прикладів, які допомагають учням самостійно працювати над моделюванням проблем, був очевидним.

В іншому проекті було з'ясовано, що на відміну від консультаційної підтримки вчителя, приклади можуть надати рішення лише на стратегічному рівні (Troppe et al. 2015) [116]. Проект ERMO також був зосереджений на першому етапі навчання учнів моделюванню. 15 класів дев'ятого класу, які взяли участь в експерименті, були розділені на дві групи. Кожній групі було запропоновано п'ять задач на моделювання, що мали однаковий контекст, але організація діяльності учнів над проблемами відрізнялася. Учні однієї із груп мали працювати лише на одному кроці циклу моделювання, учні іншої групи повинні були пройти через весь процес моделювання кожної проблеми. Компетентність учнів з моделювання була перевірена до та після експерименту, а також через півроку після експериментального навчання. Результати дозволили виокремити сильні та слабкі сторони обох підходів, хоча обидва підходи виявилися досить ефективними у формуванні компетентностей учнів з моделювання. Результати експерименту підтвердили, що другий підхід виявився більш ефективним для учнів із слабшими показниками навчальних досягнень з математики (Кайзер та Бренд 2015) [82].

У рамках проекту MultiMa було випробувано вплив на формування компетентності моделювання вимоги кількох способів розв'язань для однієї задачі моделювання. Порівняли дві групи із 144 дев'ятикласників у шести класах. Одну з груп попросили попрацювати над задачею, не роблячи припущень щодо інших способів для вирішення проблеми. В іншій групі було запропоновано обов'язково розглядати різні можливі способи розв'язування задачі, і учні повинні були розглянути принаймні два різних. За результатами цього дослідження пояснено методичну рекомендацію: потрібна велика різноманітність контекстів, а також математичних областей для того, щоб направити учнів на перенесення стратегій моделювання з одного завдання на інше (Blum 2011, 2015) [57], [58]. У цілому рекомендується наростання складності завдань у рамках спеціально побудованої системи задач моделювання (Maas 2006; Blum 2011) [95], [57].

Результати раннього дослідження Маасса 2006 р. показали, що «компетенції моделювання включають більше компетенцій, ніж просто проходження через етапи процесу моделювання» [95, с. 139]. Таким чином, одним із важливих аспектів у навчанні моделюванню є зв'язок між компетентністю моделювання, з одного боку, та різними видами інших компетентностей учня, з іншого боку. Успішна діяльність та орієнтація на цілі моделювання вимагає сформованості інших різних компетентностей, таких як математична компетентність, компетентність читання та метакогнітивні компетентності. Вплив цих компетентностей на ефективність процесу моделювання досліджено у кількох німецьких проектах. Крім того, було проаналізовано взаємозв'язок між переконаннями та здібностями різних учнів та їхніми можливостями у моделюванні. Математична компетентність, за результатами досліджень, визнана як базова компетентність у роботі над математичними моделями. У різних якісних та кількісних дослідженнях було підтверджено сильний зв'язок між цією компетентністю та компетентністю моделювання в цілому. Важливі результати щодо цього можна знайти в головному дослідженні проекту DISUM (Leiß et al. 2010) [89].

Також у рамках головного дослідження проекту DISUM було виявлено ще один важливий фактор, який впливає на ефективність навчання математичному моделюванню - *компетентність читання*, тобто розуміння текстів, а також розуміння інформації з таблиць та графіків. Для аналізу зв'язку між компетентністю читання та компетенцією моделювання були використані два різні види тестів на читання: загальний тест читання та тест з математичного читання. Результати показали, що обидва тести читання вимірюють один і той же теоретичний конструкт. Крім того, на основі результатів дослідження компетентність з математичного читання була визначена як необхідна умова успішної роботи над задачами з моделювання (Leiß et al. 2010) [89].

Метакогнітивні компетентності були визначені як третій впливовий фактор на вирішення проблем навчання учнів моделюванню. Як на німецькому, так і на міжнародному рівні дослідження метапізнання еволюціонували у навчальній психології, загальноосвітній освіті та математичній освіті. При цьому декларативне метапізнання відрізняється від процесуального метапізнання, яке часто називають метакогнітивними стратегіями (Vorhölter and Kaiser 2016) [118]. Якісні та кількісні дослідження в останні десятиліття були зосереджені в Німеччині на обох аспектах. Наприклад, у якісному дослідженні Мааß [95] виявив взаємозв'язок між декларативними мета-знаннями про процес моделювання та завданнями моделювання, з одного боку, та компетентністю моделювання, з іншого. Крім того, було визначено окремі недоліки в моделюванні, які відповідають певним помилкам у мета-знаннях [95]. У тематичному дослідженні з 35 студентами Борромео Феррі [63], посилаючись на роботу Бертоне [65], визначив *стиль математичного мислення* як ще один чинник, що значно впливає на ефективність учнів під час роботи над моделюванням проблем. Учні з аналітичним стилем мислення, як правило, дуже швидко переходять з реальної ситуації в математику і зосереджуються на математичних аспектах. Учні зі стилем візуального мислення навпаки зосереджуються на реальній

проблемі, вербалізуючи свою ментальну модель та будуючи реальну модель (Borromeo Ferri 2010) [63].

Всі ці дослідження показали, що загальні компетентності та індивідуальні характеристики учнів мають значний вплив на ефективність їхньої роботи у процесі математичного моделювання. Для ефективного формування компетентності моделювання в учнів важливо дбати про паралельний розвиток математичних компетентностей та відповідних переконань та поглядів. Враховуючи надзвичайну стабільність переконань і поглядів, це вимагає тривалих процесів навчання (Blum 2015) [58, с. 86].

Тепер проаналізуємо результати досліджень німецьких науковців щодо діяльності вчителів у процесі навчання учнів математичному моделюванню.

У досягненні цілей навчання учнів математичному моделюванню вчителі визнаються одним із фокусних центрів. Вони не лише мають бути переконані у корисності математичного моделювання для учнів, а й мають навчитися долати підозрілі перешкоди. *Підозрілі перешкоди* - одна з причин для вчителів математики не застосовувати математичне моделювання на своїх уроках. Блум [56] поділив ці перешкоди на чотири категорії: організаційні перешкоди (особливо дефіцит часу), перешкоди, пов'язані з учнями (моделювання визнається важким для учнів), перешкоди, пов'язані з вчителями (недостатньо часу для адаптації завдань та їх підготовки, відсутність необхідних навичок) та перешкоди, пов'язані з матеріалами (знання лише окремих аспектів моделювання, придатних для уроків математики).

У 2008 році Шмідт [106] провів дослідження з 101 учителем початкової та середньої школи, щоб з'ясувати, чи можна перешкоди, які категоризував Блум, ідентифікувати емпірично (чи змінилися вони з плином часу?). Вчителі вказали три основні перешкоди: нестача часу, складність оцінювання ефективності навчання моделюванню та недостатність методичних матеріалів. Зокрема, вказувався брак матеріалів для розвитку умінь математичного моделювання в учнів 8–13 класів. Автори дослідження також

вказали, що спеціальне навчання вчителів, яке відбулося в рамках дослідження, не дозволило усунути вказані перешкоди.

Німецькі науковці з'ясували, що не тільки пріоритети вчителів, які стосуються моделювання, але й їхня поведінка на уроках впливає на результати учнів у навчанні моделюванню. Їх *втручання* може перешкоджати, або сприяти ефективності самостійної роботи учнів у процесі моделювання. У Німеччині досліджувалася відмінність між різними видами втручань – Zech's [122] систематика допомоги. Цей метод диференціює мотиваційну, зворотній зв'язок, загально-стратегічну, контент-орієнтовану стратегічну та контент-орієнтовану допомогу. Спираючись на категоризацію Зеха, Лейса створила описовий аналіз адаптивного втручання вчителя у процес моделювання. Проаналізовані втручання були класифіковані за тригером, рівнем та наміром [88]. Серед основних результатів дослідження Лейси було показано, що стратегічні втручання були включені до репертуару інтервенцій спостережуваних вчителів лише дуже незначно, і що вчителі часто обирали непрямі поради в ситуаціях, коли учні були за один крок від того, щоб подолати труднощі. Однак подальші дослідження (наприклад, Link 2011 [93]; Stender та Kaiser 2015 [112]) не підтвердили цих результатів. На відміну від цих досліджень, було підтверджено, що конкретні стратегічні втручання також можуть бути адаптивними та вести до метакогнітивної діяльності.

Німецькі дослідники зазначають, що емпіричних знань про ефективність окремих втручань вчителів у процесі навчання дуже мало. Стендер [111] дослідив, які види методів і прийомів втручання вчителів є адекватними для ефективності діяльності самостійних учнів у процесі навчання моделюванню. У рамках днів моделювання в Гамбурзі проаналізовано втручання 10 майбутніх учителів, які супроводжували навчання 45 учнів. Учні працювали над складною, реалістичною, автентичною проблемою моделювання протягом трьох днів. Майбутні вчителі до початку навчання учнів пройшли спеціальну підготовку, щоб

заздалегідь підтримати учнів лише шляхом стратегічних втручань. Відповідні робочі процеси повністю були зняті на відео. На основі аналізу 238 відзнятих втручань, Стендер та Кайзер наголосили на значному потенціалі втручань, які впроваджуються спеціально.

Інший вид підтримки вчителів - це *зворотній зв'язок* з учнями. Дослідження німецьких учених показали, що словесний зворотній зв'язок у поєднанні з різними формами оцінювання, домінував як найпоширеніша форма зворотного зв'язку. Форми самооцінки або експертної оцінки були рідкісними, але вони зустрічалися у вчителів, які були добре знайомі з діагностичними методиками результатів навчання.

Нашу увагу привернув спеціальний спосіб навчання моделюванню, який був ініційований декількома університетами в різних частинах Німеччини: тижні моделювання або дні моделювання. Тижні або дні моделювання спочатку розроблялися в Кайзерслаутернському університеті робочою групою Гельмута Нойнзерта, впродовж більш ніж десятиліття проводилися в Гамбургському університеті і були прийняті такими університетами, як Дармштадт, Мюнхен та Кассель. Під час моделювання днів та тижнів учням різного віку (залежно від спеціального проекту) пропонували працювати над дуже складним завданням кілька днів поспіль. Тижні моделювання зазвичай тривали один тиждень і проходили поза школою (як правило, в університеті чи молодіжному гуртожитку), тоді як дні моделювання тривали два-три дні та проходили у школі. Основною особливістю цих проектів було використання моделювання для розв'язування складних проблем, які часто виникають у житті. Наприклад: ціни на Інтернет-бронювання авіаквитків; оптимальний автоматизований полив саду; хлорування басейну; оптимальний розподіл автобусних зупинок. Учням, які стали учасниками проекту, потрібно було вибрати одне із запропонованих завдань. Після цього вони були розділені на різні групи відповідно до їх інтересів. Основною метою проведення тижнів і днів моделювання було створення для учнів кращих умов для формування умінь

математичного моделювання. Діяльність учнів супроводжували репетитори. У деяких випадках викладачі університету контролювали діяльність учнів, а в інших випадках, таких як у Гамбурзі та Касселі, студенти університету виконували функції репетиторів. Досягнені результати тижнів і днів моделювання виявилися позитивними для формування умінь математичного моделювання, а також результати навчання засвідчили підвищення рівня у різних інших видах компетентностей (Kaiser та Schwarz, 2010 [83]; Kaiser et al. 2013 [84] ; Vorhölter et al. 2014 [119]). Варто зазначити, що математичне моделювання не є обов'язковим змістом у програмах навчання майбутніх учителів математики в університетах німецькомовних країн. Лише в деяких університетах (наприклад, у Гамбурзі та Касселі) регулярно пропонуються такі курси за вибором. Часто ці курси пов'язані з такими практиками, як вищезгадані дні моделювання.

Борромео Феррі та Блюм [64] виділяють п'ять різних категорій *компетентностей вчителів з моделювання*:

- Теоретично орієнтована компетентність (необхідні знання про теоретичні аспекти моделювання, такі як знання про цикли моделювання, цілі та перспективи моделювання, типи завдань моделювання та теоретичні знання щодо компетенцій моделювання).
- Компетентність, пов'язана з завданнями (вміння розв'язувати задачу моделювання, аналізувати можливі бар'єри та необхідні компетенції та самостійно створювати завдання моделювання).
- Навчальна компетентність (містить здібності до мікро- та макроскелінгу, такі як вміння планувати та проводити уроки моделювання та знання відповідних адаптивних втручань, щоб дати можливість учням працювати як можна більш самостійно).
- Діагностична компетентність (містить здатність визначати фази в процесах моделювання учнів та діагностувати труднощі учнів під

час таких процесів, з метою підтримки учнів під час їх роботи та вибору проблем моделювання).

- Компетентність з оцінювання (містить здатність будувати відповідні завдання та тести для оцінювання компетентності учнів з моделювання).

Німецькі дослідники проблем навчання моделюванню (Maab та Gurlitt 2011) [96] прийшли до висновку, що необхідні спеціальні курси для практикуючих вчителів, бо вчителі математики часто не знають, як реалізувати математичне моделювання у класі. Одним із прикладів такого курсу є курс підготовки вчителів, розроблений в рамках міжнародного проекту LEMA (Навчання та освіта за допомогою моделювання та застосувань). Аналіз результатів упровадження такого курсу показав, що курс мав сильний позитивний вплив на методичні знання та вміння вчителів з точки зору моделювання.

Отже, вчителі відіграють важливу роль в успішному навчанні математичному моделюванню на уроках математики та у формуванні компетентностей учнів з моделювання. Також важливу роль відіграє навчальне середовище класу (яке, безумовно, створюється і вчителями). Крім безпосередньо методичної діяльності вчителя математики, у фокусі досліджень в Німеччині були також розробки структури уроків моделювання, а також всього тематичного планування з навчання учнів моделюванню. Досліджувався також *вплив на навчання математичному моделюванню кількості учнів у класів*. Результати показали, що компетентність з моделювання може бути розвинута в менших класах (16 учнів) значно краще, ніж у класах стандартних німецьких розмірів (26 учнів). Проте в обох типах експериментальних класів компетентності з моделювання учнів зросли під час навчального циклу, який складався з 10 послідовних уроків навчання моделюванню (Schukajlow та Blum 2011) [107].

Методична діяльність учителя в навчанні математики (в тому числі навчання моделюванню) змінилася за останні роки в основному через

активний розвиток і впровадження цифрових технологій. Особливо при розв'язуванні прикладних задач комп'ютер або адекватно обладнаний графічний калькулятор можуть бути корисним інструментом для підтримки вчителів та учнів. Наприклад, Henn [77] запропонував застосувати цифрові інструменти, наприклад, зошити з програмним забезпеченням алгебри, оскільки це дозволяє запровадити складні програми та моделювання у щоденне навчання.

Однією з можливостей використання цифрових технологій є експерименти та дослідження (див. Hischer 2002) [78]. Наприклад, реальна ситуація може бути перенесена на геометричну модель, на ній можна експериментувати за допомогою програмного забезпечення динамічної геометрії або аналізу електронних таблиць. Дуже схоже на експериментальне моделювання. Моделювання під час експериментів покликане забезпечити уявлення про реальну систему, представлену в моделі (Greefrath і Weigand 2012) [73]. Прикладні математичні симуляції, виконані комп'ютером, можна розуміти як частину циклу моделювання, в якому чисельну модель, розроблену з математичної моделі, перевіряють та затверджують, порівнюючи її з результатами вимірювань (Sonar 2001) [109]. Поширеним використанням цифрових інструментів, особливо комп'ютерних алгебраїчних систем, є обчислення чи оцінка чисельних чи алгебраїчних розв'язків (Hischer 2002) [78]. Без використання комп'ютера учні не змогли б зробити ці оцінки, принаймні в розумні часові рамки. Крім того, цифрові інструменти можуть виконувати візуалізацію предмета, який досліджується (Barzel et al. 2005 [55]; Hischer 2002 [78]; Weigand and Weth 2002 [121]). Цифрові інструменти також відіграють корисну роль у контролі та перевірці умінь математичного моделювання (Barzel et al. 2005) [55]. Якщо для навчання математики передбачені комп'ютери з підключенням до Інтернету, їх можна використовувати для проведення досліджень (Barzel et al. 2005) [55], наприклад, у контексті програм.

Німецькі вчені зазначають, що нині існує мало емпірично встановлених знань про можливості навчання моделюванню та рекомендації щодо роботи з цифровими інструментами при викладанні математики. Були проведені лише окремі дослідження, а не масштабні експерименти впровадження комп'ютерних технологій у процес навчання математичному моделюванню. Тематичні дослідження Greefrath et al. [74] та Geiger [69] зазначають, що цифрові інструменти можуть бути корисними для кожного кроку процесу моделювання. Особливо це стосується інтерпретації та валідації. Відкриті дослідницькі питання можна знайти у працях Niss et al. [103]: Як цифрові інструменти мають використовуватися в різних класах для підтримки процесів моделювання? Який вплив цифрових інструментів на спектр проблем моделювання, над якими потрібно працювати? Як на культуру навчання впливає використання цифрових технологій? Коли цифрові інструменти покращують чи перешкоджають можливостям навчання в процесі моделювання?

Отже, моделювання та застосування були і залишаються важливою складовою німецьких досліджень математичної освіти. У минулому столітті німецька дискусія про моделювання зосереджувалась на концептуальних аспектах та на прикладах моделювання проблем. Це було важливим кроком у з'ясуванні змісту поняття *математичної моделі в школі*. Важливим кроком для зближення педагогічних досліджень та шкільної практики було створення німецькомовної групи ISTRON 25 років тому. В останні десятиліття почалася нова розробка інтеграції програм та моделювання у всіх типах німецьких шкіл:

- Обговорюється багаторічна традиція застосувань у шкільній математиці в німецькомовних країнах.
- Описано підходи до інтеграції проблем моделювання в шкільну практику.
- Описано інтеграцію моделювання як компетентності в сучасні освітні стандарти.

- Описано вплив цифрових інструментів на шкільну практику та дослідницькі проекти у навчанні математичному моделюванню.
- Розглядаються нові емпіричні дослідницькі проекти з математичного моделювання в німецькомовних країнах щодо ролі учнів та вчителів.

2.1.3. Проектування актуальних завдань та етапів формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання

На основі зробленого вище аналізу навчання математичному моделюванню у Німеччині, вкажемо актуальні нині і для України проблеми та завдання формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання:

- ✓ розуміння самої математики може формуватися у процесі використання математики;
- ✓ моделювання визнається важким для учнів;
- ✓ діяльність з моделювання в навчанні математики може бути значно змінена завдяки розвитку цифрових технологій;
- ✓ діяльність та роль вчителів математики для успішного впровадження математичного моделювання на уроках математики є важливою;
- ✓ у центрі уваги мають бути дослідження дизайну окремих уроків моделювання, а також усього навчального середовища моделювання;
- ✓ важливим фактором, який впливає на ефективність навчання математичному моделюванню, є розуміння текстів, а також розуміння інформації з таблиць та графіків; компетентність з математичного читання є необхідною умовою успішної роботи над задачами із моделюванням;

- ✓ значно впливає на ефективність учнів під час роботи над моделюванням проблем - *стиль математичного мислення*;
- ✓ нестача часу, складність оцінювання ефективності навчання моделюванню та недостатність методичних матеріалів (особливо для учнів старших класів) – основні проблеми у процесі формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання;
- ✓ важливо дбати про паралельний розвиток математичних компетентностей та відповідних переконань та поглядів учнів;
- ✓ одним із важливих аспектів у навчанні моделюванню є зв'язок між компетентністю моделювання, з одного боку, та різними видами інших компетентностей учня, з іншого боку;
- ✓ нині існує мало емпірично встановлених знань про можливості навчання моделюванню та рекомендації щодо роботи з цифровими інструментами при викладанні математики.
- ✓ необхідні спеціальні курси для практикуючих вчителів.

На основі аналізу сучасних українських програм з математики та наших експериментальних досліджень вкажемо основні етапи формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання:

Етап пропедевтики

Мета: формування початкових уявлень учнів про математичне моделювання.

Завдання:

- сприяння виробленню вмінь в учнів виділяти форму і розміри як основні властивості геометричних фігур;
- ознайомлення з текстовими задачами та ілюстрація практичного застосування математичних знань;
- формування в учнів первинних умінь використовувати математичні моделі під час розв'язування текстових задач;

Результати навчання:

- ✓ *Розв'язує сюжетні задачі з реальними даними щодо: використання природних ресурсів рідного краю; безпеки руху; знаходження*

периметрів та площ земельних ділянок, підлоги класної кімнати, об'єму об'єктів, що мають форму прямокутного паралелепіпеда; розрахунку сімейного бюджету, можливості здійснення масштабних покупок; розрахунків, пов'язаних із календарем і годинником тощо.

✓ *Розв'язує сюжетні задачі на:* розрахунок відсоткового відношення різних величин (наприклад, працездатного населення регіону, калорій тощо); прийняття рішень у сфері фінансових операцій, розрахунок власних та родинних фінансів, комунальних платежів; вміння розпоряджатись власними коштами, в простих ситуаціях оцінювати очікувані та реальні витрати тощо

Етап базової школи

Мета: формування знань і вмінь учнів щодо математичного моделювання та його застосувань.

Завдання:

- ознайомлення з методами математики як ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишнього світу;
- забезпечення оволодіння учнями математичною мовою, розуміння ними математичних моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ;
- формування здатності застосовувати математичні методи у процесі розв'язування практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;
- формування системи понять, умінь для характеристики залежностей між величинами, опису явищ і процесів;
- забезпечення оволодіння учнями уміннями моделювати за допомогою рівнянь реальні ситуації, пояснювати здобуті результати;
- формування в учнів знань про геометричні фігури на площині, їх властивості, а також умінь застосовувати здобуті знання у навчальних і життєвих ситуаціях;
- формування в учнів уявлення про найпростіші геометричні фігури в

просторі та їх властивості, а також первинних умінь застосовувати їх у навчальних і життєвих ситуаціях;

- формування в учнів знань про основні геометричні величини (довжину, площу, об'єм, міру кута), а також уміння застосовувати здобуті знання у навчальних і життєвих ситуаціях.

Результати навчання:

✓ *Складає та розв'язує задачі на:* пряму пропорційність на основі життєвого досвіду; побудову графіків при моделюванні реальних процесів з використанням лінійної функції тощо.

✓ *Розв'язує сюжетні задачі:* на рух з точки зору його безпеки; на розпорядження власними та родинними фінансами; фінансового змісту крізь призму історичних подій тощо.

✓ *Розв'язує вправи, що передбачають:* складання і розв'язування квадратних рівнянь та рівнянь, що зводяться до них, як математичних моделей прикладних задач.

✓ *Розв'язує сюжетні задачі на:* використання взаємозв'язків економічних явищ; види та розрахунки податків, платежів; рух; продуктивність праці; вартість товару; сумісну роботу; суміші та сплави тощо.

✓ *Розв'язує вправи, що передбачають:* складання і розв'язування систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей прикладних задач.

✓ *Розв'язує сюжетні задачі на:* розрахунок та аналіз фінансової спроможності родини; розрахунок обсягу сплачених податків; прийняття рішень стосовно особистих та колективних фінансових питань тощо.

✓ *Розв'язує задачі практичного змісту на:* знаходження відстані до недоступної точки; встановлення рівновіддаленості об'єктів на поверхні Землі; використання жорсткості трикутника в будівництві тощо.

✓ *Розв'язує задачі практичного змісту на:* визначення відстані до недоступної точки; висоти предмета; знаходження кутів (кута підйому дороги, відкосу, кута, під яким видно деякий предмет) тощо.

✓ *Розв'язує задачі на:* знаходження невідомих елементів реальних об'єктів; знаходження площ реальних об'єктів, покриття площини правильними многокутниками тощо.

Етап профільної школи

Мета: формування компетентностей учнів у математичному моделюванні та оволодінні апаратом математичного моделювання при розв'язуванні прикладних задач.

Завдання:

- створення запасу математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах;
- формування в учнів знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей;
- навчання учнів побудові і дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів.

Результати навчання:

- ✓ *Моделює* реальні процеси за допомогою степеневих функцій.
- ✓ *Застосовує* тригонометричні функції до опису реальних процесів.
- ✓ *Розуміє* значення поняття похідної для опису реальних процесів, зокрема механічного руху.
- ✓ *Розв'язує* нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.
- ✓ *Застосовує* показникову та логарифмічну функції до опису реальних процесів.
- ✓ *Застосовує* ймовірнісні характеристики навколишніх явищ для прийняття рішень.
- ✓ *Застосовує* відношення паралельності між прямими і площинами у просторі до опису відношень між об'єктами навколишнього світу.
- ✓ *Застосовує* відношення між прямими і площинами у просторі, відстані і кути у просторі до опису об'єктів навколишнього світу.

✓ *Розв'язує* задачі на знаходження відстаней та кутів в просторі, зокрема практичного місту.

✓ *Застосовує* вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин.

✓ *Розв'язує* задачі на обчислення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл, зокрема прикладного змісту.

Українські дослідники розглядаючи зміст поняття «математична компетентність» найчастіше посилаються на означення Сергія Анатолійовича Ракова [4, с. 15]: Математична компетентність – це вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень. У цьому визначенні ключовими є поняття: математичне моделювання та математична модель. С. А. Раков наводить таку класифікацію математичних компетентностей: процедурна, логічна, технологічна, дослідницька та методологічна компетентності.

Показниками *процедурної компетентності* учнів у процесі формування в учнів знань та вмінь математичного моделювання найчастіше виступають такі уміння: уміння працювати з формулами (розуміти змістове значення кожного елемента формули, знаходити їх числові значення при заданих значеннях змінних, виражати одну змінну через інші і т. п.); уміння розв'язувати типові математичні задачі, що передбачає використання на практиці алгоритму розв'язування типових задач; уміння відтворювати контекст задач, які виникають на практиці і зводяться до типових, уміння систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових; уміння розпізнавати типову задачу або зводити задачу до типової; уміння використовувати різні інформаційні джерела (підручники, довідники, інтернет-ресурси) для пошуку процедур розв'язування типових задач.

Очевидно, що процедурна компетентність є базисною. На початковому етапі роботи з задачами певного типу ми використовуємо типові задачі, що

розв'язуються способом побудови однакової математичної моделі. У нашій статті [21, с. 243] наведена серія типових текстових задач, в процесі розв'язування яких одержуємо однаково математичну модель. Це дає учням змогу навчитися систематизувати типові задачі, розпізнавати їх або зводити задачу до типової на основі готової математичної моделі. При створенні моделей типових математичних задач потрібно спонукати учнів до використання різних інформаційних джерел для пошуку процедур їх розв'язування, тим самим і формувати процедурну компетентність. Так, наприклад, при розв'язуванні прикладних задач на тему «Розв'язування трикутників», слід спонукати учнів для їх самостійного відшукування в довіднику «Таблиця Брадіса» значень синусів і косинусів тригонометричних кутів, а не наводити ці дані в умові задачі.

Технологічна компетентність передбачає: здатність володіти технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення, зокрема наближені; здатність використовувати математичну та логічну символіку на практиці при оформленні математичних текстів; володіння сучасними математичними пакетами, що реалізується через: розв'язування задач з використанням різних типів математичного програмного забезпечення; оцінювання похибки при використанні наближених обчислень; побудова та дослідження комп'ютерних моделей задачі з метою її евристичного, наближеного або точного розв'язку.

На розвиток технологічної компетентності можна вплинути вже на першому етапі роботи з текстовими задачами при перекладі задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, на мову математики. Учні набувають здатність використовувати математичну та логічну символіку, з'являються необхідні умови для формування здатності до математичного моделювання. Найпростіша символіка вводиться в середній школі (знаки дій, рівності та нерівності, дужки, знаки кута, паралельності і т.д.). Правильному використанню символів слід вчити, розкриваючи їх роль і значення при розв'язуванні задач методом математичного моделювання в процесі

оформлення математичних текстів. На етапі дослідження математичної моделі, тобто при безпосередньому розв'язуванні отриманої математичної задачі, спонукаючи учнів використовувати таке математичне програмне забезпечення, як Derive (пакет комп'ютерної алгебри), DG (динамічна геометрія), комплект програм Gran (Gran1, Gran-2D, Gran-3D), Algebrator (програма для розв'язування алгебраїчних задач), Математика (програма для розв'язування різного роду задач з математики), Excel (електронні таблиці) та багато інших. На розвиток технологічної компетентності можна впливати вдало організувавши роботу учнів у процесі розв'язування спеціально підібраних задач.

Основою *логічної компетентності* є логічна грамотність і розвинене логічне мислення, а також здатність використовувати логічну грамотність і логічне мислення в навчальній діяльності та в житті. Ознаками логічної компетентності школярів можуть виступати наступні здатності: здатність мислити точно й послідовно, не допускаючи протиріч у своїх міркуваннях, та вміння викривати логічні помилки; здатність до володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень, що передбачає володіння і використання понятійного апарату (поняття, висловлювання, предикати, логічні операції, аксіоми і теореми) на практиці; здатність будувати, вдосконалювати та використовувати власну систему математичних уявлень на практиці, на основі понятійного апарата; здатність до відтворення доведень теорем та доведення правильності процедур розв'язування типових задач; здатність до проведення обґрунтувань правильності розв'язування задач та відшукування логічних помилок у неправильних міркуваннях.

Відпрацьовуючи метод математичного моделювання при розв'язуванні текстових і не лише задач, вчитель може скористатися умовами для розвитку логічної компетентності учнів.

Показниками *дослідницької компетентності* виступають наступні здатності: здатність володіти методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач математичними методами, що полягає у

здатності формулювати математичні задачі на основі аналізу соціально та індивідуально значущих задач; здатність будувати аналітичні та алгоритмічні (комп'ютерні) моделі задач; здатність висувати та емпірично перевіряти справедливість гіпотез, спираючись на відомі методи, такі як індукція, аналогія, узагальнення, а також на власний досвід досліджень; здатність інтерпретувати результати, отримані за формальними методами, у термінах вихідної предметної області задачі; здатність систематизувати отримані результати (досліджувати межі застосувань отриманих результатів, встановлювати зв'язки з попередніми результатами, модифікувати вихідну задачу, шукати аналогії в інших розділах математики та інших галузях знань); здатність проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі.

Вбачаємо необхідним доповнити даний перелік математичних компетентностей *практичною компетентністю*, що передбачає здатність будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних із ними, за допомогою математичних об'єктів, відповідних математичних задач; здатність оволодівати необхідною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; вміння уточнювати вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв'язування задачі; вміння переформулювати задачу; здатність розбивати задачу на складові, встановлювати зв'язки між ними, складати план розв'язання задачі; вміння вибирати засоби розв'язання задачі, їх порівнювати і застосовувати оптимальні; вміння перевіряти правильність розв'язання задачі; здатність аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; вміння узагальнювати задачу, всебічно її розглядати і приймати рішення за результатами розв'язання задачі.

Здатність до математичного моделювання є безпосередньою ознакою практичної компетентності учнів, яка формується паралельно з формуванням

та розвитком вмінь використовувати математичне моделювання в навчальній діяльності та на практиці.

Формування математичної компетентності, як цілісної характеристики, забезпечується внаслідок успішного оволодіння учнями: процедурною, технологічною, логічною, дослідницькою та практичною математичними компетентностями. Компетентнісний підхід у навчанні математики полягає у збалансованому формуванні всіх вказаних складових. Методично грамотно побудований процес формування здатності учнів до математичного моделювання є важливою передумовою розвитку їхніх математичних компетентностей.

2.2. Прикладна задача як основний засіб формування в учнів умінь математичного моделювання

2.2.1. Характеристика функцій прикладних задач у навчанні математики учнів профільної школи

Вибудовуючи спеціальну методичну систему формування умінь математичного моделювання в учнів, з максимальним урахуванням обґрунтованих психологами вікових особливостей та інтересів учнів профільної школи, вчитель математики має використовувати спеціальні методи, прийоми та засоби. Якщо акцентувати увагу на спеціальних засобах формування та розвитку в учнів умінь математичного моделювання, то в методичній літературі, в першу чергу, йдеться про розв'язування прикладних задач. Українськими науковцями проведено низку ґрунтовних досліджень прикладної спрямованості навчання математики в школі. Найбільша кількість публікацій стосується прикладної спрямованості навчання математики в основній школі. Щодо формування вмінь математичного моделювання в учнів старшої школи, включаючи питання прикладної спрямованості, то тут значно менший обсяг публікацій. Серед ґрунтовних досліджень виокремимо дисертаційне дослідження А. В. Прус. Зокрема, за

результатами її дисертації опубліковано посібник «Прикладна спрямованість стереометрії. 10-11 класи» [47], в якому є хороша добірка прикладних задач, які згруповані за основними темами, що дає можливість реалізувати прикладну спрямованість стереометрії в старшій школі з довільним профілем навчання. За результатами дисертаційних досліджень Л. О. Соколенко та Л. Г. Філон опубліковано посібник «Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум» [48], в якому є добірка прикладних задач, що дає можливість реалізувати прикладну спрямованість навчання алгебри в старшій школі.

Особливого значення в технології формування умінь математичного моделювання в учнів ми надаємо місцю й ролі кожної прикладної задачі, яку використовує вчитель на уроці. Прикладні задачі – один з дієвих і ефективних засобів для формування в учнів умінь і навичок застосовувати набуті в процесі навчання математики знання і вміння в нестандартних ситуаціях. Як зазначають Л. О. Соколенко, Л. Г. Філон та В. О. Швець [48, с.6], однією з методичних вимог щодо реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є наповнення навчального процесу прикладними задачами, що задовольняють такі методичні вимоги: 1) задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань; 2) задачі повинні відповідати шкільним програмам і чинним підручникам з математики щодо методів і фактів, які будуть використовуватися в процесі їх розв'язування; 3) прикладні задачі природничого характеру повинні демонструвати практичне застосування математичних ідей у різних галузях природознавства, зокрема в біології, генетиці, екології, хімії, медицині, фармації; 4) зміст задачі повинен викликати в учнів пізнавальний інтерес, давати можливість демонструвати ефективне використання математичних знань на практиці; 5) поняття і терміни задач мають бути відомі або інтуїтивно зрозумілі учням; 6) числові дані в прикладних задачах повинні відповідати існуючим на практиці, тобто бути реальними.

Аналіз матеріалів звіту за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018 [42], показує відмінності розуміння значимості умінь моделювання в різних країнах, а, відповідно, і різне ставлення до їх формування. Характерною особливістю дослідження PISA є його компетентнісний характер: завдання тестів стосуються реальних життєвих ситуацій, для розв'язування яких потрібно не репродуктивне відтворення набутих знань і вмінь, а здатність ефективно застосовувати їх у нових, нестандартних ситуаціях. Як пояснює С. Раков, національний представник України в Керівній Раді PISA, однією із причин низького показника українських школярів з математичної грамотності при виконанні завдань дослідження PISA є недостатня увага до проблем становлення компетентнісної парадигми освіти в Україні з її акцентом на реальних практичних, життєвих проблемах, які мають бути актуальні для учнів і мотивувати їх у навчанні. Є підстави, зазначає С. Раков, говорити як про проблему і про фахову підготовку вчителів математики як у їхніх предметних галузях, так і в галузі методики навчання математики, а також про проблему створення сучасного освітнього середовища тощо. Наведемо приклад завдання дослідження PISA 2018:

Дев'яносто п'ять відсотків товарів у світі перевозять морським шляхом приблизно 50 000 танкерів, вантажних кораблів і контейнеровозів. Більшість цих кораблів використовують дизельне паливо. Інженери планують розробити підтримку кораблів, використовуючи силу вітру. Їх пропозиція полягає в прикріпленні до кораблів кайтів (вітрил) і використанні сили вітру, щоб зменшити витрату дизельного палива і його вплив на довкілля.

Запитання 1: *Одна з переваг використання кайта полягає в тому, що він рухається на висоті 150 м. Там швидкість вітру приблизно на 25% більша, ніж на рівні палуби корабля. З якою приблизно швидкістю дме вітер на кайт, коли швидкість вітру, що виміряна на палубі корабля, дорівнює 24 км/год?*

Запитання 2: Чому приблизно має дорівнювати довжина канату кайта, щоб він тягнув корабель під кутом в 45° і знаходився на висоті 150 метрів по вертикалі, як показано на малюнку?

Запитання 3: Назва корабля: «Нова хвиля», тип: фрахтове судно,

Довжина: 117 метрів

Ширина: 18 метрів

Вантажопідйомність: 12 000 тонн

Максимальна швидкість: 19 вузлів

Витрати дизельного палива за рік без використання кайта: приблизно 3 500 000 літрів.

Із-за високої вартості дизельного палива (0,42 грошової одиниці за літр) господарі корабля «Нова хвиля» думають про те, щоб забезпечити свій корабель кайтом. Підраховано, що аналогічний кайт дає можливість зменшити витрату дизельного палива на 20%. Вартість установки на «Новій хвилі» кайта складає 2 500 000 грошових одиниць. Через скільки приблизно років економія на дизельному паливі покриє вартість установки кайта? Приведіть обчислення, що підтверджують вашу відповідь.

Якщо акцентувати увагу в навчанні учнів на одній із таких цілей навчання: 1) формувати систему знань; 2) навчити використовувати знання на практиці; 3) навчити використовувати знання в нестандартних ситуаціях, то окреслюється різне бачення окремими країнами ступеня їх важливості. На рис. 2.1. наведені дані, свідчать про те, що у країнах колишнього СРСР традиційно пріоритетною була ціль сформувати в учнів середніх шкіл глибокі та міцні математичні і природничі знання, а читанню приділялось уваги менше. В інших країнах, як видно на рис. 2.1, пріоритетність цілей інша.

**Успішність учнів / студентів у читанні, математиці
та природничо-наукових дисциплінах**

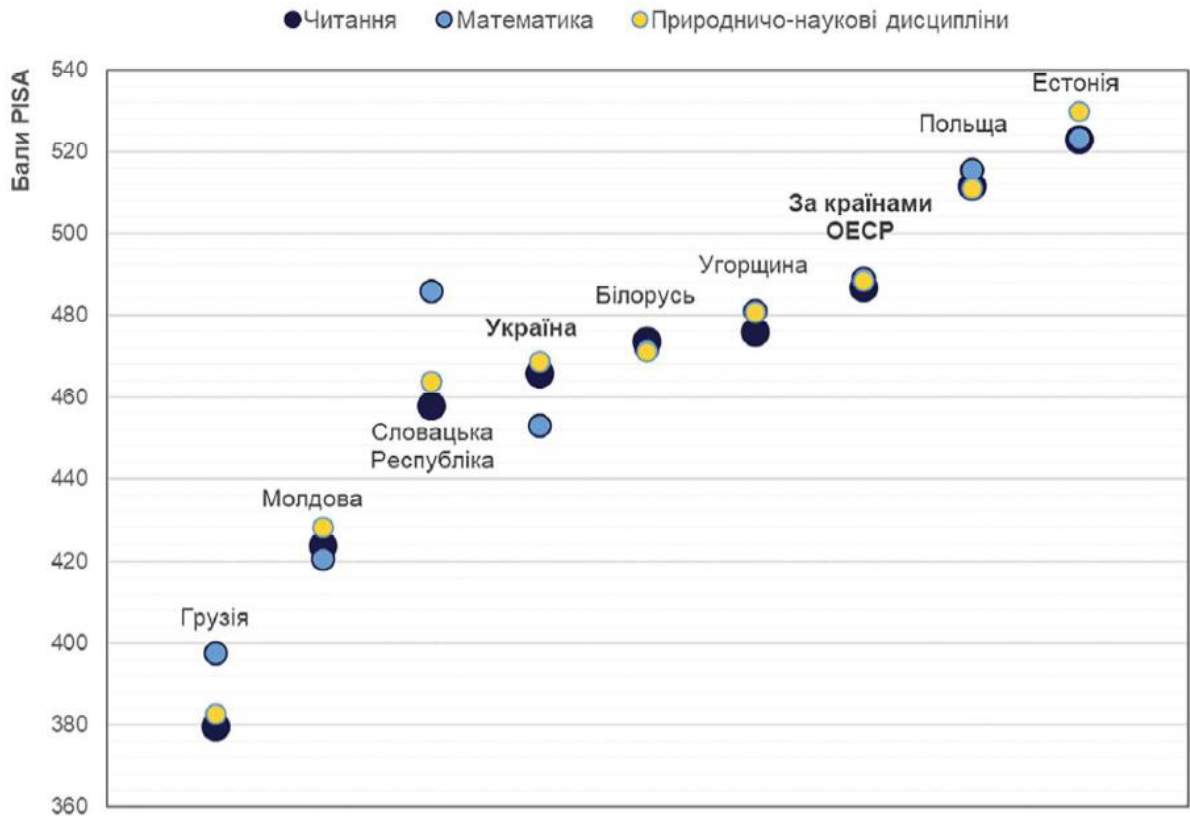


Рис. 2.1.

У нашому розумінні сутність прикладної спрямованості шкільного курсу математики полягає в орієнтації цілей, змісту і засобів навчання математики у напрямку: здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зв'язків математики з практикою; набуття учнями в процесі математичного моделювання знань, умінь і навичок, які будуть використовуватись ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності. Остання теза передбачає включення в навчання математики таких специфічних аспектів, які характерні для дослідження прикладних проблем, зокрема, для розв'язання прикладних задач, під якими ми розуміємо задачі, що виникають за межами математики, але розв'язуються з використанням математики.

Процесу розв'язування прикладних задач властиві всі етапи математичного моделювання. В узагальненому вигляді це: - переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, на мову математики (I етап,

створення математичної моделі); - розв'язування отриманої математичної задачі (II етап, дослідження математичної моделі); - інтерпретація отриманих результатів, тобто переклад розв'язку математичної задачі з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла (III етап, інтерпретація розв'язків).

Процес методичної діяльності із відібраною задачею має розкривати комплекс її функцій, серед яких навчальні, розвивальні, діагностичні, прогнозні, тощо. Вдало відібрана прикладна задача, по-перше, створює оптимальні умови для формування умінь математичного моделювання в учнів, по-друге, дозволяє використати, а тим самим активізувати, закріпити, систематизувати, розвинути знання учнів з математики. По-третє, методично грамотне розв'язування з учнями вдало відібраної задачі, має слугувати розвитку прийомів їхньої розумової діяльності. По-четверте, має виступати мотиваційним чинником особистісного розвитку і т.д.

У процесі нашого дослідження створено та апробовано банк прикладних задач [30, с.53-81] для використання учителем математики профільної школи у процесі формування математичних компетентностей старшокласників, з акцентом на формування в учнів умінь математичного моделювання (див. Додаток Д).

Нами дібрано добірку прикладних задач для учнів 10-11 класів за усіма темами навчального курсу «Математика», що сприятимуть формуванню умінь математичного моделювання в учнів профільної школи (див. Додаток Е) [1], [2], [3], [5], [6], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [28], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [43], [44], [45], [49].

Формування здатності до математичного моделювання за допомогою прикладних задач може відбуватися в процесі навчання не тільки математики, а й кожного з предметів природничо-математичних циклу. Це сприяє міжпредметному узагальненню набутих знань і умінь, формуванню в них уявлень про універсальний характер математичних методів дослідження, зокрема, методу математичного моделювання, можливості його ефективного

застосування для вивчення різних за своєю природою об'єктів, явищ і процесів.

Ефективному формуванню здатності до математичного моделювання сприяє також виконання творчих домашніх завдань на пошук і самостійне складання задач (фізичних, економічних, біологічних, тощо) за заданою математичною моделлю.

2.2.2. Методичні аспекти побудови та використання систем задач для формування в учнів умінь математичного моделювання

Загальновідомі нині проблеми навчання математики в школі, на нашу думку, мають місце і тому, що в процесі навчання вчителями математики використовуються скоріше певні набори задач, а не методично виважені системи задач. На нашу думку, методична майстерність учителя математики в конструюванні систем задач, з урахуванням різних аспектів організації навчально-пізнавальної діяльності учнів, має визначальне значення для ефективності процесу навчання учнів математичному моделюванню. Згідно вікісловника, система (від дав.-гр. *Σύστημα* — «сполучення», «ціле», «з'єднання») — множина взаємопов'язаних елементів, що утворюють єдине ціле, взаємодіють із середовищем та між собою, і мають мету. Відповідно система задач у навчанні математики – це певна спеціальна вибірка задач, здійснена вчителем математики, для забезпечення сприйняття, засвоєння та закріплення певної навчальної теми. Відповідно будемо розрізняти системи задач сконструйовані вчителем для уроку математики, або системи задач сконструйовані вчителем для групи уроків математики у процесі яких вивчається певна тема – тематичні системи задач.

В. В. Гузеєв [8] зміст поняття «система задач» розкриває наступним чином: сукупність завдань до блоку уроків з теми, що вивчається, яка задовольняє вимоги: повнота (наявність завдань на всі поняття, що засвоюються); наявність ключових задач, тобто завдань, які є своєрідними

«ключами» для розв'язування інших; взаємозв'язність задач (від підготовчих завдань до узагальнювальних); поступове нарощування складності завдань; цільова достатність (виважена кількість задач для досягнення навчальної мети); психологічна комфортність (врахування рівня навченості, типів мислення учнів та інших психологічних аспектів).

Г. Г. Зайцева [10] пропонує пам'ятку для аналізу педагогічної цінності кожної задачі в системі задач: Яку навчальну мету переслідує дана задача? Які елементи математичної освіти мають на увазі? Чи необхідна саме ця задача? Чому на цьому місці саме ця задача? Чому вибрана така фабула завдання? Чому взяті такі, а не інші числові дані? Чи відповідають числові дані реальній ситуації, в якій могла б виникнути аналогічна задача? Чи цікава задача для учнів, чи коректна постановка питання, чи викликає вона в учнів інтерес до відповіді або способу розв'язування, чому саме? Чи зможе учень самостійно виконати завдання? Що він для цього повинен знати, вміти, пам'ятати, уявляти собі? Якщо учень не зможе цього зробити, про що буде свідчити цей факт? Чим і в якій мірі учням може і повинен допомогти вчитель? Як це завдання пов'язане з попередньою і наступною навчальною роботою учня?

Отже, основним засобом розвитку вмінь математичного моделювання в учнів профільної школи ми вважаємо спеціальну систему задач сконструйовану вчителем математики, з урахуванням вимог цілісності, інтегративності, адитивності, методичної доцільності та методичної відповідності. Наведемо конкретний приклад системи задач для уроку систематизації та узагальнення знань з теми «Площі поверхонь многогранників»:

1. Необхідно, щоб у приміщенні на кожну людину приходилося не менше 6 м^3 повітря. Кімната має довжину 5 м, ширину 6 м та висоту 2,6 м. Бригада будівельників здійснює ремонтні роботи. Яка кількість людей може одночасно знаходитися в цій кімнаті без шкоди для здоров'я?

2. Потрібно побілити стелю та стіни в іншій кімнаті, яка має розміри 7 м х 3,5 м х 2,6 м. У кімнаті є двоє вікон шириною 2,3 м і висотою 1,3 м та двері висотою 2,1 м та шириною 1,1 м. Скільки коштуватиме робота, якщо побілка 1 м² коштує 10 грн?
3. Стіни кімнати (див. задачу №1) потрібно обклеїти шпалерами. В кімнаті є одне вікно шириною 2,3 м і висотою 1,3 м та двоє дверей шириною 1,1 м і висотою 2,1 м. Скільки потрібно рулонів шпалер для виконання ремонту, якщо довжина кожного рулону 10 м і ширина 53 см?
4. Для обклеювання шпалерами стін третьої кімнати використано 93,5 м² шпалер. Вікна та двері займають 15,1 м². Бордюр, яким обклеєно кімнату вздовж усіх стін, має довжину 25,5 м. Скільки коштуватиме фарбування підлоги цієї кімнати, якщо за фарбування масляною фарбою кожного квадратного метра беруть 20 грн і якщо висота кімнати менша від її ширини на 1,42 м?
5. Потрібно з'єднати стінною проводкою вимикач і лампочку в кімнаті 7 м х 3,5 м х 2,6 м. Вимикач знаходиться посередині торцевої стіни на висоті 1 м від підлоги, а лампочка - посередині протилежної сторони на висоті 1 м від стелі. Якою найкоротшою може бути довжина проводки?
6. Скільки треба заплатити за дерево для виготовлення шафи без ніжок висотою 2 м, шириною 1,5 м та глибиною 0,5 м, якщо 1 м² матеріалу коштує: для передньої частини - 50 грн, для бічних стінок - 38 грн, для задньої стінки - 30 грн, для дна, верха та чотирьох полицок - 26 грн. Для виготовлення шафи треба також придбати 4 зубчасті дерев'яні рейки загальною вартістю 108 грн.
7. Визначити місткість трикутної шафки у ванній кімнаті, якщо її основою є прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 30 см і 40 см, а площа найбільшої грані на 1700 см² більша, ніж площа найменшої грані.

Легко помітити, що вказана вибірка задач відповідає певній конкретній життєвій ситуації, а саме – ремонту квартири. Ця побутова ситуація, очевидно, добре знайома учням старшої школи, що важливо з точки зору методичної доцільності та методичної відповідності вказаної системи задач. Мова йде про формування не просто математичних знань та умінь, а математичної компетентності учнів (здатності застосовувати математичні знання та уміння та переконаності в необхідності цих знань та умінь). Кожна задача в цій системі не є випадковою, можна обґрунтувати місце і роль кожної з них і з точки зору навчальних та розвивальних цілей, і з точки зору розвитку в учнів умінь математичного моделювання. Особливу увагу звернемо на наявність в цій системі так званих «відкритих задач» - задач з неоднозначною умовою, або з різними варіантами правильних відповідей. До таких, зокрема, відносяться задачі №1 та №7. Задачі №1 та №5, хоча не мають прямого відношення до площі поверхні многогранника, виконують важливі функції у цій системі відповідно до вимог цілісності, інтегративності, адитивності. Потужні можливості для розвитку критичного мислення учнів приховані в задачі №4.

Таким чином, важливо ґрунтовніше, аналізувати та відбирати задачі, розуміти і розкривати їхні навчальні та розвивальні функції, глибше продумувати методику розв'язування кожної задачі на уроці. Формування та розвиток готовності та здатності учнів до математичного моделювання значно залежить від майстерності вчителя математики створити та оптимально використати в процесі навчання цілісну систему задач, в якій чітко вбачаються вчителем навчальні, розвивальні, виховні та прогностично-діагностичні функції. У розробленому і апробованому нами навчально-методичному посібнику «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання» ми сформуваємо добірки прикладних задач для формування умінь математичного моделювання в учнів наступним чином:

- Задачі на знаходження найменших або найбільших значень величини;

- Задачі геометричного змісту;
- Задачі фізичного змісту;
- Задачі стохастичного змісту;
- Задачі виробничого змісту;
- Задачі сучасного професійного змісту;
- Задачі побутового змісту (Додаток Д).

Завдання вчителя математики зацікавити учнів математикою. Яким чином цього можна досягти? Показати її значущість для конкретного учня. Тому вчитель має подбати, щоб в його методичній скарбничці була вивірена та продумана система прикладних задач, метою якої є різноплановість, збудження інтересу, ілюстрація застосування математики в житті з урахуванням профілю навчання. Наведемо добірку прикладних «спортивних» задач, яка є зручним засобом формування умінь математичного моделювання в учнів спортивно-гуманітарного профілю.

Задача 1. У футбольному турнірі зіграно 480 матчів, причому кожна команда грала з усіма іншими на своєму та на чужому полі по одному разу. Скільки всього футбольних команд брало участь у турнірі?

Розв'язання. Нехай x — кількість футбольних команд. Тоді загальна кількість матчів дорівнює: $x(x - 1)$.

Складемо рівняння: $x(x - 1) = 480$, що є математичною моделлю даної задачі.

$$x^2 - x - 240 = 0, \quad x = 16.$$

Відповідь: 16 команд.

Задача 2. Два лижних загони йшли з однаковою швидкістю; один пройшов 112 км, другий – 96 км. Скільки часу йшов кожний загін, якщо їх швидкість була найбільша з усіх можливих швидкостей, що виражаються числом цілих кілометрів за годину?

Розв'язання. Щоб знайти число годин руху кожного загону, треба відстань, яку пройшов кожний загін, поділити на швидкість руху за годину. За умовою швидкість обох загонів однакова, вона виражається цілим числом кілометрів, отже, швидкість за годину – це найбільший спільний дільник 112

і 96. Знайдемо НСД (112; 96): $112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$; $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; НСД (112; 96) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; число годин руху першого загону – 7 і другого – 6 годин.

Відповідь: 7 год, 6 год.

Задача 3. Дві дівчини і троє хлопців обирають спортивну секцію. До секції художньої гімнастики приймають тільки дівчат, до секцій греблі і боксу – тільки хлопців, а до волейбольної і футбольної секцій – і дівчат, і хлопців. Скільки існує способів розподілу між секціями цих п'ятьох осіб?

Розв'язання. Для кожної з двох дівчат є три варіанти вибору, а для кожного з трьох хлопців – чотири варіанти. Всього способів розподілу між секціями цих п'яти осіб існує: $3^2 \cdot 4^3 = 576$.

Відповідь: 576 способів.

Актуальними на сьогодні і цікавими для учнів є фінансові задачі, на розрахунок премій, грошових винагород і затрат, що можуть бути пов'язані з змаганнями.

Задача 4. На придбання велосипедів спортивний клуб виділив 84000 грн. Оскільки внаслідок подорожчання цін вартість кожного велосипеда зросла на 1000 грн., було придбано на 2 велосипеда менше, ніж планувалось. Скільки купили велосипедів?

Розв'язання. Нехай купили x велосипедів, а планували купити – $(x + 2)$.

Вартість одного велосипеда до подорожчання: $\frac{84000}{x+2}$, після подорожчання $\frac{84000}{x+2} + 1000$.

Складемо рівняння, що є математичною моделлю даної задачі:

$(\frac{84000}{x+2} + 1000) \cdot x = 84000$. Маємо рівняння $x^2 + 2x - 168 = 0$, розв'язавши, яке одержимо, що $x = 12$.

Відповідь: 12 велосипедів.

Задача 5. Між трьома переможцями змагання було розподілено грошову премію, відповідно до зайнятих призових місць. Перший

одержав половину всієї премії без $\frac{3}{22}$ того, що одержали двоє інших разом. Другий одержав 3000 грн. Третій одержав $\frac{1}{4}$ всієї премії і $\frac{1}{56}$ грошей, отриманих разом двома іншими. Якою була вся премія і скільки грошей одержав кожен переможець?

Розв'язання. Нехай x грн. – премія переможця, що зайняв перше місце, y грн. – переможця, що зайняв третє місце. За умовою вся премія дорівнює $x + y + 3000$ грн. Одержимо наступну математичну модель задачі:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + y + 3000) - \frac{3}{22}(y + 3000); \\ y = \frac{1}{4}(x + y + 3000) + \frac{1}{56}(x + 3000). \end{cases}$$

Звідки $x = 4000$, $y = 2500$. Знайдемо всю премію: $4000 + 3000 + 2500 = 9500$ (грн.)

Відповідь: 9500 грн.; 4000, 3000 і 2500 грн.

Досить цікавими, і водночас різноплановими можуть бути задачі про спортивний майданчик:

Задача 6. Спортмайданчик має форму прямокутника з діагоналлю 185 м. Під час реконструкції, довжину кожної його сторони зменшили на 4 м. При цьому прямокутну форму було збережено, але площа виявилася меншою на 1012 м². Якими стали розміри спортмайданчика після реконструкції?

Розв'язання. Нехай x – початкова довжина, а y – початкова ширина спортмайданчика. За умовою задачі, складемо наступне рівняння: $(x - 4)(y - 4) = xy - 1012$. Звідки маємо, $4(x + y) = 1028$, тоді $x + y = 257$. З іншого боку, $x^2 + y^2 = 185^2$ (за теоремою Піфагора). Підставивши $x = 257 - y$ у це рівняння, будемо мати: $(257 - y)^2 + y^2 = 185^2$, звідки $y_1 = 104$, $y_2 = 153$. Тоді, відповідно $x_1 = 153$, $x_2 = 104$. Оскільки x – довжина, а y – ширина, то $x = 153$ (м), а $y = 104$ (м). Якщо довжини сторін зменшити на 4 м, то розміри спортмайданчика стануть рівними 100 м. та 149 м.

Відповідь: 100 м, 149 м.

Задача 7. Спортивний майданчик прямокутної форми обнесений огорожею. Якщо від неї вздовж прямої відрізати деяку частину так,

щоб частина, яка залишилася, була квадратом, то його площа при цьому зменшиться на 400 м^2 , а огорожа зменшиться на 20 м . Визначити початкові розміри спортивного майданчика.

Розв'язання. Нехай x – ширина, а y – довжина майданчика. Тоді площа $x \cdot y \text{ м}^2$. За умовою $x \cdot y = x^2 + 400$. Довжина огорожі $2(x + y) = 4x + 20$. Складемо систему, що є математичною моделлю даної задачі:

$$\begin{cases} x \cdot y = x^2 + 400; \\ 2(x + y) = 4x + 20. \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему, одержимо що $x = 40 \text{ м}$, а $y = 50 \text{ м}$.

Відповідь: 40 м , 50 м .

Математика більш, ніж будь-який інший навчальний предмет в школі, здатна вплинути на розвиток логічного мислення, на розвиток багатьох якостей мислення, таких як критичність, узагальненість, спроможність до аналізу досягнень і синтезу тощо. Нарешті, такі риси, як стислість, точність і ясність, найбільше виховуються саме в процесі навчання математики. Це свідчить про те, що вивчення математики необхідне для учнів, які навчаються за різними профілями. Однак, здійснювати навчання математики при цьому потрібно особливим чином, враховуючи профіль навчання. Наприклад, задачі для гуманітаріїв мають підбиратися такі, щоб учні бачили її значущість і необхідність в інших галузях знань, навіть зовсім віддалених. Тому вчитель, який викладає математику в нематематичних профілях, має подбати про те, щоб у нього була вивірена та продумана система прикладних задач, метою якої є різноплановість, збудження інтересу, ілюстрація застосування математики в житті. Якщо задача близька до життєвої ситуації, то вона не видається такою складною і тому не «відлякує» учнів. В експериментальних дослідженнях нами апробована добірка прикладних задач з математики, так чи інакше пов'язаних з грошовими розрахунками, яка викликала інтерес в учнів-гуманітаріїв.

1. Вартість учнівського проїзного квитка на місяць складає 70 грн. А вартість квитка на одну поїздку складає 3 грн. Оксана придбала проїзний і зробила 45 поїздок за місяць скільки грошей вона заощадила?

2. Сирок коштує 7 грн. 40 коп. Яке найбільше число сирків можна придбати на 40 грн.?

3. Шоколадка коштує 30 грн. В супермаркеті протягом місяця діє спеціальна пропозиція: купуючи дві шоколадки, отримуєш три (одна в подарунок). Скільки шоколадок можна придбати на 190 грн. в цей місяць?

4. Школа закуповує книги по ціні 50 грн. за штуку. При купівлі більше 10 шт. магазин дає знижку 10%. Скільки книг можна купити на 1000 грн.?

5. В квартирі встановлений прилад обліку витрат холодної води (лічильник). 1 червня лічильник показував витрати 178 куб. м. води, а 1 липня – 189 куб. м. Яку суму повинен сплатити власник квартири за холодну воду за червень, якщо ціна за 1 куб. м. холодної води складає 7 грн 60 коп?

6. Хворому прописаний курс ліків, які потрібно приймати по 0,5 г три рази в день протягом трьох тижнів. В одній упаковці міститься 10 таблеток по 0,5 г. Якої найменшої кількості упаковок вистачить на весь курс лікування?

Варто на уроках математики пропонувати й інші цікаві задачі, пов'язані з повсякденним життям учнів. Нами виокремлено п'ять вимог до систем задач на урок математики та тематичних систем задач, а саме вимоги: цілісності, інтегративності, адитивності, методичної доцільності та методичної відповідності.

Властивість цілісності пов'язана з навчальною метою, для досягнення якої створюється система задач. Властивість інтегративності системи задач означає наявність системоутворюючих, системозберігаючих факторів. Властивість адитивності (незалежності) системи задач виявляється у відносній незалежності задач одна від одної. Властивість методичної доцільності системи задач пов'язана з розвивальними та виховними цілями,

для досягнення яких створюється система задач. Властивість методичної відповідності означає врахування вікових особливостей, рівнів математичних знань та умінь учнів, умови диференціації навчання, наявності або відсутності вмотивованості та зацікавленості учнів.

Можна стверджувати, що будь-яка система задач знаходиться завжди між крайніми станами абсолютної цілісності та абсолютної адитивності, а також між крайніми станами абсолютної методичної доцільності та абсолютної методичної відповідності. В будь-який момент система задач, що конструюється, може характеризуватися вищим ступенем прояву однієї з властивостей або тенденцією до її посилення чи послаблення.

2.2.3. Методика розв'язування прикладних задач у навчанні учнів математичному моделюванню

В. О. Швець виділяє такі етапи розв'язування прикладної задачі у школі методом математичного моделювання [50]:

1. *Створення математичної моделі* – переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, мовою математики.
2. *Дослідження математичної моделі* – розв'язування отриманої математичної задачі.
3. *Інтерпретація розв'язків* отриманих результатів, тобто переклад розв'язку математичної задачі з мови математики мовою тієї галузі, де вона виникла.

Розглянемо конкретні приклади методики розв'язування прикладних задач з метою формування в учнів умінь математичного моделювання.

Задача. *Група студентів вирішили купити товаришеві на день народження новий мобільний телефон за акційною ціною від 170 до 195 доларів. В останній момент двоє студентів відмовилися брати участь у покупці, тому кожному з решти студентів довелося внести на 1 долар більше. Скільки коштував придбаний телефон?*

Розв'язання.

Побудуємо математичну модель задачі (*1 етап*):

Нехай x - число студентів у групі, y доларів - величина спочатку визначеного внеску коштів кожного студента для покупки телефону. Тоді загальна вартість покупки $x \cdot y$. Після того, як двоє студентів відмовилися брати участь у покупці, студентів стало $x - 2$, а внесок уже мав бути $y + 1$ долар.

Отже, вартість телефону $(x - 2) \cdot (y + 1)$. Умову акційної покупки телефону за ціною від 170 до 195 доларів можна подати у вигляді подвійної нерівності $170 \leq x \cdot y \leq 195$. Таким чином, математичною моделлю даної задачі є система:

$$\begin{cases} x \cdot y = (x - 2) \cdot (y + 1); \\ 170 \leq x \cdot y \leq 195. \end{cases}$$

Маємо справу із системою, яка складається з рівняння і нерівності (*2 етап*). Розглянемо спочатку рівняння системи, розкриємо дужки і зведемо подібні доданки: $x - 2y = 2$. Таким чином, отримаємо систему:

$$\begin{cases} x - 2y = 2; \\ 170 \leq x \cdot y \leq 195. \end{cases}$$

З рівняння виражаємо y через x : $y = \frac{x-2}{2}$, підставляємо в нерівність. Отже, $340 \leq x \cdot (x - 2) \leq 390$. Маємо систему двох квадратних нерівностей, розв'язавши яку отримаємо:

$$19 < 1 + \sqrt{341} \leq x \leq 1 + \sqrt{391} < 21.$$

Розглянемо отриманий математичний результат з точки зору змісту даної задачі (*3 етап*): оскільки x - число студентів у групі, то x - натуральне число, яке має задовільняти умову $19 < x < 21$. Отже, $x = 20$, тоді $y = \frac{x-2}{2} = 9$, тому $x \cdot y = 180$. Таким чином, придбаний студентами телефон коштував 180 доларів.

Задача. У зв'язку з подорожчанням бензину в таксиста постало запитання: чи варто продовжувати займатися цією справою? Для розрахунку таксист взяв останній місяць, за який він проїхав 4000 км. Вартість 1 літру бензину – 32 гривні. Витрати бензину на 100 км в

середньому – 9 літрів. Крім витрат на пальне, таксист витратив 400 гривень на паливно-мастильні матеріали та 1800 гривень на амортизацію. При якому тарифі на проїзд чистий прибуток таксиста складе не менше 18000 гривень?

Розв'язання.

- 1) $4000:100 \times 9=360$ (л) – витрачено бензину за місяць;
- 2) $360 \times 32=11520$ (грн) – витрачено коштів на пальне.
- 3) Нехай x грн/км – тариф за проїзд в таксі, тоді $4000 \cdot x$ грн – можливий прибуток таксиста. Весь прибуток складається зі всіх витрат та чистого прибутку. Розглянемо математичну модель задачі:

$$4000 \cdot x \geq 11520 + 400 + 1800 + 18000$$

$$x \geq 31720:4000$$

$$x \geq 7,93.$$

Округливши результат матимемо, що для отримання не менше як 18000 гривень чистого прибутку, тариф таксі повинен складати 8 грн/км.

Відповідь. Бажаний тариф – 8 грн/км, при якому чистий прибуток складе 18 280 гривень.

Методичний коментар. Вказана задача може бути використана вчителем математики при вивченні учнями нерівностей у 9 класі. Як свідчить аналіз добірок задач до теми «Нерівності» в сучасних шкільних підручниках алгебри для 9 класу, прикладних задач, у процесі розв'язування яких є можливість розвивати уміння математичного моделювання в учнів, недостатня кількість у шкільних підручниках алгебри. Однак, враховуючи необхідність створення вчителем умов для формування умінь математичного моделювання в старшій профільній школі, ми вважаємо доцільним і можливим розв'язування таких задач і в старшій школі. Наприклад, в умовах днів, або тижнів математичного моделювання (як описано нами в підрозділі 2.1.2). Розв'язування вказаної задачі може позитивно вплинути на мотивацію учнів до вивчення математики, адже вони мають змогу зрозуміти, що математично компетентний таксист може критично оцінити нову ситуацію,

самостійно прийняти обґрунтоване рішення. В цій задачі відносно велика кількість даних величин і це важливо з методичної точки зору, адже мислення учнів може розвиватися в умовах необхідності аналізувати, вибирати, пояснювати, обґрунтовувати. Якщо є можливість підвищити рівень складності задачі (наприклад, у роботі із здібними до математики учнями), то можна ввести в умову цієї задачі надлишкові дані, які не є потрібними для її розв'язання. У такому випадку задача сприятиме формуванню в учнів нелінійного мислення. Нині намітився поворот у людській діяльності та науці від одномірного, лінійного мислення, характерного для повсякденного життя і класичної науки, до мислення багатомірного і ймовірнісного. Нелінійність мислення передбачає визнання багатоваріантності розв'язань та ймовірнісного розвитку подій. Формування нелінійного стилю мислення має стати одним з найважливіших завдань шкільної математичної освіти. Розв'язування вказаної задачі дозволяє створити умови для вільного висловлення учнями різних дискусійних думок, поставити учнів у ситуацію, коли потрібно аргументувати власну точку зору. Маємо змогу формувати вміння учнів грамотно ставити запитання та відповідати на них. Наприклад:

- При яких умовах вказаний тариф може бути нижчим?
- Чи може таксист бути зацікавленим у зниженні тарифу на проїзд?
- Чи є отримане значення тарифу проїзду в таксі економічно обґрунтованим для інших власників таксі?

***Задача.** Існує думка, що купувати товари в інтернет магазині дешевше. В магазині «Мандрівник» термос Tramp коштує 720 грн. Для того щоб придбати термос у магазині покупцеві потрібно скористатися маршрутною, вартість поїздки в якій складає 6 грн. Відділення Нової пошти знаходиться біля будинку покупця. Цей же Термос в інтернет магазині коштує 685 грн. Вартість доставки Новою поштою складає від 20 до 50 грн. Крім того, при отриманні товару на пошті потрібно сплатити 2% від суми + 20 грн. Якщо ж оголошена вартість товару складає більше 200 грн,*

то ще слід сплатити 0,5% від оголошеної вартості. Де вигідніше покупцеві здійснити покупку: в магазині чи інтернет магазині?

Розв'язання.

- 1) $685 \times 0,02 = 13,7$ (грн) – 2% від вартості термосу;
- 2) $685 + 20 + 13,7 + 20 + 3,425 = 742,125$ (грн) – вартість термосу в інтернет магазині;
- 3) $720 + 12 = 732$ (грн) – вартість термосу в магазині «Мандрівник»;

Відповідь. Покупка вказаного термосу в магазині вигідніша, як мінімум на 10 гривень.

Методичний коментар. Дана задача є задачею побутового змісту. На перший погляд, в шкільних підручниках зустрічаються подібні задачі. Однак, ця задача, за задумом авторів, значно наближена до сучасної реальної життєвої ситуації. Відносно значну кількість даних в умові задачі розглядаємо як позитивний аспект. Формулювання задачі розпочинається з констатації поширеної точки зору. Важливо, що математичне розв'язання задачі дозволяє обґрунтувати хибність цієї точки зору. При грамотно вибудованій методиці розв'язування вказаної задачі маємо змогу формувати не лише математичну компетентність учнів, а й, певним чином, формувати економічну грамотність учнів на побутовому рівні. Це дає можливість забезпечити умови таких важливих складників математичної компетентності як позитивне особистісне ставлення до навчання математики, а також актуальний досвід застосування набутих математичних знань та умінь.

Задача. *Ізюм отримують у процесі сушки винограду. Скільки кілограмів ізюму можна одержати з 16 кг винограду, якщо виноград містить 90% води, а ізюм – 5% води. Розрахуйте, що вигідніше: придбати готовий ізюм на ринку, якщо його вартість складає 70 грн за кілограм, чи виготовити його в домашніх умовах, використовуючи сушарку. Скільки можна заощадити коштів?*

Важливо: номінальна споживана потужність сушарки 0,6 кВт, тариф за електроенергію складає 0,9 грн/кВт до 100 кВт, та 1,68 грн/кВт поверх 100

кВт. Для висушування вказаної кількості винограду потрібно дві доби. Вартість винограду складає 35 грн/кг.

Розв'язання.

Таблиця 2.1

	Вода	Суха речовина
Виноград	90%	10%
Ізюм	5%	95%

- 1) $16:100 \times 10 = 1,6$ (кг) – сухої речовини у 16 кг винограду;
- 2) $1,6: 95 \times 100 = 1,684$ (кг) – кількість ізюму з 16 кг винограду;
- 3) $0,6 \times 24 \times 2 = 28,8$ (кВт) – кількість електроенергії витраченої на сушку;
- 4) $28,8 \times 0,9 = 25,9$ (грн) – вартість витраченої електроенергії;
- 5) $1,684 \times 70 = 117,88$ (грн) – ринкова ціна ізюму, отриманого з винограду;
- 6) $35 \times 16 = 560$ (грн) – вартість 16 кг винограду;
- 7) $560 + 25,9 = 585,9$ (грн) – ціна 1,684 кг домашнього ізюму.

Відповідь. Вартість домашнього ізюму майже в 5 разів вища за вартість ізюму придбаного на ринку, тому заощадити не вдасться.

Вчителю математики важливо домогтися від учнів чіткого розуміння значення і змісту кожного з вище описаних етапів процесу розв'язування задачі за допомогою математичного моделювання. Це потрібно для того, щоб учні добре зрозуміли, що вони розв'язують не просто математичну задачу, а конкретну життєву ситуацію математичними методами. Важливого значення у процесі формування умінь математичного моделювання ми надаємо різним способам розв'язування задач.

Задача. Постачальник привіз на ринок 13 ящиків мандарин по 7 кілограмів мандарин у кожному ящику. Після транспортування мандарини розділили на три сорти. Постачальник запропонував реалізатору продавати мандарини першого сорту по 40 грн, другого – по 30 грн, третього – по 20 грн за кілограм. Виручка від продажу всіх мандарин склала 3290 грн. Відомо, що маса мандарин 2-го сорту менше маси мандарин 1-го сорту на стільки ж

відсотків, на скільки відсотків маса мандарин 3-го сорту менше маси мандарин 2-го сорту. Чи може постачальник дізнатися скільки кілограм мандарин 2-го сорту продав реалізатор? Скільки кілограмів мандарин кожного сорту було продано?

Розв'язання.

1 спосіб. Для побудови математичної моделі ситуації, яку розглядаємо, потрібно ввести змінні x та y .

Нехай x кг – маса мандарин 3-го сорту, y кг – маса мандарин 2-го сорту. Загальна маса всіх мандарин $7 \times 13 = 91$. Тому $91 - (x + y)$ кг – маса мандарин 1-го сорту. Тоді: $20x$ грн – виручка за продані мандарини третього сорту; $30y$ – виручка за продані мандарини другого сорту; $40(91 - x - y)$ – виручка за продані мандарини першого сорту.

Для розрахунку загальної виручки маємо:

$$20x + 30y + 40(91 - x - y) = 3290$$

Маємо рівняння з двома невідомими. Для складання другого рівняння: маса мандарин 3-го сорту менше маси мандарин 2-го сорту на стільки ж відсотків, на скільки відсотків маса мандарин 2-го сорту менше маси мандарин 1-го сорту, маємо: $\frac{x}{y} = \frac{y}{91 - (x + y)}$

Математичною моделлю даної задачі є система рівнянь:

$$\begin{cases} 20x + 30y + 40(91 - x - y) = 3290 \\ \frac{x}{y} = \frac{y}{91 - (x + y)} \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь.

З першого рівняння системи виразимо y :

$$20x + 30y + 3640 - 40x - 40y - 3290 = 0$$

$$-20x - 10y + 350 = 0$$

$$20x + 10y - 350 = 0$$

$$2x + y - 35 = 0$$

$$y = 35 - 2x (*)$$

Підставимо y друге рівняння системи: $\frac{x}{35 - 2x} = \frac{35 - 2x}{91 - x - 35 + 2x}$;

$$\frac{x}{35 - 2x} = \frac{35 - 2x}{x + 56}$$

За властивістю пропорції маємо: $x(x + 56) = (35 - 2x)(35 - 2x)$,

при умові, що $35 - 2x \neq 0, x + 56 \neq 0$.

$$\begin{aligned} x(x + 56) &= (35 - 2x)^2 \\ x^2 + 56x &= 1225 - 140x + 4x^2 \\ 3x^2 - 196x + 1225 &= 0 \end{aligned}$$

Розв'язавши квадратне рівняння одержимо $x = 7$ та $x = \frac{175}{3}$, що не задовольняє умову $x < 17,5$. Отже, $x = 7$.

Знайдемо y , підставивши знайдене значення x в рівняння (*):

$$y = 35 - 7 \cdot 2 = 35 - 14 = 21$$

Запишемо результат мовою початкової задачі: реалізатор продав 21 кг мандарин 2-го сорту.

Відповідь. 21 кг.

* Для знаходження кількості проданих мандарин 1-го сорту використаємо, що $91 - (x + y) = 91 - (7 + 21) = 63$ (кг)

Відповідь. 63 кг, 21 кг, 7 кг.

2 спосіб. Нехай x кг – маса мандарин 3-го сорту, тоді маса мандарин 2-го сорту складає, згідно умови задачі, kx кг, де k додатне число, яке більше одиниці. Маса проданих мандарин 1-го сорту відповідно складе $k(kx) = k^2x$ кг. Всі умови даної задачі задовольняє система рівнянь, яка є математичною моделлю задачі:

$$\begin{cases} k^2x + kx + x = 91, \\ 40k^2x + 30kx + 20x = 3290; \end{cases} \quad \begin{cases} (k^2 + k + 1)x = 91, \\ (4k^2 + 3k + 2)x = 329. \end{cases}$$

Зокрема, це означає, що:

$$\frac{4k^2 + 3k + 2}{k^2 + k + 1} = \frac{329}{91}$$

Скоротивши дріб на 7, отримаємо: $\frac{4k^2 + 3k + 2}{k^2 + k + 1} = \frac{47}{13}$

$$\begin{aligned} 13(4k^2 + 3k + 2) &= 47(k^2 + k + 1) \\ 13(4k^2 + 3k + 2) - 47(k^2 + k + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$52k^2 + 39k + 26 - 47k^2 - 47k - 47 = 0$$

$$-5k^2 + 8k + 21 = 0$$

$$5k^2 - 8k - 21 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 5 \cdot (-21) = 64 + 420 = 484, \sqrt{D} = 22$$

$$k_1 = \frac{8 - 22}{2 \cdot 5} = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5}$$

не задовольняє умову задачі, бо не є додатнім числом, яке більше одиниці.

$$k_2 = \frac{8 + 22}{2 \cdot 5} = \frac{30}{10} = 3$$

Знайдемо значення x з рівняння: $(k^2 + k + 1)x = 91$

$$x = \frac{91}{9+3+1} = 7 \text{ (кг)} - \text{ продано мандарин 3-го сорту}$$

Тоді $kx = 21$ (кг) – продано мандарин 2-го сорту

Відповідь. 21 кг.

* Для знаходження кількості проданих мандарин 1-го сорту використаємо, що $k^2x = 3^2 \cdot 7 = 63$ (кг)

Відповідь. 63 кг, 21 кг, 7 кг.

Задача. *Дохід будь-якої родини складається із сукупності доходів її членів. Сім'я складається з чоловіка, жінки та їхньої доньки студентки. Якби зарплатня чоловіка збільшилася вдвічі, загальний дохід сім'ї збільшився на 67%. Якщо стипендія доньки зменшиться втричі, загальний дохід сім'ї скоротиться на 4%. Скільки відсотків від загального доходу сім'ї складає заробітна плата жінки?*

Розв'язання.

1 спосіб. Умова «якби зарплатня чоловіка збільшилася вдвічі, загальний дохід сім'ї збільшився на 67%» означає, що зарплата батька складає 67% доходу сім'ї. Умова «якщо стипендія доньки зменшиться втричі, загальний дохід сім'ї скоротиться на 4%», означає що $\frac{2}{3}$ стипендії складають 4% доходу сім'ї, тобто вся стипендія дочки складає 6% доходу сім'ї. Таким чином, заробітна плата матері складає $100\% - 67\% - 6\% = 27\%$ доходу сім'ї.

Відповідь. 27%.

2 спосіб. Нехай a – відсоток заробітної плати чоловіка від доходу даної сім'ї, b – відсоток стипендії доньки, c – відсоток заробітної плати жінки, тоді $a + b + c = 100\%$. Зміна доходу сім'ї після збільшення заробітної плати чоловіка означає: $2a + b + c = 167\%$. Зміна доходу сім'ї після зменшення стипендії доньки: $a + \frac{b}{3} + c = 96\%$.

Математичною моделлю задачі є система трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a + b + c = 100, \\ 2a + b + c = 167, \\ a + \frac{b}{3} + c = 96. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему, домноживши третє рівняння системи на 3:

$$\begin{cases} a + b + c = 100, \\ 2a + b + c = 167, \\ 3a + b + 3c = 288. \end{cases}$$

Якщо від третього рівняння системи відняти перше, то отримаємо:

$$\begin{cases} a = 67 \\ -2a - 2c = -188 \end{cases}$$

Підставимо значення a в друге рівняння: $-2 \cdot 67 - 2c = -188$. Звідки отримаємо, що $c = 27$.

Отже, заробітна плата жінки складає 27% доходу сім'ї.

При вказаному способі розв'язання задачі легко також відповісти на запитання: Скільки відсотків від загального доходу сім'ї складає стипендія доньки?

$$67 + b + 27 = 100, \text{ звідки } b = 6 (\%).$$

Тобто, стипендія доньки складає 6% від загального доходу сім'ї.

Методика розв'язування кожної задачі має сприйматись вчителем як необхідна складова цілісного процесу розвитку мислення учнів, формування їх практичної компетентності, розвитку їх особистості.


Складання математичної моделі при розв'язуванні текстової задачі, «переклад завдання» на мову математики, поволі готує учнів та студентів до моделювання реальних процесів і явищ у їхній майбутній професійній та побутовій діяльності.

Задача 1. Скільки води містить циліндричний паровий котел, що має довжину 4 м? Усередині котла по довжині проходить жарова труба з внутрішнім діаметром 40 см.

Розв'язання. Вода в паровому котлі (надалі використовуватимемо просто котел) міститься в жаровій трубі. За необхідності про це потрібно повідомити учням.



Рис.2.2.

Використання програми Gran3D і дозволяє розв'язувати дану задачу при вивченні теми «Циліндр», на етапі мотивації навчальної діяльності учнів. Для цього спочатку з головного меню програми, що розміщене безпосередньо під стрічкою заголовку, потрібно обрати пункт «Об'єкт», далі визвати команду «Створити базовий об'єкт», або ж на панелі інструментів натиснути кнопку  - «Створити базовий просторовий об'єкт», після чого активізується вікно програми «Задання базових просторових об'єктів». В даному вікні потрібно обрати «Циліндр», після чого вказати його параметри, що дані в умові задачі. Для цього в рядку «Висота» вводимо число 400, маючи на увазі см, оскільки довжина котла, а також і труби складає 4 м, а в рядку радіус – 20, оскільки за умовою задачі діаметр труби дорівнює 40 см.

Потім натискаємо кнопку «Створити», що активізує вікно «Конструювання об'єкта», на якому потрібно натиснути кнопку «Виконати». Для наочності, аналогічним чином створюємо ще один об'єкт для зображення котла, такої ж довжини, але більшого радіуса, наприклад 1 м. В правому кутку під написом «Характеристика об'єкта» отримуємо шуканий результат об'єму труби, що і дорівнює об'єму води, яка міститься в ній.

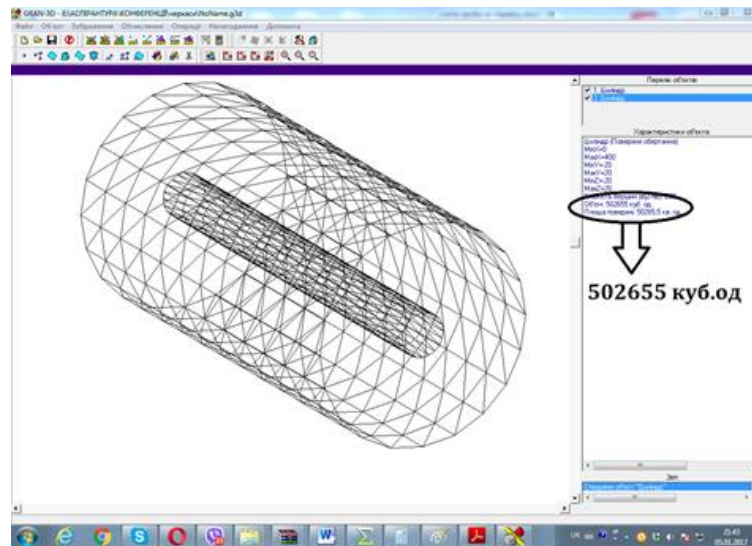
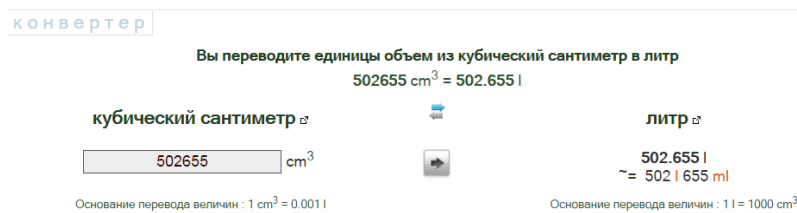


Рис.2.3.

Для переходу від кубічних одиниць (сантиметрів) до літрів можна використати будь який конвертор, навіть онлайн:



Відповідь. 502 л 655 мл води містить паровий котел.

Розв'язання (11 кл). Оскільки жарова труба, як і самий котел має циліндричну форму, задача розв'язується використовуючи відому формулу для знаходження об'єму циліндра $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$.

Функція $V = \pi R^2 H$ – математична модель задачі.

$$V_{\text{води}} = V_{\text{труби}} = \pi R^2 H = 3,14 \cdot 0,2^2 \cdot 4 \approx 0,5024 \text{ (м}^3\text{)}$$

Аналогічно для переходу до потрібної одиниці вимірювання можна скористатись конвертором.

Відповідь. 502 л 400 мл

Мотивація учнів до навчання, є одним із найважливіших чинників, що забезпечують успішне сприйняття і засвоєння навчального матеріалу. Формувати мотивацію означає створити такі умови та ситуації, які активізують розумову діяльність, де бажані мотиви і цілі розвиваються з урахуванням життєвого досвіду та внутрішніх прагнень особистості. Саме тому в змісті задач використовуваних для навчання моделюванню має бути відображений особистий досвід учнів, враховані їхні інтереси, сучасність, цікавість, актуальність. Також важливо відображати в умовах задач місцевий матеріал, який дозволяє ефективно показати використання набутих математичних знань і викликати пізнавальний інтерес, мотивуючи вивчення нових тем, зокрема, і математики в цілому.

Кожен учитель математики може перефразувати умову задачі так, щоб вона стала цікавішою. Наведемо приклади таких задач.

Задача (про Вінницький фонтан Рошен). В місті Вінниці на річці Південний Буг на плаваючій платформі розміщений фонтан. Вирахуйте площу зображених на фотографії трьох фігур (припустивши, що вони мають форму рівнобедрених трикутників). Висота центрального струменя сягає 63 м., а висоти двох бічних найвищих струменів по 54 м. Довжина платформи – 97 м. Відомо також, що основа середнього трикутника складає 40% від загальної довжини платформи, а основи бічних трикутників однакові. Яка вага піднятої над поверхнею річки води, якщо товщина водяної стіни дорівнює 5 сантиметрів.

Розв'язання.

Нехай h_1 і h_3 – висоти бічних струменів, h_2 – висота центрального струменя середнього трикутника, a_1 і a_3 – основи бічних трикутників, a_2 – основа центрального трикутника. З того що основа середнього трикутника складає 40% від загальної довжини платформи знаходимо, що $a_2 = 0,4 \cdot 97 = 38,8$, $a_1 = a_3 = 0,3 \cdot 97 = 29,1$.

$$\text{Тоді } S_{\Delta 1} = S_{\Delta 3} = \frac{1}{2} a_1 \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 29,1 \cdot 54 = 785,7 \text{ (м}^2\text{)}.$$

$$S_{\Delta 2} = \frac{1}{2} a_2 \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 38,8 \cdot 63 = 1222,2 \text{ (м}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{фігури}} = S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} + S_{\Delta 3} = 2 \cdot S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} = 2 \cdot 785,7 + 1222,2 = 2793,6 \approx 2794 \text{ (м}^2\text{)}.$$

$P = \rho \cdot V$, де V – об'єм піднятої води, ρ – густина води (1000 кг/м^3).
Оскільки $V = S \cdot h$, то $P = \rho \cdot S \cdot h = 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 2794 \text{ м}^2 \cdot 0,05 \text{ м} = 139700 \text{ (кг)} = 139,7 \text{ (т)}$.



Рис.2.4.

Задача. Що вигідніше: купити кавун радіусом 30 см чи три кавуни радіусом 10 см ?

Розв'язання.

Об'єм кавуна обчислимо за формулою об'єму кулі:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

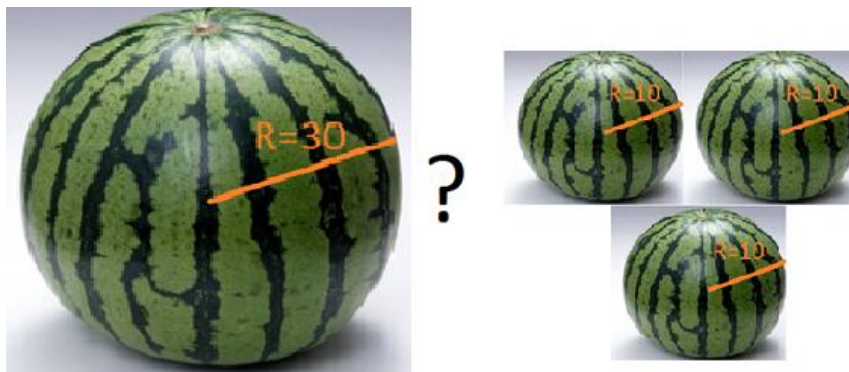


Рис.2.5.

Знайдемо об'єм великого кавуна із радіусом $R=30\text{см}$:

$$V = \frac{4}{3}\pi 30^3 = \frac{4}{3}\pi 27000 = 36000\pi(\text{см}^3).$$

Обчислимо об'єм трьох малих кавунів: $R=10\text{см}$,

$$V = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi 10^3 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi 1000 = 4000\pi(\text{см}^3).$$

Як бачимо, набагато вигідніше купити кавун радіусом 30 см.

Таким чином, ми виокремлюємо як педагогічну умову формування та розвитку здатності до математичного моделювання: підбір таких задач, які враховують інтереси учнів, сучасність, цікавість, а також опираючись на актуальний місцевий матеріал.

2.2.4. Місце і роль дослідницької та проектної діяльності учнів у процесі формування умінь математичного моделювання

У висновках закордонних дослідників, описаних нами у підрозділах 2.1.1 та 2.1.2. вказується *на* необхідності застосування технологій, що базуються на проектах: у вигляді міжпредметних проектів з математики; реалізації можливостей навчання на основі проектів; рекомендується використання проектних тем інтегрованих дисциплін, які відрізняються за часом, обсягом та кількістю. Дослідження українських учених акцентують увагу, що для старших підлітків доцільною буде така організація навчально-виховного процесу, при якій перевага віддавалася б проведенню уроків-лекцій, уроків-семінарів, уроків-конференцій тощо, залученню до написання науково-дослідницьких робіт, виконання проектів.

На нашу думку, основним для реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Широке і системне застосування методу математичного моделювання протягом вивчення всього

курсу математики має стати потужним засобом формування в учнів навичок повсякденного користування математикою.

Організація проектної діяльності учнів у школі є одним із пріоритетів сучасної освіти. Навчальні проекти дозволяють краще враховувати індивідуальні особливості учнів, що сприяє формуванню їх активної та самостійної позиції в навчанні, готовності до саморозвитку, соціалізації. Проектний метод пов'язаний з практичною діяльністю. Значна роль в організації проектної діяльності учнів відводиться інформаційно-комунікаційним технологіям. Метод проектів, як компонент системи освіти, створює особистісну мотивацію в розв'язанні цікавої проблеми. Знайдений спосіб вирішення проблеми часто має практичний характер, а тому може бути соціально значущим як для учня, так і для дорослої людини. Суть методу проектів зводиться до того, що учнів навчають етапам досягнення певної мети, пропонуючи виконати конкретне завдання, тобто учень набуває знання і вміння в процесі спільного з викладачем планування і виконання, практичних завдань-проектів, які поступово ускладнюються.

Одним із відносно складних етапів проектної діяльності з дітьми є етап первинного включення учнів у власну проектну діяльність. На цьому етапі учні навчаються виявляти проблеми, розробляти гіпотези, спостерігати, проводити експерименти, давати визначення поняттям і т.д. Коли учням пропонується завдання, вони починають міркувати, сперечатися, пропонувати ідеї для вирішення проблеми. Учні необхідно розділити на групи, пояснивши, що робота в групах організовується таким чином, що в групі немає лідерів, але є координатор. Всі повинні проявляти активність і вносити свій внесок у загальну справу. В результаті, учні мають глибоко зануритися в досліджувану тему, знайти шлях розв'язання проблеми, тобто мають поповнити свої знання і при цьому сприймати навколишній світ у всьому його різноманітті. Роль вчителя – це роль організатора пізнавальної, дослідницької діяльності учнів.

При виконанні проекту цінні не тільки його результати, а й сам процес, який дозволяє учням відчувати себе творчими особистостями, краще зрозуміти один одного. Вибір форми продукту проектної діяльності – важлива організаційне завдання для учасників проекту. Від його рішення в значній мірі залежить, наскільки виконання проекту буде захоплюючим, захист проекту – презентабельним і переконливим, а запропоновані рішення – корисними для розв'язання обраної соціально значущої проблеми. На завершальному етапі виконання проекту підводяться підсумки роботи учнів, дається якісна оцінка виконаної роботи по здійсненню проекту. Оцінюючи роботу над проектом, враховується будь-який рівень досягнутих результатів, обирається рейтинговий критерій оцінювання, включаючи проміжний контроль на всіх етапах проекту. Критерій самооцінки роботи в групі сприяє утвердженню і відстоюванню своєї життєвої позиції. Критерії оцінки проекту повинні бути зрозумілі учням і оцінюватися має саме робота в цілому, а не тільки презентація результатів.

До організації проектів висуваються такі вимоги:

- проект повинен бути органічно включений у процес навчання і виховання учнів;
- важливо обговорювати реальні проблеми і ставити актуальні завдання, діяльність учнів повинна мати доцільний характер;
- робота учнів повинна бути осмисленою і активною;
- учні повинні вміти чітко формулювати свої думки усно та в письмовому вигляді, аналізувати нову інформацію, брати участь у створенні нових ідей;
- кінцевий вигляд проекту може бути представлений в будь-якій обраній формі.

Особливістю системи виконання проектів є спільна творча робота вчителя і учня. Проектна діяльність учнів дає найкращі результати в старших класах. Метод проектів є відмінним доповненням до традиційних методів навчання математики. У традиційній системі акцент робиться на засвоєнні

готових знань, а самонавчання відбувається за рахунок експлуатації пам'яті.

Метод проектів:

- розвиває інтелект учня, його вміння планувати і відслідковувати послідовність виконуваних дій, засвоювати знання і застосовувати їх в практичній діяльності;
- розвиває творчі здібності і самостійність;
- орієнтований на самостійну діяльність учнів, яка передбачає володіння певними вміннями: аналізу, синтезу, уявного експериментування, прогнозування;
- творчий за самою своєю суттю, так як передбачає сукупність дослідницьких, пошукових, проблемних методів;
- дозволяє навчити учнів умінню отримувати нові знання через свою пізнавальну діяльність.

За допомогою методу проектів можливо навчити:

- виявляти і формулювати проблеми;
- проводити їх аналіз;
- знаходити шляхи їх вирішення;
- працювати з інформацією;
- знаходити необхідне джерело, наприклад, дані в довідковій літературі або в засобах масової інформації;
- застосовувати отриману інформацію для вирішення поставлених завдань.

Введення в навчальний процес методів і технологій проектної діяльності повинні допомогти учням набути вище перераховані навички. Передбачається, що виконуючи проектну роботу, школярі стануть більш ініціативними і відповідальними, підвищать ефективність навчальної діяльності, придбають додаткову мотивацію. Проектний метод навчання чітко орієнтований на реальний практичний результат. Під час роботи будуються нові відносини між учнями, а також між учителем і учнями. Розширюється їх освітній кругозір, зростає стійкий пізнавальний інтерес.

Робота над проектом допомагає учням проявити себе з іншого боку. У них є можливість показати свої організаторські здібності, приховані таланти, а також уміння самостійно здобувати знання, що є дуже суттєвим для організації процесу навчання в сучасній школі.

В 2018 році нами було організоване виконання учнями навчально-дослідницького проекту на тему «Геометрія і футбол». В проекті взяла участь група учнів 9 класу Вінницького обласного спортивно-гуманітарного ліцею-інтернату. Підготовлений проект одержав перемогу (третє місце) на Всеукраїнській Конференції-Олімпіаді геометричної творчості імені В. А. Ясінського, яка відбулася 17 лютого 2018 року у ВДПУ імені Михайла Коцюбинського. Учасники проекту – учні ліцею спортивно-гуманітарного профілю, тому для виконання проекту було обрано спортивний напрям. Зі ста учнів ліцею – 70 учнів на той час займалися різними видами спорту. Але найбільше ліцеїстів займалися футболом – 22 учні, що складало 31% всіх учнів ліцею. Тому основний акцент при виконанні проекту було зроблено на футболі. Учні із неабияким захопленням зрозуміли, що за допомогою математичних моделей можуть бути вирішені певні практичні завдання в футболі, допомагаючи команді та тренерам досягти найвищих результатів. Як засвідчив наш досвід, розв’язування задач про футбол дозволило підвищити інтерес, мотивацію, і як наслідок ефективність вивчення математики, зокрема геометрії. Співпраця з учнями налагоджувалася за допомогою персонального сайту вчителя та соціальних мереж. Всім учням класу були запропоновані для розв’язання геометричні задачі про футбол. Розв’язки кожен надсилав персонально, приховано від інших учасників проекту. Якщо учень розв’язав задачу правильно, він отримував наступну, якщо ні – отримував вказівки на помилки і підказки, як їх виправити. Учні мотивувало і спонукало до роботи те, що вони не знали на якому етапі (яку саме задачу на даний момент розв’язують) решта однокласників.

Наведемо приклади 10 запропонованих задач. Задачі №1-5 є задачами на знаходження площ плоских фігур і можуть бути використані при вивченні

теми «Площа прямокутника» у 8 класі. Футбольне поле, що має форму прямокутника є основним засобом використання геометрії у футболі, тому наступні 6 задач стосуватимуться футбольного поля.

Задача. Розміри футбольних воріт подані на рисунку. Знайдіть площу футбольних воріт.

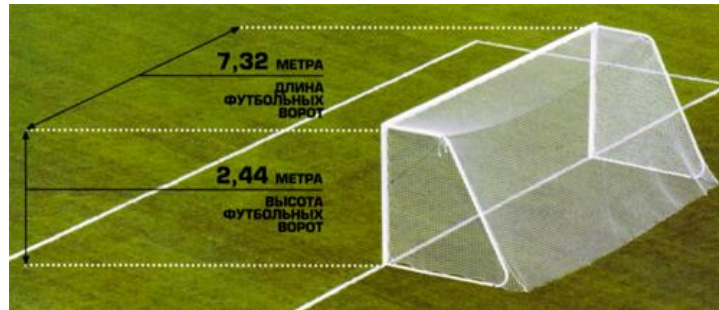


Рис.2.6.

Розв'язання.

Оскільки футбольні ворота мають форму прямокутника, то їх площа знаходиться за формулою: $S = a \cdot b$.

$$S = 7,32 \cdot 2,44 = 17,86 \text{ (м}^2\text{)}$$

Відповідь. 17,86 м²

Задача. Футбольне поле має форму прямокутника, довжина якого в 2 рази більша ширини. Площа футбольного поля дорівнює 7200 м². Знайдіть його ширину.



Рис.2.7.

Розв'язання.

Нехай ширина футбольного поля дорівнює x . Тоді його площа дорівнює: $S = 2 \cdot x \cdot x = 2 \cdot x^2 = 7200$.

Отже, отримали математичну модель задачі, що є квадратним рівнянням:

$$2x^2 = 7200,$$

$$x^2 = 3600, \quad x = +\sqrt{3600}, \text{ або } x = -\sqrt{3600},$$

$x = 60$ м, отже ширина футбольного поля дорівнює 60 м.

Відповідь. 60 м.

Задача. Ширина футбольних воріт дорівнює 8 ярдів, висота – 8 футів. Знайдіть площу футбольних воріт в квадратних футах (один ярд складає три фута).



Рис.2.8.

Розв'язання.

Ширина футбольних воріт дорівнює 8 ярдів, що складає 24 фути, а висота – 8 футів (за умовою). Оскільки футбольні ворота мають форму прямокутника, то їх площа знаходиться за формулою: $S = a \cdot b$.

$$S = 24 \cdot 8 = 192 \text{ (фут}^2\text{)}.$$

Відповідь. 192 фут².

Задача. Для розмітки воротарського майданчика на футбольному полі на відстані 5,5 м від кожної стійки воріт під прямим кутом до лінії воріт углиб поля проводяться два відрізка довжиною 5,5 м. Кінці цих відрізків з'єднуються відрізком, паралельним лінії воріт. Знайдіть площу воротарського майданчика в квадратних метрах, враховуючи, що ширина воріт дорівнює 7,3 м.

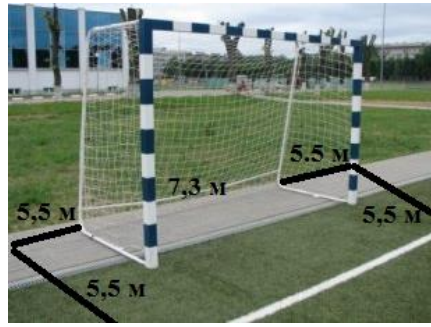


Рис.2.9.

Розв'язання.

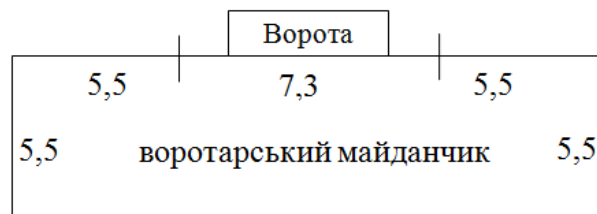


Рис.2.10.

Оскільки воротарський майданчик має форму прямокутника, то його площа знаходиться за формулою: $S = a \cdot b$.

$$S = (5,5 + 7,3 + 5,5) \cdot 5,5 = 18,3 \cdot 5,5 = 100,65 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відповідь: 100,65 м².

Ця ж задача може бути сформульована в інших одиницях вимірювання (в ярдах та футах):

Задача. Для розмітки воротарського майданчика на футбольному полі на відстані 6 ярдів від кожної стійки воріт під прямим кутом до лінії воріт углиб поля проводяться два відрізки довжиною 6 ярдів. Кінці цих відрізків з'єднуються відрізком, паралельним лінії воріт. Знайдіть площу воротарського майданчика в квадратних футах, враховуючи, що ширина воріт рівна 8 ярдам (один ярд складає три фути).

Розв'язання

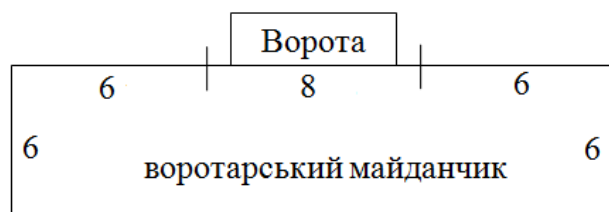


Рис.2.11.

$$S = (6 + 8 + 6) \cdot 6 = 20 \cdot 6 = 120 \text{ (ярд}^2\text{)}.$$

$$120 \text{ ярд}^2 = 120 \cdot 9 = 1080 \text{ фут}^2.$$

Відповідь. 1080 фут².

Задача. Для розмітки штрафного майданчика на футбольному полі на відстані 16,5 м від кожної стійки воріт під прямим кутом до лінії воріт у глиб поля проводяться два відрізка довжиною 16,5 м. Кінці цих відрізків з'єднуються відрізком, паралельним лінії воріт. Знайдіть приблизну площу штрафного майданчика в квадратних метрах, враховуючи, що ширина воріт дорівнює 7,3 м. У відповіді вкажіть ціле число квадратних метрів.



Рис.2.12.

Розв'язання.

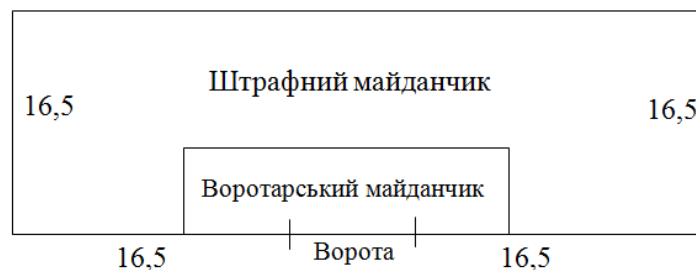


Рис.2.13.

Оскільки штрафний майданчик має форму прямокутника, то його площа знаходиться за формулою: $S = a \cdot b$.

$$S = (16,5 + 7,3 + 16,5) \cdot 16,5 = 40,3 \cdot 16,5 = 664,65 \approx 665 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відповідь. 665 м².

Ця ж задача може бути сформульована в інших одиницях вимірювання (в ярдах):

Задача. Для розмітки штрафного майданчика на футбольному полі на відстані 18 ярдів від кожної стійки воріт під прямим кутом до лінії воріт у глиб поля проводяться два відрізка довжиною 18 ярдів. Кінці цих відрізків з'єднуються відрізком, паралельним лінії воріт. Знайдіть приблизну площу штрафного майданчика в квадратних метрах, враховуючи, що ширина воріт дорівнює 8 ярдів (один ярд приблизно дорівнює 0,9 м). У відповіді вкажіть ціле число квадратних метрів.

Розв'язання.

Математичною моделлю задачі є наступна схема:

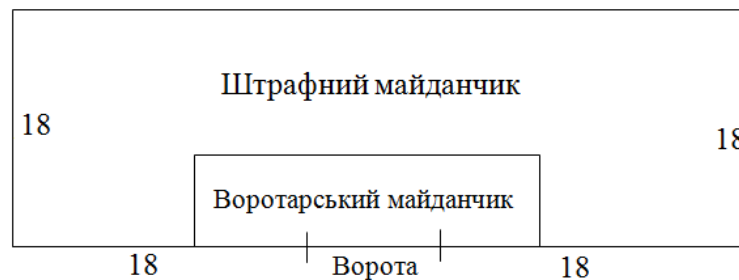


Рис.2.14.

Площа штрафного майданчика дорівнює 792 квадратних ярди. В квадратних метрах вона приблизно дорівнює:

$$792 \cdot 0,81 = 641,52 \approx 642 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відповідь. 642 м².

Як бачимо, при розв'язуванні даної задачі маємо похибку, для більш точних розрахунків потрібно брати

1 ярд=0,9144 м. Наступна задача є задачею на знаходження периметра прямокутника і може бути використана при вивченні теми «Прямокутник» у 8 класі.

Задача. Довжина футбольного поля 105 м, а ширина 68 м. Скільки потрібно часу футболісту щоб оббігти по кромці все поле, якщо два його кроки приходиться на 1 секунду, а ширина кроку 60 см.



Рис.2.15.

Розв'язання.

Футболіст біжить по кромці поля, тому довжина його шляху дорівнює периметру футбольного поля, що має форму прямокутника.

Формула $P = 2(a + b)$ є математичною моделлю даної задачі.

$$P = 2 \cdot (105 + 68) = 346 \text{ (м)}.$$

Так як, ширина кроку футболіста 60 см, що складає 0,6 м, то за 1 с він пробігає $0,6 \cdot 2 = 1,2$ (м).

Отже, $346 : 1,2 \approx 288,3$ (с) потрібно футболісту, щоб подолати весь периметр поля. Тобто $288,3 : 60 = 4,8$ (хв).

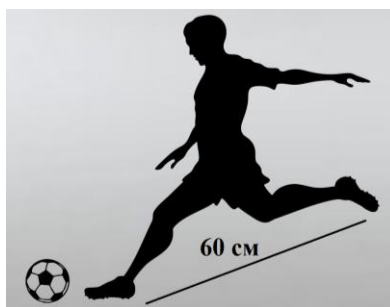


Рис.2.16.

Відповідь. 4,8 хвилини.

Для збільшення кількості однопланових задач такого типу числові дані у ній можуть бути змінені наступним чином:

Задача. Довжина футбольного поля 110 м, а ширина 70 м. Скільки часу буде потрібно футболістові, щоб оббігти по кромці все поле, якщо два його кроки припадають на 1 секунду, а ширина кроку 90 см.

Розв'язання.

$$P = 2 \cdot (110 + 70) = 360 \text{ (м)}.$$

Так як, ширина кроку футболіста 90 см, що складає 0,9 м, то за 1 с він пробігає $0,9 \cdot 2 = 1,8$ (м).

Отже, $360 : 1,8 = 200$ (с) йому потрібно, щоб подолати весь периметр поля. Тобто $200 : 60 = 3, (3)$ (хв), або 3 хв 20 с.

Відповідь. 3 хвилини 20 секунд.

Велике значення у грі в футбол мають кути. Вони відіграють важливу роль у формі нападу та захисту. Кути вводяться в гру з образу, у частині гри, яка називається маршрутами. Маршрути є заздалегідь визначеним шляхом, по якому повинен працювати нападаючий для того, щоб захисник не зміг перехопити м'яч. Коли захисник намагається перехопити м'яч, він повинен визначити, який кут буде найкращим для перехоплення м'яча. Також, якщо хтось із нападників переносить м'яч, то захист повинен визначити найкращий кут шляху, щоб перехопити його. Наступні задачі є задачами на знаходження кутів, тобто на використання тригонометричних функцій.

Задача. Ширина футбольних воріт дорівнює 7,3 м. Для розмітки воротарського майданчика на відстані 5,5 м від кожної стійки воріт під прямим кутом до лінії воріт вглиб поля проводяться два відрізки довжиною 5,5 м кожен. Кінці цих відрізків з'єднуються відрізком, паралельним лінії воріт. Знайдіть кут, під яким видно ворота з кута воротарського майданчика. У відповіді вкажіть ціле число градусів.

Розв'язання.

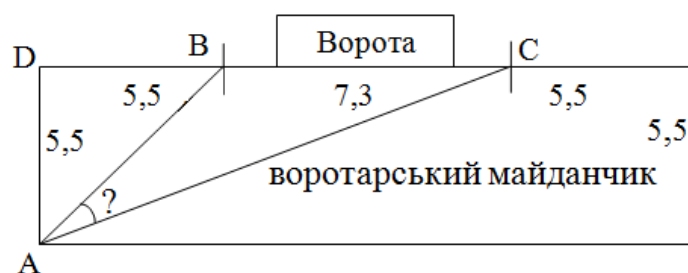


Рис.2.17.

$\triangle ADB$ рівнобедрений, так як $AD = DB = 5,5$.

Тому $\angle DAB = 45^\circ$.

З прямокутного $\triangle ADC$: $\operatorname{tg}\angle DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{5,5+7,3}{5,5} \approx 2,33$.

За таблицею тригонометричних функцій знаходимо, що $\angle DAC = 67^\circ$.

Оскільки, $\angle BAC = \angle DAC - \angle DAB = 67^\circ - 45^\circ = 22^\circ$.

Отже, шуканий кут дорівнює 22° .

Відповідь. 22° .

Ця ж задача може бути сформульована в інших одиницях вимірювання (в ярдах):

Задача. Ширина футбольних воріт дорівнює 8 ярдам. Для розмітки воротарського майданчика на відстані 6 ярдів від кожної стійки воріт під прямим кутом до лінії воріт вглиб поля проводяться два відрізка довжиною 6 ярдів кожен. Кінці цих відрізків з'єднуються відрізком, паралельним лінії воріт. Знайдіть кут, під яким видно ворота з кута воротарського майданчика. У відповіді вкажіть ціле число градусів.

Весь хід розв'язування буде аналогічним до попередньої задачі, з однією відмінністю: $\operatorname{tg}\angle DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{6+8}{6} \approx 2,3(3)$.

Відповідь. 22° .

Задача. Ширина футбольних воріт дорівнює 7,32 м. Відстань від 11-метрової відмітки до лінії воріт дорівнює 10,97 м. Знайдіть кут, під яким видні ворота з 11-метрової відмітки. У відповіді вкажіть ціле число градусів.



Рис.2.18.

Розв'язання.

В рівнобедреному трикутнику ABC $AC = BC$.

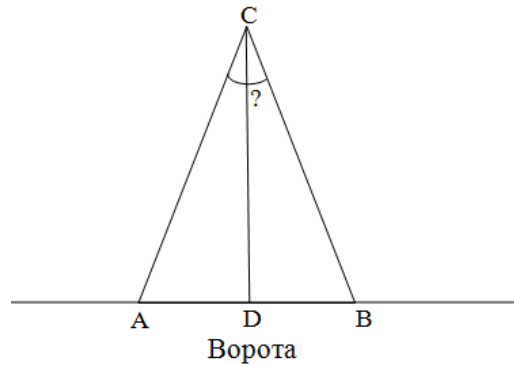


Рис.2.19.

За теоремою Піфагора знаходимо, що

$$AC^2 = AD^2 + CD^2, \text{ де } AD = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 7,32 = 3,66.$$

$$AC^2 = (3,66)^2 + (10,97)^2 = 13,4 + 120,34 = 133,74.$$

За теоремою косинусів, маємо:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB,$$

$$58 = 133,74 + 133,74 - 2 \cdot 133,74 \cdot \cos \angle ACB,$$

$$\text{звідси } 2 \cdot 133,74 \cdot \cos \angle ACB = 267,48 - 53,58 = 213,9,$$

$$\text{тоді } \cos \angle ACB = 213,9 : 267,48 = 0,7997 \approx 0,8.$$

Використовуючи таблицю тригонометричних функцій знаходимо, що $\angle ACB = 37^\circ$.

Відповідь: 37° .

Задача. Футбольний м'яч знаходиться в точці А футбольного поля на відстанях 23 м і 24 м від основ В і С стійок воріт. Футболіст направляє м'яч у ворота. Знайдіть кут α влучення м'яча у ворота, якщо ширина воріт дорівнює 7,3 м.

Розв'язання.

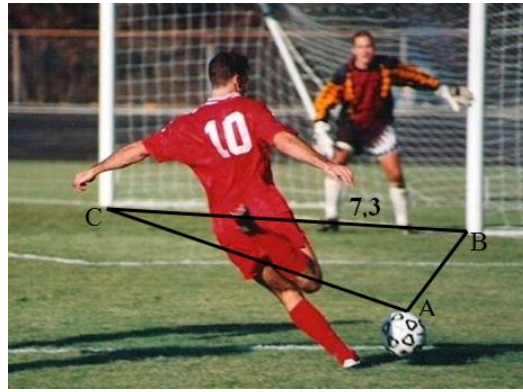


Рис.2.20.

Розглянемо трикутник ABC, вершинами якого є точка A розташування м'яча і точки B і C основи стійок воріт. За умовою $c = AB = 23$ м, $b = AC = 24$ м і $a = BC = 7,3$ м. Ці дані дозволяють розв'язати трикутник ABC і знайти кут α , рівний куту A. За допомогою теореми косинусів визначаємо $\cos \angle A$:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{24^2 + 23^2 - 7,3^2}{2 \cdot 24 \cdot 23} = \frac{576 + 529 - 53,29}{1104} = \frac{1051,71}{1104} \approx 0,953. \text{ Кут } \alpha \text{ знаходимо по таблиці: } \alpha \approx 18^\circ.$$

Відповідь. $\alpha \approx 18^\circ$.

Задача. Ширина футбольних воріт дорівнює 7,3 м. Для розмітки штрафного майданчика на футбольному полі на відстані 16,5 м від кожної стійки воріт під прямим кутом до лінії воріт вглиб поля проводяться два відрізки, довжиною 16,5 м кожен. Кінці цих відрізків з'єднуються відрізком, паралельним лінії воріт. Знайдіть кут, під яким видно ворота з кута штрафного майданчика. У відповіді вкажіть ціле число градусів.

Розв'язання.

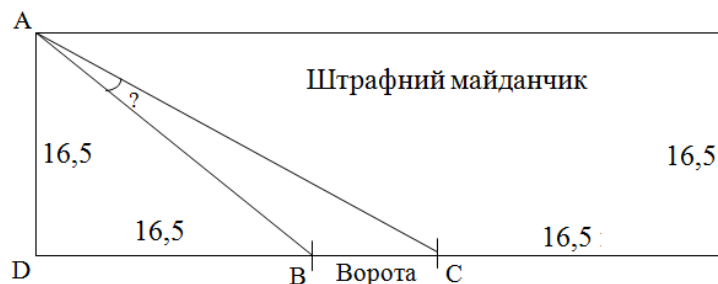


Рис.2.21.

$\triangle ADB$ рівнобедрений, так як $AD = DB = 16,5$. Тому $\angle DAB = 45^\circ$.

З прямокутного $\triangle ADC$: $\operatorname{tg}\angle DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{16,5+7,3}{16,5} \approx 1,44$.

За таблицею тригонометричних функцій знаходимо, що $\angle DAC = 55^\circ$.

Оскільки, $\angle BAC = \angle DAC - \angle DAB = 55^\circ - 45^\circ = 10^\circ$.

Отже, шуканий кут дорівнює 10° .

Ця ж задача може бути сформульована в інших одиницях вимірювання (в ярдах):

Задача. Ширина футбольних воріт дорівнює 8 ярдам. Для розмітки штрафного майданчика на футбольному полі на відстані 18 ярдів від кожної стійки воріт під прямим кутом до лінії воріт вглиб поля проводяться два відрізки, довжиною 18 ярдів кожен. Кінці цих відрізків з'єднуються відрізком, паралельним лінії воріт. Знайдіть кут, під яким видно ворота з кута штрафного майданчика. У відповіді вкажіть ціле число градусів.

Хід розв'язування цієї задачі буде аналогічним до попередньої задачі, з однією відмінністю: $\operatorname{tg}\angle DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{18+8}{18} \approx 1, (4)$.

Відповідь. 10° .

Метою даного проекту було не лише підвищити мотивацію учнів спортивного профілю до навчання геометрії за допомогою нових технологій, а й показати значущість і практичність геометричних знань у повсякденному житті й у подальшій діяльності. Важливо було домогтися того, щоб учні навчилися пропонувати власні ідеї, не боялися висловлювати свої думки, вміли логічно міркувати і критично мислити.

Для цього в межах проекту школярам було запропоноване дослідницьке завдання: створити задачі з геометрії, які б безпосередньо стосувалися футболу і всього, що з ним пов'язано (футбольне поле, футбольні ворота, футбольний м'яч, та ін.). Приємно вразило те, що не лише найсильніші учні класу працювали наполегливо. Зразком для учнів були ті задачі, які вони розв'язували дистанційно на першому етапі проекту.

Добірка задач, самостійно створених учнями в умовах нашого проекту:

- Радіус центрального кола футбольного поля становить 9 м. Знайдіть площу центрального кола.
- Радіус центрального кола футбольного поля становить 9 м. Знайдіть, скільки відсотків становить центральне коло футбольного поля його площі, якщо розміри поля: 65 x 100 м.
- Футболіст оббігає по кромці 2 сторони футбольного поля, потім звертає і біжить по діагоналі. Перша сторона трикутника дорівнює 100 м, друга – 75 м. Скільки кілометрів пробіг футболіст?
- На футбольному полі розташовані дві команди. Кожна команда займає свою половину поля. Знайдіть яку площу займає одна команда. Якщо довжина поля 120 м, а його ширина 7000 см.
- За міжнародними стандартами розміри поля повинні складати в довжину мінімум 100 метрів, завширшки 65 метрів. Знайдіть площу футбольного поля за міжнародними стандартами.
- Гравцем пошкоджена сітка футбольних воріт. Скільки коштуватиме команді відновити ворота, якщо квадратний метр сітки коштує 150 грн. Ширина рулону – 3 м. Ворота мають стандартні розміри: ширина воріт – 7,32 м, а висота – 2,44 м.
- Для посіву 1 кв. м необхідно 40-80 г насіння. Яка мінімальна вартість загальної кількості насіння необхідної для засіву футбольного поля розмірами 80 x 110 м. Є різні розфасовки насіння для спортивного газону: 1 кг – 187,5 грн, 20 кг – 3125 грн.
- Скільки кв. м сітки потрібно придбати, щоб обгородити футбольне поле розмірами 69 x 104 м, якщо висота огорожі – 4 м?
- Щоб воротар не зміг відбити м'яч, футболіст має влучити у верхній кут футбольних воріт. Знайдіть відстань, яку має подолати м'яч, якщо футболіст стоїть в лівому куті штрафного майданчика, а м'яч летить у правий верхній кут воріт.
- Який об'єм повітря міститься у футбольному м'ячі діаметром 22 см?

- Скільки кв. м матеріалу потрібно для виготовлення футбольного м'яча, якщо довжина кола становить 69 см?
- Щоб виготовити футбольний м'яч необхідно 32 клаптики шкіри: 20 шестикутників білого кольору та 12 п'ятикутників чорного кольору. Скільки кв. м шкіри кожного кольору потрібно придбати. Якщо діаметр м'яча 22 см?
- Власник футбольного поля вирішив застелити його штучним покриттям, але забув записати довжину свого поля. В його блокноті є лише дані про ширину – 45 м. та площу 4500 м². Як він може дізнатися довжину свого поля?
- Під час тренування тренер наказав футболістам пробігти поле по кромці 3 рази. Яку відстань пробіжать футболісти, якщо довжина поля 95 м., а площа 4275 м².
- Довжина футбольного штрафного майданчика у 2,44 рази більше ширини. Знайдіть периметр цього майданчика, якщо його площа складає 664,95 м².
- Скільки штучного газону потрібно придбати, щоб застелити поле розміром 73 x 112 м.
- Під яким кутом потрібно забити м'яч? Розв'яжи задачу за рисунком.

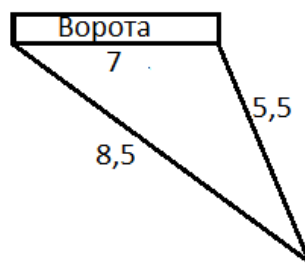


Рис.2.22.

- Під час тренування воротареві стало цікаво який діаметр має центральне коло футбольного поля. Він знає, що радіус півкола штрафного майданчика дорівнює 9,15 м., і він рівний радіусу центрального кола. Як воротареві дізнатися діаметр центрального кола?

- Під час продумування стратегії футбольної гри, тренер наказав рухатися Сашкові, Валері та Дмитру за схемою, яку він намалював вказавши напрям кожного гравця. Сказавши, що Валері потрібно пробігти 8 м. і передати м'яч Дмитрові, який має пробігти 15 м. і передати м'яч Сашкові. Тренер не сказав, яку відстань має подолати Сашко. А ти знаєш?

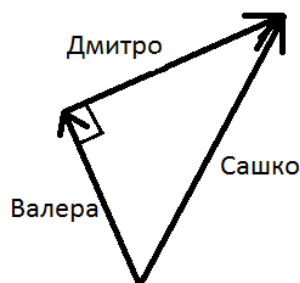


Рис.2.23.

Нам вдалося домогтися того, що учні навчилися пропонувати власні ідеї, не боялись висловлювати свої думки, намагалися логічно, зокрема, критично мислити. У процесі виконання вищеописаного проекту стало зрозумілим, що нам вдалося створити умови з хорошими можливостями для переконання учнів у тому, що через математику лежить шлях до вдосконалення багатьох обставин оточуючої дійсності.

Значні можливості для формування здатності учнів до математичного моделювання вбачаємо ми в умовах позакласної роботи з математики. Математичне моделювання широко використовується для розв'язування задач різних галузей науки, економіки, виробництва. Практичні вміння і навички з математики необхідні, зокрема, для майбутньої професійної діяльності випускників школи. Формування здатності учнів до математичного моделювання має бути одним з першочергових завдань, які має ставити перед собою вчитель математики. Однак досягти бажаного результату в повній мірі неможливо використовуючи лише уроки математики в школі. Однією із найбільш ефективних форм позакласної роботи, у цьому контексті, ми вважаємо гурткову роботу з учнями. Основою організації і проведення математичного гуртка в школі має бути принцип добровільності та доступності. У роботі гуртка мають брати участь усі охочі, а не лише учні,

використовувати й активні та інтерактивні прийоми: мозковий штурм, математичний бій, карусель, марафон та інші. На нашу думку, варто практикувати домашні завдання за тематикою гурткової роботи. Серед завдань мають бути як прості, аналогічні тим, що розглядалися на занятті, так і більш складні, які вимагають від учнів певних зусиль, наполегливості або навіть дотепності. Такі завдання допоможуть не дуже сильним, але старанним учням добитися певних успіхів і порадіти здобутим результатам, а з іншого боку, зрозуміти, що не все так просто. Кожне завдання, запропоноване для виконання вдома, обов'язково треба розібрати на наступному засіданні гуртка, обговорити всі способи розв'язання, які знайдені учнями. При методично грамотній роботі вчителя, викликаючи інтерес до предмета, математичні гуртки сприяють розширенню світогляду, розвитку творчих здібностей учнів, прищепленню навичок самостійної роботи і тим самим підвищенню якості математичної підготовки учнів.

Зусилля вчителів математики, спрямовані на якісну позакласну роботу, мають значний вплив на мотиви та результати навчання математики учнів в школі. Важливо забезпечити таку взаємодію між класними та позакласними заняттями з математики, щоб весь навчально-виховний процес був єдиним цілим, коли класні та позакласні заняття, зберігаючи свої специфічні особливості, цілеспрямовано впливають один на одного, сприяючи підвищенню спільної ефективності навчання, формуванню та розвитку математичної компетентності учнів.

Широке і системне застосування методу математичного моделювання не лише на уроках математики, а й у позакласній роботі має стати потужним засобом формування в учнів навичок використання математичних знань та умінь.

2.3. Організація превентивної діяльності у процесі формування в учнів умінь математичного моделювання

2.3.1. Сутність превентивної діяльності у процесі формування умінь математичного моделювання

Термін «превентивна освіта» був запропонований в 1985 році ЮНЕСКО, а концепція превентивної освіти була вперше представлена на другому Міжнародному конгресі цієї організації «Освіта та інформатика» в 1996 році. Суть концепції полягає в тому, що система освіти має зазнати таких змін у змісті та методології навчального процесу, щоб бути здатною своєчасно готувати людей до нових умов існування, давати їм такі знання та вміння, які дозволили б не тільки успішно адаптуватися до нового соціального й інформаційного середовища, але й активно впливати на нього [33]. Із аналізу відповідних праць В. Андрущенка, Н. Ващекіна, Т. Воронцової, Б. Гершунського, Ю. Кулюткіної, М. Култаєвої, М. Романенка та інших можна зробити висновок, що основне завдання освіти нині полягає в тому, щоб забезпечити перехід до нової освітньої моделі, яка має підготувати людину до життя в суспільстві знань, де визначальну роль відіграють інтелектуальні ресурси та інновації, де людина знаходиться в умовах певної невизначеності.

Превентивна педагогіка – (від лат. *preventus* – випереджувальний) – педагогіка, яка вивчає причини формування і розвитку відхилень у поведінці людини і методи їх попередження, подолання та виправлення.

Аналогічно до функцій превентивного виховання, достатньо описаних у превентивній педагогіці, можна виокремити функції превентивного навчання:

- діагностична – виявлення причин відхилень у навчанні;
- коректувальна – виправлення виявлених помилок;
- координувальна – об'єднання різних навчальних впливів для покращення результатів навчання;

- прогностична – передбачення можливих утруднень у процесі розвитку необхідних компетентностей.

Таким чином, превентивна діяльність у навчанні має організовуватися як процес взаємодії вчителя та учнів, у ході якого, шляхом спеціально підібраних методів, виявляється природа та походження помилок, а також організовується робота з попередження або ліквідації цих помилок.

Превентивна діяльність учителя математики може бути схарактеризована як діяльність, яка має упередити математичні помилки учнів, виправити допущені, з'ясувавши причини їх появи, обравши для цього відповідні методи, організаційні форми та засоби навчання математики.

Ми погоджуємося з висновками дисертаційного дослідження Л. М. Благодир [4], що слід виокремити важливий компонент професійної культури вчителя математики - превентивну культуру, яка має включати наступні уміння вчителя математики:

- систематизувати помилки, об'єднуючи їх в групи за спільністю причин появи, спільністю методики роботи над ними;
- добирати раціональні методи навчання, які б зменшили можливість виникнення помилок, ефективно поєднувати традиційні прийоми навчання з новими;
- використовувати сучасні технології для діагностики, аналізу та виправлення наявних помилок;
- виховувати в учнів критичність мислення, вміння виявляти помилки і неповноту міркувань, будувати контрприкладі, узагальнювати результати;
- організовувати і проводити контроль та самоконтроль навчально-пізнавальної діяльності учнів;
- встановлювати логічні зв'язки між новим і вивченим навчальним матеріалом;
- постійно дотримуватися принципу наступності у навчанні математики;

- сприяти свідомому та міцному засвоєнню знань, організувати поточне і тематичне повторення набутих знань та навичок з необхідною систематизацією та узагальненням їх;

- здійснювати на практиці облік та систематизацію математичних помилок учнів, розробляти та здійснювати заходи з попередження та ліквідації цих помилок;

- розвивати логічне, критичне, творче мислення учнів, вміння здійснювати самоперевірку виконаних завдань, використовуючи різні методи і прийоми.

Головним завданням формування превентивної діяльності учнів профільної школи є розвиток у них уміння самостійно контролювати власну діяльність: від її планування до самоконтролю і самооцінки.

З точки зору нейробіології, помилки грають визначальну роль у процесі навчання [46]. Джейсон Мозер – доцент кафедри психології Мічиганського університету – досліджував нейронні механізми, які лежать в основі різних типів реакцій на помилки (результати досліджень опубліковані в 2011 році в статті *Mind Your Errors: Evidence for a Neural Mechanism Linking Growth Mind-Set to Adaptive Posterror Adjustments*) [80]. Метою експериментів було дослідження взаємозв'язку: як від типу мислення людини залежить її реакція на помилку. Згідно з дослідженнями Мозера: чим активніша наша реакція на помилку, тим ефективніше ми навчаємось. У людей, які не боялися помилок, амплітуда сигналів усвідомленої реакції на помилку дорівнювала 15 показникам, у той час, як у людей, які констатували страх щодо помилок, амплітуда не перевищувала й 5. Іншими словами, це означає, якщо людина, відкрита до похибки, помиляється, вона тут же концентрується й аналізує помилку. Якщо ми не дозволяємо собі помилок, то ми фокусуємо увагу на тому, як обійти помилку, ігноруючи аналіз і виправлення.

За результатами експериментальних досліджень Мозера зроблено висновки:

- ✓ Навчання – це набуття нового досвіду. У процесі набуття досвіду помилки неминучі, бо вони – невід'ємна складова процесу.
- ✓ Саме похибки примножують нейроактивність. Залежно від нашого ставлення до помилок, вони або викликають стрес, або надають людині аналітичних здібностей.
- ✓ Здатність нашого мозку до розвитку обмежена лише нашими внутрішніми бар'єрами, які ми здатні подолати за умови, що припинимо боятися помилок.
- ✓ Якщо ми навчимося сприймати власні похибки як спосіб для навчання, то зможемо швидко аналізувати досвід, який отримуємо й, відповідно, ефективніше розвиватись.
- ✓ Страх помилитися сильно впливає на навчальний процес, тому що буквально блокує бажання вивчати нове, оскільки незвідане – це завжди ризик припуститися помилки.

Науковці планують розробити програму, яка б допомогла людям повірити у власні можливості й «витягати» зі своїх помилок досвід, щоб не припускати таких помилок у майбутньому.

При аналізі помилок учнів, заснованому на психолого-дидактичних закономірностях, мають враховуватися внутрішні процеси навчальної діяльності учнів, і зовнішні умови, які впливають на ці процеси. Психологічний аналіз помилок учнів у процесі навчання математичному моделюванню має на меті розкрити природу і пояснити причини появи тієї або іншої помилки. Завдання методики навчання математики через урахування природи і причин появи помилок — вказати шляхи їх попередження і усунення. Психологічні закономірності для аналізу помилок при навчанні різних предметів одним з перших почав використовувати П.Я.Шеварьов [51]. Ним було доведено, що міра усвідомлення деякого поняття, яке вивчається, знижується, якщо в процесі діяльності учнів дотримуються трьох умов:

- 1) учень виконує завдання одного типу;

- 2) в них незмінно повторюється деяка особливість;
- 3) її усвідомлення не обов'язкове для здобуття правильного результату.

Таким чином, в учня може сформуватися помилкова асоціація, яка і призводить до появи того або іншого типу помилок під час розв'язування задач і вправ. Опіраючись на ці результати, можна теоретично прогнозувати масові помилки учнів і вживати заходи щодо попередження цих помилок. Практика свідчить, що кількість помилок залежить здебільшого від характеру системи вправ, які пропонуються учням для виконання. Як засвідчують результати наших досліджень, зміни цієї системи (в одних випадках незначні, в інших — істотні) дозволяють досягати різкого поліпшення у формуванні умінь і навичок учнів з математичного моделювання і попередження низки характерних помилок. Здійснюючи психологічний і дидактичний аналіз помилок учнів при навчанні математичному моделюванню, ми, зокрема, з'ясували, які умови і причини забезпечують правильне виконання учнями навчальних завдань, які причини і чинники спричиняють чи можуть спричинити помилкові виконання завдань. Учні виконують конкретне завдання з помилками або зовсім його не виконують у тому випадку, коли відсутня хоча б одна умова, яка забезпечує правильне його виконання. Помилкова дія учня може бути у двох випадках:

- 1) коли в учня не повністю актуалізується правильний ланцюг асоціацій, тобто відсутня якась ланка, яка є необхідною при виконанні завдання;
- 2) коли в учня актуалізується помилкова асоціація.

Для виправлення помилкових дій учнів у першому випадку слід перевірити склад і міцність усіх ланок правильної асоціації, знайти відсутню ланку та за допомогою спеціальної системи задач викоринити помилку. У другому випадку від учителя вимагається виявити помилкову асоціацію, яка актуалізувалася в мисленні учня, провести діагностику появи помилки такого роду, вказати шляхи усунення і заміни правильною асоціацією. Тому найбільш важливою в процесі формування в учнів умінь математичного моделювання вважаємо роботу вчителя математики щодо попередження

помилки — правильно дібрана система задач, прямі вказівки, які попереджують можливі неправильні дії учнів, продумана методика розв'язування кожної задачі.

Відомо, що допущена учнем помилка має деяку стійкість і для усунення помилок у навчанні математичному моделюванню слід докласти значні зусилля. Ми вважаємо необхідною та можливою превентивну діяльність вчителя математики старшої профільної школи з виявлення помилок учнів при розв'язуванні текстових задач, їх причин, а також ліквідації помилок, які мали місце при розв'язуванні задач на рух, на сумісну роботу, на відсотки при вивченні в основній школі систем рівнянь та дробово-раціональних рівнянь. Таку позицію ми підкріплюємо висновками закордонних дослідників, описаних нами у підрозділах 2.1.1 та 2.1.2. Зокрема:

- ✓ діяльність та роль вчителів математики для успішного формування та розвитку умінь математичного моделювання на уроках математики є важливою;
- ✓ моделювання визнається важким для учнів;
- ✓ використання моделювання та застосувань в старшій школі покращує розуміння учнями математичних понять і спонукає їх до вивчення математики;
- ✓ компетентність з математичного читання є необхідною умовою успішної роботи над задачами із моделюванням;
- ✓ одним із важливих аспектів у навчанні моделюванню є зв'язок між компетентністю моделювання, з одного боку, та різними видами інших компетентностей учня, з іншого боку.

У підрозділі 1.3 ми розглядали психолого-педагогічні передумови формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи. Акцентуємо увагу, що управління учбовою діяльністю старшокласників має полягати у створенні умов для розвитку потреб, мотивів і цілей діяльності. На відміну від підліткового віку, діяльність старшокласників зумовлюється не ставленням до вчителя, а інтересами, нахилами учня, намірами отримати

певну професію. У старшому шкільному віці свідомо і цілеспрямовано формуються такі якості характеру, як сила волі, витримка, наполегливість, самоконтроль, обдуманість, критичність тощо. В учнів старшої школи розвивається здатність тривало зосереджуватись на пізнавальних об'єктах, переборювати дію сильних відволікаючих подразників, розподіляти й переключати увагу. Важливо також, що збільшується обсяг уваги, здатність довго зберігати її інтенсивність і переключатися з одного предмету на інший. Зазначимо також, що увага стає більш вибірковою, залежить від спрямованості інтересів. Пам'ять старшокласників характеризується подальшим зростанням довільності та продуктивності логічного запам'ятовування, відбувається спеціалізація пам'яті, пов'язана з провідними інтересами старшокласників та їх намірами щодо вибору майбутньої професії. Таким чином, з'являються непогані умови для ефективної превентивної діяльності вчителя математики з формування та розвитку в учнів умінь математичного моделювання.

2.3.2. Прийоми та засоби превентивної діяльності вчителя та учнів на уроках математики в процесі формування в учнів умінь математичного моделювання

Основна складність для учнів у процесі математизації тексту прикладної задачі полягає в правильній побудові математичної моделі, якою може бути рівняння, нерівність або їх системи, функції тощо. Для того щоб переформулювати зміст текстової задачі мовою математики, учням необхідно ретельно прочитати і правильно зрозуміти задачу, формалізувати запитання в ній, виразити шукані величини за допомогою відомих величин та введених змінних. На цьому етапі в учнів часто виникають різноманітні за характером проблеми. Іноді ці проблеми пов'язані з нерозумінням фізичних, хімічних, економічних термінів, законів, залежностей. Далеко не всі учні чітко усвідомлюють співвідношення між відстанню, швидкістю і часом в

умовах рівномірного та нерівномірного руху, між концентрацією речовини і її часткою у сумішах, між обсягом виконаної роботи і продуктивністю праці тощо. Учні відчують труднощі у визначенні швидкості зближення об'єктів при русі назустріч, або в одному напрямку, погано орієнтуються в русі по колу, відчують труднощі у виборі одиниць вимірювання при розв'язуванні задач на рух та спільну роботу. Також варто мати на увазі, що в процесі складання математичної моделі учні відволікаються на несуттєві для конкретної задачі властивості об'єктів, на другорядні умови, що не впливають на розв'язування задачі. Нагадаємо, що в старшокласників зростає роль післядовільної уваги, яка виявляється за умови, що учіння спонукається спеціальними інтересами. Тому в старшій школі важливо зосередити увагу на актуальних задачах, з точки зору інтересів учнів. Нами створені та апробовані авторські, актуальні нині для побуту учнів задачі, які вчитель математики старшої школи може використовувати у процесі превентивної діяльності з розвитку умінь математичного моделювання в старшокласників:

1. Одним із найсуттєвіших джерел економії коштів є ощадливе використання електроенергії. Скільки ви зможете зекономити за рік, якщо відмовитесь від використання телевізора в своїй родині? Враховуючи, що 1 кВт/год електроенергії коштує 1 гривню, (а один телевізор за рік споживає електроенергії близько 300 кВт/год), послуги кабельного телебачення складають 100 гривень за місяць.
2. Вартість учнівського проїзного квитка на місяць складає 100 грн. А вартість квитка на одну поїздку складає 4 грн. Оксана ходить до школи п'ять разів на тиждень і два рази на тиждень в художню школу. Чи вигідно їй придбати проїзний квиток і якщо так, то скільки грошей за місяць вона може заощадити?
3. В квартирі встановлений прилад обліку витрат холодної води (лічильник). 1 червня лічильник показував витрати 178 куб. м. води, а 1 липня – 189 куб. м. Яку суму повинен сплатити власник квартири за

- холодну воду за червень, якщо ціна за 1 куб. м. холодної води складає 8 грн 60 коп?
4. Існує думка, що купувати товари в інтернет магазині дешевше. В магазині «Мандрівник» термос Tramp коштує 720 грн. Для того щоб придбати термос у магазині покупцеві потрібно скористатися маршрутною, вартість поїздки в якій складає 6 грн. Відділення Нової пошти знаходиться біля будинку покупця. Цей же Термос в інтернет магазині коштує 685 грн. Вартість доставки Новою поштою складає від 20 до 50 грн. Крім того, при отриманні товару на пошті потрібно сплатити 2% від суми + 20 грн. Якщо ж оголошена вартість товару складає більше 200 грн, то ще слід сплатити 0,5% від оголошеної вартості. Де вигідніше покупцеві здійснити покупку: в магазині чи інтернет магазині?
 5. За сезон сім'я може зібрати 200 кг горіхів. Горіхи нечищені приймають по ціні 35 грн за кілограм. Вартість очищених горіхів складає 120 грн/кг. Але на 100 кг нечищених горіхів – 60 кг відходів. Які горіхи варто здавати чищені чи ні, і який максимальний прибуток може отримати сім'я за свій урожай?
 6. Ізюм отримують в процесі сушки винограду. Скільки кілограмів ізюму можна одержати з 16 кг винограду, якщо виноград містить 90% води, а ізюм – 5% води. Розрахуйте, що вигідніше придбати готовий ізюм на ринку, якщо його вартість складає 70 грн за кілограм, чи виготовивши його в домашніх умовах використовуючи сушарку. Скільки можна заощадити коштів? Важливо: номінальна споживана потужність сушарки 0,6 кВт, тариф за електроенергію складає 0,9 грн/кВт до 100 кВт, та 1,68 грн/кВт поверх 100 кВт. Для висушування вказаної кількості винограду потрібно дві доби. Вартість винограду складає 35 грн/кг.
 7. Для того щоб дістатися до університету студенту потрібно здійснити пересадку трамвай-тролейбус, або прямим маршрутним таксі, вартість

поїздки в якому складає 6 грн. Студентський квиток на трамвай-тролейбус коштує 170 грн. Яким чином студент зможе заощадити кошти?

8. У Вінницькому музеї моделей транспорту представлений макет автомобіля, побудованого у відношенні 1:87 до оригіналу, має висоту 2 см. Якою є висота автомобіля-оригіналу?
9. У зв'язку з подорожчанням бензину в таксиста постало запитання: чи варто продовжувати займатися цією справою? Для розрахунку таксист взяв останній місяць, за який він проїхав 4000 км. Вартість 1 літру бензину – 32 гривні. Витрати бензину на 100 км в середньому – 9 літрів. Крім витрат на пальне, таксист витратив 400 гривень на паливно-мастильні матеріали та 1800 гривень на амортизацію. При якому тарифі на проїзд чистий прибуток таксиста складе не менше 18000 гривень?
10. Потяг Львів-Маріуполь відправляється в 01:18, а прибуває в 06:30 на наступний день. Скільки годин потяг знаходиться в дорозі?

Розглянемо розв'язування окремих із цих задач, оскільки маємо на меті показати, що результатом превентивної діяльності в профільній школі має стати усвідомлення учнями того, що математичною моделлю може бути математичний вираз, або рівняння, або система рівнянь, або нерівність тощо.

Задача. *Одним із суттєвих джерел економії коштів є ощадливе використання електроенергії. Скільки Ви зможете зекономити за рік, якщо відмовитесь від використання телевізора в своїй родині? Врахуйте, що 1 кВт/год електроенергії коштує 1 гривню, послуги кабельного телебачення складають 100 гривень за місяць.*

Розв'язання.

Математичною моделлю задачі є вираз $1 \cdot a + 100 \cdot 12$. Значення цього виразу залежить від кількості спожитої телевізором електроенергії. Відомо, що один телевізор за рік споживає електроенергії близько 300 кВт/год. Тоді витрати на електроенергію для роботи телевізора складуть 300 грн, а послуги

кабельного телебачення $100 \text{ грн} \cdot 12 \text{ міс} = 1200 \text{ грн}$. Чим більше працює телевізор, тим більші витрати на електроенергію для роботи телевізора.

Якщо не користуватися телевізором взагалі, то можна зекономити за рік приблизно $300 + 1200 = 1500$ (грн).

Відповідь. 1500 грн.

Результати наших досліджень, опитування вчителів математики дають підстави стверджувати, що найбільш складним для учнів є перший етап моделювання. Побудова математичної моделі є досить серйозною проблемою для учнів, оскільки вони недостатньою мірою вміють: декодувати інформацію, закладену в умові прикладної задачі; абстрагуватись від неістотних властивостей об'єктів, що досліджуються в задачі; виявляти та правильно інтерпретувати взаємозв'язки між об'єктами, що розглядаються в умові задачі; формалізувати запитання задачі, виразивши шукані величини через відомі та введені змінні.

Формуючи здатність до математичного моделювання ми працюємо з текстовими задачами в три етапи:

I етап. Створення математичної моделі – переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, на мову математики.

II етап. Дослідження математичної моделі – розв'язування отриманої математичної задачі.

III етап. Інтерпретація розв'язків – інтерпретація отриманих результатів, тобто переклад розв'язку математичної задачі з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла.

Ці етапи можна також подати у вигляді схеми: побудова математичної моделі → розв'язування математичної задачі → аналіз одержаних результатів.

Спеціальні дослідження В. О. Швеця показують, що найбільш складним для учнів є I етап [50, с. 18]. Наші дослідження засвідчують, що учні старшої школи слабо володіють навичками перекладу задачі з природної мови на мову математики. Розуміючи ці труднощі, ми в процесі

експериментальних досліджень апробували виокремлення вчителем серії уроків (1-3) зі спеціальною дидактичною метою - формування вміння перейти від текстової умови задачі до її математичної моделі (рівняння, системи рівнянь, нерівності). Для цього варто замість 3-4 задач, які можна встигнути розв'язати повністю за один урок, розглянути спеціальну добірку задач (більше 10), розв'язування яких зосереджуємо лише на виконанні I етапу. Подальше розв'язування задачі (II і III етап) можна запропонувати у вигляді домашнього завдання. Під час розв'язування задач прикладного змісту в процесі створення математичної моделі доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

- ✓ За допомогою допоміжних моделей виділити взаємозв'язки та істотні властивості об'єктів, що досліджуються в умові задачі.
- ✓ За допомогою знаково-символічних моделей створити неформальну модель (неформальна модель – це нестрогий опис процесу, у якому пояснюються виділені залежності між об'єктами, але, у той же час, не дано можливості з точністю перевірити ступінь логічного взаємозв'язку його властивостей).
- ✓ Засобами математики створити математичну модель прикладної задачі.

Наприклад:

Задача. На склад привезли 32 бочки олії і 24 ящики масла. Яка маса однієї бочки олії і одного ящика масла, якщо кожна бочка втричі важча від ящика, а загальна маса привезеного товару становить 3360 кг?

1. Виділимо співвідношення між об'єктами, які розглядаються в задачі.

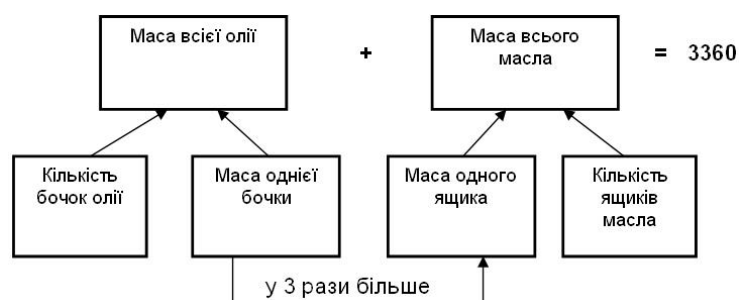


Рис.2.24

2. Опишемо співвідношення між об'єктами.

Таблиця 2.2

	Кількість	Маса однієї одиниці	Загальна маса	Разом
Масло	24 ящики	x	$x \cdot 24$	3360 кг
Олія	32 бочки	$3x$	$3x \cdot 32$	

3. Складемо рівняння (математична модель задачі): $24x + 96x = 3360$.

На перший погляд, задача запропонована вище є легкою для учнів і відповідає рівню 5-6 класів. Однак, результати наших досліджень показали, що навіть половина студентів 3 курсу спеціальності 111 Математика не змогли отримати правильної відповіді. Це ж спостереження підтверджується і результатами ЗНО з математики у частині текстових задач, аналогічних за змістом та рівнем складності. Тому вчитель математики старшої школи має усвідомити важливість превентивної діяльності в профільній школі та доцільність використовувати допоміжні моделі для створення математичної моделі прикладної задачі. Наприклад:

Задача. У посудину з 24% розчином солі додали 2 кілограми 15% розчину солі. У результаті отримали розчин з концентрацією 20%. Скільки кілограмів 24% розчину солі було в посудині?

1. Виділимо співвідношення між об'єктами, які розглядаються в задачі.

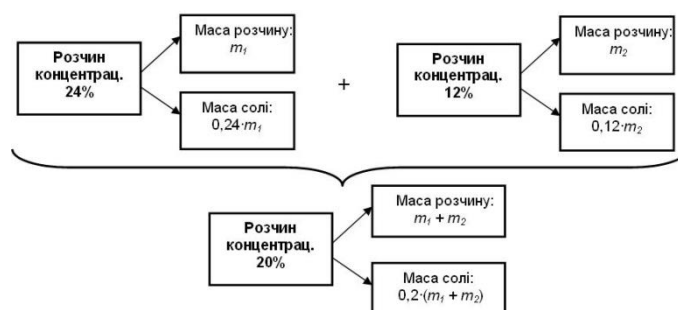


Рис.2.25

2. Опишемо співвідношення між об'єктами.

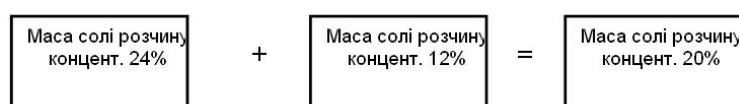


Рис.2.26

3. Складемо математичну модель задачі.

Нехай у посудині було x кг розчину концентрацією 24%. Тоді

$$0,24 \cdot x + 0,12 \cdot 2 = 0,2(x+2).$$

Отримане рівняння є математичною моделлю даної задачі.

Метод математичного моделювання є потужним сучасним пізнавальним методом і ефективним засобом розв'язування прикладних задач. Його роль має стійку тенденцію до зростання у практичній діяльності. Прикладні математичні задачі забезпечують посилення мотивації навчання математики, спонукають до здобуття нових знань, оволодіння новими вміннями, збагачують їх знаннями з інших дисциплін.

У реальному житті є багато задач, які, на перший погляд, не мають між собою нічого спільного, але часто для їх розв'язування можна використовувати одну й ту саму математичну модель. Вважаємо доречним створити педагогічну ситуацію, одна із цілей якої – усвідомлення учнями необхідності умінь розв'язувати рівняння, а також підкріплення вмотивованості до формування умінь математичного моделювання. Спочатку розглядаємо рівняння $\frac{1}{x} = \frac{5}{6}$, розв'язуємо його. Отримуємо $x = \frac{6}{5}$. Звертаємо увагу учнів на те, що маємо справу із найпростішим дробово-раціональним рівнянням. Учитель має створити атмосферу здивування учнів тим, що навіть таке найпростіше рівняння є потужним засобом отримання відповідей на багато практичних ситуацій. Аналізуємо, що вказана рівність рівносильна, наприклад, з такою $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Акцентуємо увагу на наступній серії текстових задач:

Задача 1. Одна труба може наповнити басейн за 2 год, а друга – за 3 год. За скільки годин наповниться басейн, якщо відкрити обидві труби?

Розв'язання. За 1 год однією трубою можна наповнити $-\frac{1}{2}$ частину басейну, а другою $-\frac{1}{3}$, а разом $-\frac{1}{x}$ частину басейна, де x год – час, за який наповниться басейн, якщо відкрити обидві труби.

Складемо математичну модель задачі: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$

Задача 2. Від Вінниці до Ямпольа і від Ямпольа до Вінниці одночасно виїхали автобус і автомобіль. Через скільки годин вони зустрінуться, коли відомо, що автомобіль цю відстань проходить за 2 год., а автобус – за 3 год.?

Розв'язання. Нехай a – відстань від Вінниці до Ямпольа, x год – час, через який зустрінуться автобус і автомобіль. Тоді автомобіль рухався зі швидкістю $-\frac{a}{2}$ км/год, а автобус $-\frac{a}{3}$ км/год; шлях який подолав автомобіль до зустрічі $-\frac{a}{2}x$ км, а автобус $-\frac{a}{3}x$ км, що разом складає всю відстань a км.

Складемо рівняння $\frac{a}{2}x + \frac{a}{3}x = a$, поділивши обидві частини якого на a , отримаємо математичну модель задачі $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 1$. Однак, при умові, що $x \neq 0$ дане рівняння рівносильне рівнянню: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$.

Задача 3. Одна бригада плиточників-лицювальників може виконати роботу за 2 год., а друга – за 3 год. За скільки годин виконали б цю роботу обидві бригади разом?

Розв'язання. За 1 год перша бригада може виконати $-\frac{1}{2}$ частину роботи, друга $-\frac{1}{3}$, а разом $-\frac{1}{x}$ частину роботи, де x год – час, за який вони виконали б роботу разом.

Маємо математичну модель задачі: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$.

Продовжуючи ідею урізноманітнення прийомів мотивування до засвоєння методу математичного моделювання, вважаємо важливим відбір і накопичення вчителем математики ефективних навчальних засобів та прийомів. Серед таких виокремлюємо: прикладні задачі, прийоми реалізації міжпредметних зв'язків, підготовку і проведення спеціальних практичних робіт, що мають прикладну спрямованість. Розглянемо, наприклад, задачу, з допомогою якої можна формувати компетентність учнів з математичного моделювання у класах спортивного профілю.

Задача 2. Спортивний майданчик прямокутної форми має площу 1600 м^2 . Довжина огорожі, якою оточений спортивний майданчик дорівнює 200 м . Знайдіть розміри майданчика.

Розв'язання. Нехай довжина – x (м), а ширина – y (м), тоді xy (м^2) – площа майданчика, що за умовою дорівнює 1600 м^2 .

$2(x + y)$ м – периметр майданчика, що і є довжиною огорожі, яка за умовою дорівнює 200 м .

Складемо математичну модель задачі, що є системою двох рівнянь з двома змінними: $\begin{cases} xy = 1600, \\ 2(x + y) = 200. \end{cases}$ Дослідимо одержану математичну модель,

розв'язавши складену систему: $\begin{cases} xy = 1600 \\ x + y = 100 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 1600, \\ x + y = 100, \end{cases}$ $\begin{cases} (100 - y)y = 1600, \\ x = 100 - y \end{cases}$;
 $\begin{cases} 100y - y^2 - 1600 = 0, \\ x = 100 - y \end{cases}$; $\begin{cases} y^2 - 100y + 1600 = 0, \\ x = 100 - y \end{cases}$.

Розв'яжемо перше рівняння системи. Корені можна отримати за теоремою Вієта: $\begin{cases} y_1 + y_2 = 100, \\ y_1 \cdot y_2 = 1600 \end{cases}$; $\begin{cases} y_1 = 20, \\ y_2 = 80 \end{cases}$. Тоді $\begin{cases} x_1 = 80 \\ x_2 = 20 \end{cases}$

Отримавши корені системи рівнянь, проведемо аналіз одержаних результатів. Оскільки за x ми позначили довжину, а за y – ширину майданчика, то очевидно, що $x = x_1 = 80$, а $y = y_1 = 20$. Інтерпретуємо отриманий результат і одержимо, що довжина майданчика становить 80 м , а його ширина – 20 м .

Відповідь: 20 м і 80 м .

Одна з ефективних технологій для організації превентивної діяльності учнів у навчанні математичному моделюванню, це навчальне портфоліо. Застосування технології портфоліо забезпечує суб'єктну позицію учня в навчальному процесі, так як ґрунтується на самостійній діяльності школярів, яка полягає в аналізі власних досягнень, результатів пізнавальної діяльності. Вчителі математики профільної школи можуть розглядати портфоліо учня як збірник робіт, який містить позитивні зміни в навчанні у порівнянні з попередніми результатами; презентацію результатів навчання учня з

математичного моделювання за типами задач; щоденник досягнень учня з моделювання при вивченні конкретних тем, який кожен учень веде самостійно. У контексті нашого дослідження, таке портфоліо є тематичним. Тематичне портфоліо учня з математичного моделювання може складатися з наступних розділів: «Планування», «Колекція», «Власні матеріали», «Власні досягнення».

Розділ «Планування» дає можливість учневі зосередитися на цілях та завданнях: самостійно, однак, краще з допомогою вчителя, визначитися з актуальною метою, пріоритетами та інтересами: Що я знаю, умію, добре розумію? Чого я маю ще навчитися? Що варто зрозуміти? Чому це важливо?

Розділ «Колекція» може містити важливі для розуміння математичного моделювання матеріали, орієнтовні зразки, які учень знаходить в різних джерелах інформації самостійно або за рекомендацією вчителя. Це можуть бути цікаві статті, теоретичні відомості, блок-схеми тощо.

Розділ «Власні матеріали» може містити правильно виконані та належно оформлені учнем розв'язання задач, самостійно відібрані і систематизовані учнем відомості щодо способів розв'язування окремих типів задач тощо.

Розділ «Власні досягнення» охоплює ті матеріали, які відображають основні результати навчально-пізнавальної діяльності учня щодо математичного моделювання і демонструють його успіхи.

Процес формування в учнів умінь математичного моделювання, на нашу думку, може стати значно ефективнішим, якщо залучити учнів до створення тематичного портфоліо «Математичне моделювання на службі у людини». Розглянемо орієнтовний зміст основних розділів зазначеного портфоліо:

«Колекція»: У цьому розділі учень розміщує довідник основних понять та формул, який він створює самостійно, опрацьовуючи теоретичні відомості з математичного моделювання. Зокрема, ця частина портфоліо може містити основні теоретичні відомості про види текстових завдань, прикладних задач,

способи переходу від тексту задачі до її математичної моделі тощо. Крім теоретичного матеріалу, кожне твердження може підкріплюватися конкретними прикладами. Варто в цьому розділі заохочувати старшокласників розміщувати навчальні матеріали, що виходять за межі вимог шкільної програми. До таких можна віднести історичні довідки, цікаві завдання тощо. Запропонована вище діяльність учня над розділом «Колекція» сприяє систематизації його знань з математичного моделювання, формує вміння самостійно обробляти навчальну інформацію і представляти її у вигляді структурованого тексту, виділяти головне і другорядне, робити висновки, підбирати приклади, що ілюструють теоретичні факти. Цей розділ портфоліо може бути використаний учнем при підготовці до тематичного оцінювання знань та умінь з багатьох тем, до державної атестації та ЗНО з математики.

У розділі «Власні матеріали» учень може розміщувати розв'язування найбільш цікавих і складних прикладних задач. Крім цього, він може створити комп'ютерну презентацію для демонстрації розв'язування цих задач у класі, в деяких завданнях він може виконати оригінальні схематичні малюнки або діаграми. У цьому ж розділі учень може представити власні роздуми, твори про математичне моделювання. Таку діяльність учня має вмотивувати та організувати вчитель математики, надавши йому актуальну інформацію про збірники задач, навчальні посібники, адреси освітніх сайтів в мережі Інтернет.

Як зазначено нами в підрозділі 2.1.3. однією із основних проблем у процесі формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання в усьому світі визнано недостатність методичних матеріалів, особливо для учнів старших класів. Тому нами розроблено й експериментально апробовано навчально-методичний посібник на допомогу вчителям математики «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання» [31]. У посібнику подано та обґрунтовано теоретичні аспекти формування здатності учнів до

математичного моделювання, запропоновано систему прикладних задач для формування умінь математичного моделювання (задачі на знаходження найменших або найбільших значень величини; задачі геометричного змісту; задачі фізичного змісту; задачі стохастичного змісту; задачі виробничого змісту; задачі сучасного професійного змісту; задачі побутового змісту), пояснено методичні аспекти розв'язування задач на основі математичного моделювання. Також дані методичні рекомендації щодо організації самостійної пізнавальної діяльності учнів з метою формування в них умінь математичного моделювання, проектної діяльності учнів, діагностичного інструментарію сформованості умінь математичного моделювання в учнів. Окремим розділом у цьому посібнику ми запропонували для вчителів список публікацій щодо формування умінь математичного моделювання в учнів. Таким чином, нами систематизовано актуальний матеріал для практичного використання на уроках математики в школі, запропоновані авторські задачі. Ми в цьому посібнику акцентуємо увагу вчителів, що в старшій школі, відповідно до визначених в програмах з математики результатів навчання, вчителі математики мають забезпечити умови *розвитку* в учнів умінь математичного моделювання. Книга підготовлена для вчителів математики та майбутніх учителів математики з метою надання методичної допомоги у подоланні проблеми формування умінь математичного моделювання в учнів.

Розвиток комп'ютерних технологій викликає появу нових підходів до освітнього процесу. Карантинні вимоги пов'язані з COVID-19 прискорюють цей процес. Програмою діяльності Кабінету Міністрів України у частині реформування освіти передбачено створення сучасних електронних освітніх ресурсів, зокрема, електронних підручників та посібників. Використання електронних посібників – це розвиток творчого, інтуїтивного мислення; естетичне виховання за рахунок використання можливостей графіки, мультимедіа; розвиток комунікативних здібностей; формування умінь приймати оптимальне рішення; формування інформаційної компетентності й інформаційної культури.

На основі друкованого посібника «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання» нами розроблено електронний посібник.

Це не просто електронна версія друкованої книги, це ще й електронний додаток до неї. Проста та зрозуміла навігація дає можливість швидко та зручно гортати сторінки. Значну практичну цінність має використання електронного додатку до третього розділу посібника, що присвячений систематизації публікацій для подальшого детального вивчення матеріалів з даної теми. Його використання стає значно зручнішим, оскільки містить всі вказані нами публікації, а не лише їх перелік (як у друкованому виданні). Вони доступні для перегляду та скачування у форматі pdf чи djvu.



Рис.2.27

Для скачування електронного посібника можна скористатись посиланням: https://drive.google.com/file/d/1K9B9VI6Yr12w0JHG4Y_aSOSJVs_m3cuGd/view?usp=sharing (дата звернення 25.06.2020), або QR кодом:



Рис.2.28

Отже, для учнівського портфолію, для розділу «Власні матеріали» учитель може пропонувати індивідуальні вибірки задач з цього посібника, враховуючи пізнавальні інтереси учнів та індивідуальні труднощі з математичного моделювання. Серед відібраних і запропонованих нами 145 задач є більш складні, нестандартні задачі, цікаві історичні завдання, задачі, які пропонувалися на державній атестації та ЗНО з математики.

У розділі «Власні досягнення» тематичного портфолію, учень має виконати аналіз результатів власної праці в процесі вивчення теми «Математичне моделювання на службі у людини». Він повинен виділити, який основний теоретичний матеріал ним засвоєно, навести приклади основних типів завдань з теми, які він навчився розв'язувати і вказати, які основні методи і прийоми ним застосовані. Можна стверджувати, що застосування технології портфолію вимагає від учителя математики нести відповідальність не тільки за навчальну діяльність учнів під час уроків математики, але і за позаурочну самостійну роботу учнів. За умови реалізації цієї технології, в учнів формується вміння самостійно контролювати і об'єктивно оцінювати власну навчальну роботу і її результати, сприяє розвитку в них рефлексії, як важливої якості особистості.

Сучасні зміни, що відбуваються в суспільстві, впровадження інформаційно-комунікативних технологій у навчальний процес, вимагають кардинального вдосконалення компетентностей учителя математики. Нині, в епоху мобільності та глобалізації виникає гостра необхідність у розробці та використанні мережі Інтернет, соціальних мереж та персональних сайтів. Дивлячись на покоління учнів сучасної школи, на їх інформатизованість, стає зрозумілим, що вчителю потрібно йти «в ногу з часом», адже застарілі методи навчання вже не є такими дієвими та ефективними.

За результатами нашої дослідницько-експериментальної роботи спрямованої на пошук шляхів підвищення ефективності формування умінь учнів з математичного моделювання, можемо стверджувати, що персональний сайт учителя може стати тут в нагоді. Персональний сайт учителя математики має сприяти обміну досвідом з колегами, скороченню дистанцій між учителем та батьками, а також між учнями та учнями, а найголовніше між учнями і вчителем. Сайт учителя дає можливість реалізувати з його допомогою індивідуальний підхід, націленість на розвиток особистості конкретного учня. З допомогою сайту можна розповсюджувати потрібну інформацію в стислі строки, поділитися важливими новинами, розмістити навчально-методичні розробки, творчі роботи учнів, їх здобутки та багато іншого. Персональний сайт учителя математики має можливість донести інформацію для учнів у мультимедійних формах.

Веб-сайт сьогодні – це не тільки джерело корисної інформації. На сторінках сайту користувачі можуть додавати, редагувати і коментувати матеріали, вирішувати тестові завдання, обговорювати різні питання, оцінювати, знайомитися, тощо. Сьогоднішні учні все частіше проводять час в мережі Інтернет і їм набагато простіше отримати потрібні матеріали через Інтернет, ніж користуватися бібліотеками, книжками, довідниками, це стосується навіть запису домашнього завдання. Звичайно, на думку більшості вчителів, це не правильно. Однак, маємо розуміти, що працюємо з учнями нового покоління, ми готуємо їх до життя в новому суспільстві, яке вимагає

саме такої сучасної особистості, готової жити в новому інформаційному суспільстві. Зі 100 учнів (опитування проводилось в Обласному спортивно-гуманітарному ліцеї-інтернаті Вінницького обласного комунального гуманітарно-педагогічного коледжу) 95 мають смартфон, що складає 95% опитаних. З них 68% з мобільним доступом до мережі Інтернет, а решта користуються Wi-Fi. Що ж стосується післяурочного часу, то доступ до мережі Інтернет має 100% респондентів. Це підтверджує можливість учителя спілкуватися зі своїми учнями через персональний сайт.

Виділяють наступні типи сайтів: сайт-візитка, сайт-портфоліо, предметний сайт, сайт «учитель-учню», сайт класу. На наш погляд, методично найбільш цікавим є сайт «учитель-учню», але ми б його назвали «учитель ↔ учень». Це обов'язково має бути двостороння взаємодія.

Вважаємо, що для сайту головне — його наповнення. На нашу думку, яскраві презентаційні матеріали, новини блогів та фотографії учнів і їхніх однокласників здатні викликати у школярів інтерес до математики, мотивацію до її вивчення та участі в різноманітних конкурсах, проектах, творчих роботах. Він здатен вирішити широке коло практичних завдань. Сайт дає можливість цікавими матеріалами звернути увагу на вивчення математики, на прикладах показати можливість широкого застосування отриманих математичних знань у подальшому житті, за рахунок чого може стати «чарівною паличкою» у допомозі вчителю формувати вміння математичного моделювання в учнів на різних етапах вивчення математики, навіть тоді, коли це програмою не закладено, і дорогоцінний урочний час на це витратити вчитель не в змозі, але вважає за необхідне.

Вчитель, наприклад, розміщує на форумі свого сайту текстову задачу і ставить завдання: скласти її математичну модель. В процесі виконання завдання учні обговорюють, пропонують свої моделі, вчитель очікує, а після того як всі охочі висловились, корегує їхні кроки, пояснює неправильність, або неточність їхніх міркувань, в результаті чого була отримана неправильна математична модель. Можна навпаки, підкреслити правильні міркування,

заохотити подальшу роботу, підсумувати, яка ж все-таки модель правильна, або ж найбільш доцільна. Далі відбувається процес спільного розв'язування математичної моделі. Ті учні, що не мали змоги долучитися до онлайн обговорення, мають можливість пізніше відкрити даний форум і познайомитись з цим обговоренням і всім процесом розв'язування пропонованих учителем завдань. Отже, ми вважаємо функцію сайту «взаємодія вчителя з учнями» найбільш дієвою. У експериментальній роботі виникло питання: «А чому не можна замінити персональний сайт вчителя на спілкування з учнями в соціальних мережах?». У більшості вчителів спілкування учнів у соціальних мережах асоціюється з розвагами. Чи потрібно вчителю бути частиною всього цього в очах учнів або колег? Педагог явно чи неявно справляє прямий і значний вплив на своїх учнів. За результатами наших досліджень, ми прийшли до висновку, що соціальні мережі краще залишити для особистого спілкування та розваг, а все що вчитель математики хоче донести до своїх учнів, краще викладати на сторінках персонального сайту вчителя. Тому для професійної діяльності вважаємо доцільним використовувати персональний сайт, який, до речі, можна створити самостійно за допомогою конструктора сайтів, використовуючи простий і безкоштовний сервіс "*Google Сайти*".

Нами був створений такий персональний сайт учителя.

Для нас суттєвим було не його оформлення, і не стільки його наповнення, а його дієвість у плані формування умінь математичного моделювання в учнів.

Сайт містить наступні вкладки: «Про мене», «Мої досягнення», «Сертифікати», «Посібник», «Корисні посилання», «Дистанційне навчання», та ін.

Посилання на сайт:

<https://sites.google.com/view/kateryniuk/%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B0>

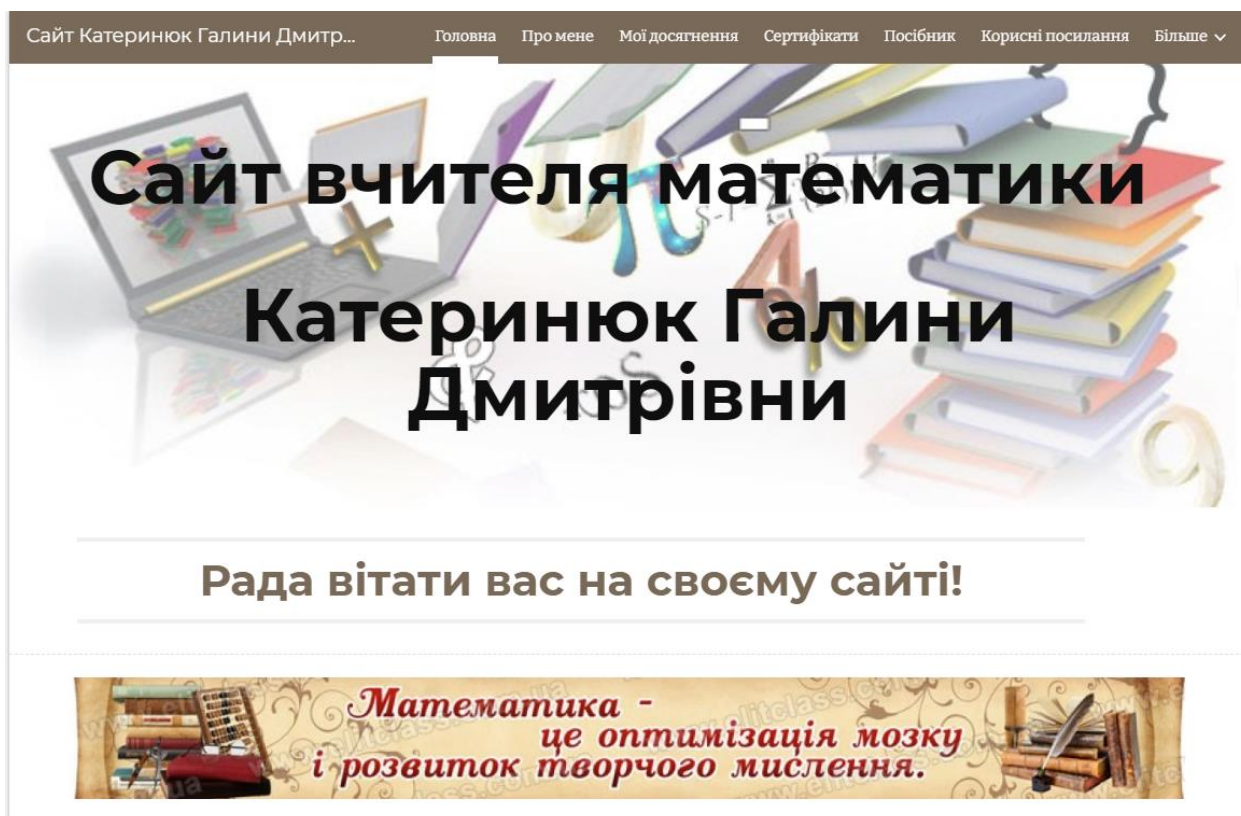


Рис.2.29

Отже, сучасні системи управління контентом (Content Management System, CMS), загальнодоступність безкоштовного хостингу і безкоштовних конструкторів сайтів дають можливість учителям створювати і розвивати власні сайти. Отже, персональний педагогічний web-сайт – це не просто веління часу, а необхідність для плідної роботи будь-якого вчителя-предметника, що дбає про забезпечення умов підвищення ефективності навчання. Дистанційне навчання та екстернат набирає обертів у розвитку, тому обмін завданнями між учнем та вчителем стрімко переходить в простір ІКТ. На нашу думку, основні завдання, які ефективно вирішуються за допомогою персонального сайту вчителя: це пошук нових способів взаємодії з учнями, організація дистанційного навчання та проектної діяльності в мережі Інтернет.

Висновки до розділу 2

Аналіз закордонних та вітчизняних досліджень дозволяє стверджувати, що поняття математичної моделі та деякі загальні положення, пов'язані з цим, повинні в тій чи іншій формі ілюструватися протягом всього курсу математики, а розділи шкільних програм з різних навчальних дисциплін, що стосуються розв'язування задач на роботу, рух, відсотки, прогресії, застосування похідних та інтегралів, можуть слугувати формуванню в учнів умінь математичного моделювання.

Для України нині актуальні проблеми та завдання формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання: діяльність з моделювання в навчанні математики може бути значно змінена завдяки розвитку цифрових технологій; у центрі уваги мають бути дослідження дизайну окремих уроків моделювання, а також усього навчального середовища моделювання; компетентність з математичного читання є необхідною умовою успішної роботи над задачами із моделюванням; важливо дбати про паралельний розвиток математичних компетентностей та відповідних переконань та поглядів учнів; необхідні спеціальні курси з навчання математичному моделюванню для практикуючих вчителів. Нестача часу, складність оцінювання ефективності навчання моделюванню та недостатність методичних матеріалів (особливо для учнів старших класів) – основні проблеми у процесі формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання. Здатність до математичного моделювання ми розглядаємо як безпосередню ознаку практичної компетентності учнів, яка формується паралельно з формуванням та розвитком умінь використовувати математичне моделювання в навчальній діяльності та на практиці.

Особливого значення в технології формування умінь математичного моделювання в учнів ми надаємо місцю й ролі кожної прикладної задачі, яку використовує вчитель на уроці. Формування та розвиток готовності та здатності учнів до математичного моделювання значно залежить від

майстерності вчителя математики створити та оптимально використати в процесі навчання цілісну систему задач, в якій чітко вбачаються вчителем навчальні, розвивальні, виховні та прогностично-діагностичні функції. У змісті задач використовуваних для навчання моделюванню має бути відображений особистий досвід учнів, враховані їхні інтереси, сучасність, цікавість, актуальність. Також важливо відображати в умовах задач місцевий матеріал, який дозволяє ефективно показати використання набутих математичних знань і викликати пізнавальний інтерес, мотивуючи вивчення нових тем, зокрема, і математики в цілому.

Основним для реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Широке і системне застосування методу математичного моделювання не лише на уроках математики, а й у позакласній роботі має стати потужним засобом формування в учнів навичок використання математичних знань та умінь.

Необхідною та можливою є превентивна діяльність вчителя математики старшої профільної школи з виявлення помилок учнів при розв'язуванні текстових задач, їх причин, а також ліквідації помилок, які мали місце при розв'язуванні задач на рух, на сумісну роботу, на відсотки при вивченні в основній школі систем рівнянь та дробово-раціональних рівнянь. Превентивна діяльність учителя математики може бути схарактеризована як діяльність, яка має упередити математичні помилки учнів, виправити допущені, з'ясувавши причини їх появи, обравши для цього відповідні методи, організаційні форми та засоби навчання математики.

Основні результати другого розділу дисертації відображено у роботах [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [30], [31], [32], [41].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ У РОЗДІЛІ 2

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.
2. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владіміров В. М., Владімірова Н. Г. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 272 с.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
4. Благодир Л. М. Забезпечення ефективності переробних підприємств олійно-жирової галузі України з використанням моделі виробничих функцій : автореф. дис. ... канд. екон. наук : 08.00.04 Вінниц. нац. аграр. ун-т. Вінниця, 2011. 20 с. : рис., табл.
5. Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. К.: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.
6. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал, серед, освіти [А.П.Єршова, В.В.Голобородько, О.Ф.Крижановський, С.В.Єршов]. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 288 с.
7. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. Для учителя. М.: Просвещение, 1990. 223 с.
8. Гузеев В. В. О системе задач и задачном подходе к обучению *Химия в школе*. 2001. № 8. С. 12-18
9. Енциклопедія освіти / Акад. пед.наук України:головний ред. В. Г. Кремінь. К.: Юрінком Інтер, 2008. 1040 с.
10. Зайцева Л. І. Формування елементарної математичної компетентності в дітей старшого дошкільного віку: Дис. ... канд. пед. наук. К., 2005. 215 с

- 11.Збірник задач з математики для вступників до ВНЗ / В.К.Єгерев, В.В.Зайцев, Б.А.Кордемський [та ін.]; За ред. М.І.Сканаві. 6-те вид. К.: Арій, 2011. 608 с.
- 12.Істер О. С. Математика (рівень стандарту). Алгебра і початки аналізу : зошит для самост. та темат. контрол. робіт : 10-й кл. Київ : Генеза, 2018. 80 с.
- 13.Істер О. С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2018. 384 с.
- 14.Істер О.С. Математика : 10 кл. : тематичні контрольні роботи та завдання для експрес-контролю : рівень стандарту : навч. пос. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2019. 72 с.
- 15.Істер О.С. Самостійні та тематичні контрольні роботи з алгебри та геометрії. 10 клас. Рівень стандарту : навч. посібн. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2018. 88 с.
- 16.Істер О.С., Єргіна О. В.. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти. Київ : Генеза, 2018. 448 с. : іл.
- 17.Істер О.С., Єргіна О.В. Геометрія: (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти. Київ : Генеза, 2018. 368 с.
18. Катеринюк Г. Д. Место и значение методики решения задачи для формирования умений математического моделирования при обучении учащихся. Винницкий государственный педагогический университет имени Михаила Коцюбинского. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, VIII (90), Issue: 222, 2020 Feb. P. 15-19
- 19.Катеринюк Г.Д. Використання персонального web-сайту вчителя для формування умінь математичного моделювання.Збірник тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції з міжнародною участю «Сучасні інформаційні технології та інновації методики навчання: досвід, тенденції, перспективи», 9-10 листопада, 2017 р.: Тернопіль Осадца Ю. В. 2017. №1. С.91-94

20. Катеринюк Г.Д. Необхідність вдосконалення умінь математичного моделювання. Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя», 15-16 травня, 2017 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. Краматорськ : ДДМА, 2017. С. 232-234
21. Катеринюк Г.Д. Педагогічні умови формування та розвитку здатності до математичного моделювання. «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». К.: Гнозис, 2016. С. 239-246
22. Катеринюк Г.Д. Реалізація прикладної спрямованості навчання математики в спортивно-гуманітарному ліцеї. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики», 11-13 травня 2017 р., Київ: М. П. Драгоманова, 2017. С. 51-52
23. Катеринюк Г.Д. Система задач з математики прикладної спрямованості для учнів спортивно-гуманітарного профілю. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами I Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця, 2017. С. 150-153
24. Катеринюк Г. Д. Критерії та показники сформованості здатності до математичного моделювання в учнів профільної школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. Наук. Праць з матеріалами Міжнар. Наук.-практ. конф., 30 травня – 1 червня 2018 р. М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. 334 с. С. 263-264
25. Катеринюк Г. Д. Методичні аспекти формування умінь математичного моделювання в учнів гуманітаріїв. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами II Всеукр. дистанц. наук.-

- практ. конф., 18 жовтня 2018 р. Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2018. 221с. С. 89-92
26. Катеринюк Г. Д. Порівняльний аналіз шкільних навчальних програм щодо завдання формування в учнів умінь математичного моделювання. *Сучасна освіта в контексті нової української школи*: зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11-12 жовтня 2018 р. М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області [та ін.]. Чернівці, 2018. 276 с. С. 48-52
27. Кондрашова Л. В. Превентивная педагогика: Учебное пособие. К.: Вища школа, 2005. 231 с.
28. Корнієнко Т. Л., Фіготіна В.І. Математика. 10 клас. Рівень стандарту : зошит для оцінювання результатів навчання : У 2 ч. Ч. 1. Алгебра і початки;аналізу. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 64 с.
29. Матяш О.І. Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії: монографія. Вінниця: ФОП Легкун В.М., 2013. 450 с.
30. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Методические особенности системы задач для развития умений математического моделирования в учащихся профильной школы. *Curriculumul școlar: provocări și oportunități de dezvoltare. Materialele conferinței științifice Internaționale. 7–8 decembrie 2018, Chișinău* P. 84-89
31. Матяш О.І., Катеринюк Г.Д. Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2019. 270 с.
32. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Формування здатності учнів до математичного моделювання в умовах позакласної роботи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці*

- фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми.* Зб. наук. пр. Випуск 52 / редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2018. 465 с. С.93-97
33. Меморандум Міжнародного Симпозиума ЮНЕСКО. Вищеє образование в Росії. 1994. № 4. С. 3-6.
34. Мерзляк А. Г., Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : профільний рівень : збірник задач і контрольних робіт. Х. : Гімназія, 2018. 144 с.
35. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 512 с.
36. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 256 с.
37. Мерзляк А. Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 272 с.
38. Мерзляк А. Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.. Геометрія: проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 240 с.
39. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Математика. 10 кл. : рівень стандарту : збірник задач, тестів і контрольних робіт. Х. : Гімназія, 2018. 192 с.
40. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Геометрія. 10 кл. : профільний рівень : збірник задач і контрольних робіт. Х. : Гімназія, 2018. 112 с.
41. Михайленко Л.Ф., Катеринюк Г.Д. Развитие рефлексии учащихся в процессе формирования умений математического моделирования.

- Evaluarea în sistemul educațional: deziderate actuale. Materialele Conferința Științifică Internațională 9-10 noiembrie 2017, Chișinău. P. 215-218
42. Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018 / кол. авт.: М. Мазорчук (осн. автор), Т. Вакуленко, В. Терещенко, Г. Бичко, К. Шумова, С. Раков, В. Горох та ін. Український центр оцінювання якості освіти. Київ : УЦОЯО, 2019. 439 с.
43. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 272 с.: іл.
44. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 328 с.
45. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 240 с.
46. Помиляйтесь! Чому це важливо під час навчання. URL: https://24tv.ua/pomilyaytes_chomu_tse_vazhливо_pid_chas_navchannya_n1277858
47. Прус А., Швець В. Прикладна спрямованість стереометрії: 10- 11 кл. К.: Шк. світ, 2007. 128 с.
48. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: Практикум: навч. посіб. Київ, 2010. 128 с.
49. Старова О. О. Збірник самостійних та контрольних робіт. Математика. 10 клас. Рівень стандарту. Х. : Вид . група «Основа», 2018. 80 с.
50. Швець В. О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики. *Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 32. Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2009. С. 16-23.*
51. Шеварев П. А. Обобщенные ассоциации в учебной работе школьника. М.: Педагогика, 1959. 169 с.

52. Alper Ciltas. The Effect of the Mathematical Modelling Method on the Level of Creative Thinking. *The New Educational Review*. Toruń 2012. P. 103-113.
53. Ang, KC (2013). Реальне життя в рамках традиційної навчальної програми: уроки з сінгапурського досвіду. У Дж. А. Стілман, Г. Кайзер, В. Блум та П. П. Браун (ред.), *Навчання математичному моделюванню: підключення до досліджень та практики* (с. 131-140). Дордрехт: Спрингер.
54. Ayhan Kürşat ERBAŞ, Mahmut KERTİL, Bülent ÇETİNKAYA, Erdinç ÇAKIROĞLU. Mathematical Modeling in Mathematics Education: Basic Concepts and Approaches. *EDUCATIONAL SCIENCES: THEORY & PRACTICE*, 2014. 14(4). P. 1621-1627
55. Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2005). *Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
56. Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht—Trends und Perspektiven. In G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz, & E. Schneider (Eds.), *Trends und Perspektiven* (pp. 15-38). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
57. Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. A. Stillman (Eds.). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. ICTMA14* (pp. 15-30). Dordrecht: Springer.
58. Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Cham: Springer International Publishing.
59. Blum, W. (Ed.). (1993). *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
60. Blum, W., & Leiss, D. (2005). "Filling up" – The problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of 5th Congress European Research Mathematics Education*. Gerona: Universitat Ramon Llull.

61. Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.-W. & Niss, M. (2007). *Modeling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. New York: Springer.
62. Böhm, U. (2013). *Modellierungskompetenzen langfristig und kumulativ fördern: Tätigkeitstheoretische Analyse des mathematischen Modellierens in der Sekundarstufe I*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
63. Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99-118.
64. Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2010). Mathematical Modelling in teacher education - experiences from a modelling seminar. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *CERME 6. Proceedings of the sixth congress of the European Society for Research in Mathematics Education, January 28th-February 1st 2009 Lyon (France)* (pp. 2046–2055). Lyon: Institut national de recherche pédagogique.
65. Burton, L. (2004). What does it mean to be a mathematical enquirer—Learning as research. In L. Burton (Ed.), *Mathematicians as enquirers. Learning about learning mathematics* (pp. 177-204). Boston: Kluwer Academic Publishers.
66. Chang, Y.-P., Krawitz, J., Schukajlow, S., & Yang, K.-L. (2020). Comparing German and Taiwanese secondary school students' knowledge in solving mathematical modelling tasks requiring their assumptions. *ZDM Mathematics Education*, 52, 59-72.
67. Faulkner, R. (1939). Research in art appreciation. *Journal of educational research*, 33(1), 36-43.
68. Fennema, E. & Sherman, J.A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales: Instruments designed to measure attitudes towards to learning of mathematics by male and females. *Catalog of selected documents in psychology*, 6(1), 31.
69. Geiger, V. (2011). Factors affecting teachers' adoption of innovative practices with technology and mathematical modelling. In G. Kaiser, W. Blum, R.

- Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling (pp. 305-314). Dordrecht: Springer.
70. Ghosh JB (2015) Навчання математиці в середній школі: випадок математичного моделювання за технологією. У: Чо С. (редакції) Вибрані регулярні лекції з 12-го Міжнародного конгресу з математичної освіти. Спрингер, Чам
71. Gorev P. M., Masalimova A. R. Development of Meta-subject Competencies of the 7-9 Grades Basic School Students through the Implementation of Interdisciplinary Mathematical Courses. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2017. 13(7), P. 3919-3933.
72. Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Springer Spektrum. 251 p.
73. Greefrath, G., & Weigand, H.-G. (2012). Simulieren—mit Modellen experimentieren. *mathematik lehren*, 174, 2-6.
74. Greefrath, G., Siller, H.-J., & Weitendorf, J. (2011). Modelling considering the influences of technology. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling (pp. 315-330). Dordrecht: Springer.
75. Hagen M., Leiss D., Schwippert K. Using Reading Strategy Training to Foster Students' Mathematical Modelling Competencies: Results of a Quasi-Experimental Control Trial. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2017. 13(7b), P. 4057-4085.
76. Haines, C., & Crouch, R. (2001). Recognizing constructs in mathematical modelling. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 20(3), 129-138.
77. Henn, H.-W. (2007). Modelling pedagogy — Overview. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 321-324). New York: Springer.

78. Hischer, H. (2002). *Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht*. Hildesheim: Franzbecker.
79. Houston, K. (2007). Assessing the “phases” of mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 249-256). New York: Springer.
80. Jason S. Moser, Hans S. Schroder, Carrie Heeter. *Mind Your Errors: Evidence for a Neural Mechanism Linking Growth Mind-Set to Adaptive Posterror Adjustments* First Published October 31, 2011
81. Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht: Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann, T. Jahnke, G. Kaiser, & J. Meyer (Eds.), *Schriftenreihe der Istron-Gruppe: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (Vol. 2, pp. 66-81). Hildesheim: Franzbecker.
82. Kaiser, G., & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. Salett Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice* (pp. 129-149). Cham: Springer International Publishing.
83. Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—Examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51-76.
84. Kaiser, G., Bracke, M., Göttlich, S., & Kaland, C. (2013). Authentic complex modelling problems in mathematics education. In A. Damlamian, J. F. Rodrigues, & R. Sträßer (Eds.), *New ICMI Study Series. Educational interfaces between mathematics and industry* (Vol. 16, pp. 287-297). Cham: Springer.
85. Keck, H. L. (1996). *The Development of an Analytic Scoring Scale to Assess Mathematical Modelling Projects*. Published doctoral dissertation, University of Montana.

- 86.KMK. (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom, 18(10), 2012.
- 87.Krutikhina M. V., Vlasova V. K., Galushkin A. A., Pavlushin A. A. Teaching of Mathematical Modeling Elements in the Mathematics Course of the Secondary School. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2018. 14(4), P. 1305-1315
- 88.Leiß, D. (2007). *Hilf mir, es selbst zu tun: Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren*. Hildesheim: Franzbecker.
- 89.Leiß, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The role of the situation model in mathematical modelling—Task analyses, student competencies, and teacher interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 119-141.
- 90.Leong, K.E. (2013). Assessment of modeling task. *Journal of 5 th International Conference on Science and Mathematics Education*.
- 91.Leong, R. (2012). Assessment of Mathematical Modeling. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 3(1). 61-65.
- 92.Likert, R. (1932). A technique for the measurement of attitudes. *Archives of psychology*, 140, 1-55.
- 93.Link, F. (2011). *Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten: Kontexte und Bedeutungen strategischer Lehrerinterventionen in der Sekundarstufe I*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag/Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH Wiesbaden.
- 94.Luneeva O. L., Zakirova V. G. Integration of Mathematical and Natural-Science Knowledge in School Students' Project-Based Activity. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2017. 13(7), P. 2821-2840.
- 95.Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142.
- 96.Maaß, K., & Gurlitt, J. (2011). LEMA—Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. A. Stillman (Eds.). *International Perspectives on the Teaching and*

- Learning of Mathematical Modelling, Trends in teaching and learning of mathematical modelling. ICTMA14 (Vol. 1, pp. 629-639). Dordrecht: Springer.
97. Maaß, K., & Mischo, C. (2012). Fördert mathematisches Modellieren die Motivation in Mathematik? Befunde einer Interventionsstudie bei HauptschülerInnen. *Mathematica Didactica*, 35, 25-49.
98. MUED збірки завдань. URL: www.mued.de
99. National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). Principles and Standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.
100. National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers [NGACBP & CCSSO]. (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: NGACBP & CCSSO.
101. Niss M. Investigations into Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993. 270 p.
102. Niss, M. and Jensen, T.H. (eds.) (2002) Kompetencer og matematiklæring – Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark ("the KOM report"). Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie 18. The Ministry of Education, Copenhagen, Denmark.
103. Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 3-32). New York: Springer.
104. Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning. (2006/962/EC) Official Journal of the European Union L 394. P. 10-12
105. Riyan Hidayat, Zanaton H. Iksan. Mathematical Modelling Competency for Indonesian Students in Mathematics Education Programmes. *Creative Education*, 2018, 9, P. 2483-2490.
106. Schmidt, B. (2011). Modelling in the classroom: Obstacles from the teacher's perspective. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. A. Stillman (Eds.). *International perspectives on the teaching and learning of*

- mathematical modelling, trends in teaching and learning of mathematical modelling. ICTMA14 (Vol. 1, pp. 641-651). Dordrecht: Springer.
107. Schukajlow, S., & Blum, W. (2011). Zum Einfluss der Klassengröße auf Modellierungskompetenz, Selbst- und Unterrichtswahrnehmungen von Schülern in selbstständigkeitsorientierten Lehr-Lernformen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32(2), 133-151.
108. Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M., & Messner, R. (2012). Методи викладання моделювання проблем та очікувань щодо задоволення, цінності, зацікавленості та самоефективності студентів. *Навчальне навчання з математики*, 79 (2), 215-237.
109. Sonar, T. (2001). *Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik*. Braunschweig: Vieweg.
110. Spooner K. (2017) Автентичний досвід математичного моделювання вищої середньої школи: тематичне дослідження. В: Стілман Г., Блюм В., Кайзер Г. (редактори) *Математичне моделювання та додатки. Міжнародні перспективи викладання та вивчення математичного моделювання*. Спрингер, Чам
111. Stender, P. (2016). *Wirkungsvolle Lehrerinterventionsformen bei komplexen Modellierungsaufgaben. Perspektiven der Mathematikdidaktik*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
112. Stender, P., & Kaiser, G. (2015). Scaffolding in complex modelling situations. *ZDM*, 47(7), 1255-1267.
113. Stillman, G., Brown, J., Galbraith, P., & Ng, K. (2016). Дослідження математичних застосувань та моделювання. У К. Макара, С. Доула, Дж. Віснорської, М. Гооса, А. Беннісона та К. Фрі (ред.), *Дослідження математичної освіти в Австралії 2012–2105* (с. 281-304). Сінгапур: Спрингер.
114. Swetz, F. and Hartzler, J.S. (1991). *Mathematical modelling in the secondary school curriculum*. National Council of Teachers of Mathematics: Reston, Virginia.

115. Tezer M., Cumhur M. Mathematics through the 5E Instructional Model and Mathematical Modelling: The Geometrical Objects. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2017. 13(8), P. 4789-4804.
116. Tropper, N., Leiß, D., & Hänze, M. (2015). Teachers' temporary support and worked-out examples as elements of scaffolding in mathematical modelling. *ZDM*, 47(7), 1225-1240.
117. Vorhölter, K. (2009). *Sinn im Mathematikunterricht (Vol. 27)*. Opladen, Hamburg: Budrich.
118. Vorhölter, K., & Kaiser, G. (2016). Theoretical and pedagogical considerations in promoting students' metacognitive modeling competencies. In C. Hirsch (Ed.), *Annual perspectives in mathematics education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 273-280). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
119. Vorhölter, K., Kaiser, G., & Borromeo Ferri, R. (2014). Modelling in mathematics classroom instruction: An innovative approach for transforming mathematics education. In Y. Li, E. A. Silver, & S. Li (Eds.), *Advances in mathematics education. Transforming mathematics instruction. Multiple approaches and practices* (pp. 21-36). Cham: Springer.
120. Vos, P. (2007). Assessment of applied mathematics and modelling: Using a laboratory-like environment. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 441-448). New York: Springer.
121. Weigand, H.-G., & Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen*. Heidelberg: Spektrum.
122. Zech, F. (2002). *Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*, 10th edn. Beltz Pädagogik. Weinheim: Beltz.

РОЗДІЛ 3

ОРГАНІЗАЦІЯ, МЕТОДИКА ТА РЕЗУЛЬТАТИ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

3.1. Організація й перебіг дослідно-експериментальної роботи

З метою перевірки ефективності запропонованої нами технології формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи було проведено педагогічний експеримент, під час якого *з'ясовано* проблеми вчителів математики, які пов'язані з формуванням умінь математичного моделювання в учнів; *визначено* показники сформованості в учнів умінь математичного моделювання; *здійснено* пошук шляхів удосконалення методичної системи формування умінь математичного моделювання в учнів; *апробовано* організаційно-методичний інструментарій формування в учнів умінь математичного моделювання, зокрема, авторські задачі, які створені для забезпечення ефективних умов формування умінь математичного моделювання в учнів; *встановлено* позитивну динаміку змін у формуванні в учнів профільної школи умінь математичного моделювання в процесі експериментального навчання; *оцінено* результативність застосування технології формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи.

Створення, корекція та перевірка ефективності запропонованої технології формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи здійснювались у процесі дослідно-експериментальної роботи, якій передувало тривале вивчення проблеми – робота автора дисертації з 2006 року в якості викладача математики та інформатики в Обласному науковому ліцеї-інтернаті Комунального закладу вищої освіти «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж».

Педагогічний експеримент складався з трьох етапів:

- ✓ констатувальний (2010-2014 рр.);
- ✓ пошуковий (2014-2018 рр.);
- ✓ узагальнювальний (2018-2020 рр.).

Експериментальною базою дослідження на констатувальному етапі педагогічного експерименту став Обласний науковий ліцей-інтернат Комунального закладу вищої освіти «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж» та загальноосвітні школи: загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №1 м. Калинівка Вінницької області та Зеленодольська ЗШ І-ІІІ ступенів №1 Апостолівського району, Дніпропетровської обл.

Метою констатувального етапу педагогічного експерименту було з'ясування стану формування умінь математичного моделювання в учнів, виокремлення типових методів, прийомів та засобів формування знань та умінь учнів, що стосуються математичного моделювання; встановлення актуальних проблем учителів математики, які пов'язані з формуванням умінь математичного моделювання в учнів у процесі навчання математики, пошук шляхів удосконалення їхньої методичної діяльності.

Для організації дослідно-експериментальної роботи були поставлені такі завдання констатувального етапу педагогічного експерименту:

- *Проаналізувати* державні документи, педагогічну, навчально-методичну літературу щодо завдань, умов та проблем формування математичної компетентності учнів.
- *З'ясувати* типові задачі методичної діяльності вчителя математики в практиці навчання учнів математичному моделюванню в школі.
- *Виокремити* проблему якості формування знань та умінь учнів, що стосуються математичного моделювання.

Серед методів дослідно-експериментальної роботи, які використовувалися на цьому етапі:

1. Метод *педагогічного спостереження*, як спеціально організоване сприймання педагогічного процесу в природних умовах:

- спостереження методичної діяльності різних учителів математики в реальному процесі навчання учнів у школі для отримання достовірних відомостей про типові задачі методичної діяльності для навчання учнів математичному моделюванню в школі;
 - *спостереження* навчальної діяльності учнів у набутті ними знань та умінь для розв'язування прикладних задач;
2. Метод *педагогічного експерименту*, як науково поставлений дослід організації навчання у спеціально визначених умовах, до структури якого увійшли:
- *уточнювальний етап педагогічного експерименту* в школі – виконання функцій вчителя математики автором дослідження для усвідомлення типових задач методичної діяльності вчителя математики у навчанні учнів математичному моделюванню;
 - *творчий етап педагогічного експерименту* в школі – розгляд й аналіз досліджуваного явища в умовах самоспостереження власної удосконаленої методичної діяльності.
3. Метод *вивчення педагогічного досвіду* вчителів, використаний з метою узагальнення методів, прийомів та засобів підвищення ефективності навчання учнів математики у школі.
4. Метод *бесіди* із учителями математики та учнями старшої школи:
- для з'ясування розуміння вчителями математики фахових функцій і задач методичної діяльності в навчанні учнів математичному моделюванню;
 - для виявлення рівня усвідомлення учнями старшої школи місця і ролі математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів.
5. Метод *анкетування* для підвищення об'єктивності зібраної інформації про виявлені факти та їх типовість, за рахунок збільшення кількості опитаних.

б. *Метод вивчення документації.* Вивчалися результати ЗНО з математики, результати міжнародних досліджень математичної грамотності, контрольних робіт та самостійних робіт з математики.

Результати *констатувального етапу* педагогічного експерименту:

а) з'ясовано місце і роль математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів;

б) здійснено наскрізний аналіз програм та підручників з математики для школи щодо умов формування умінь математичного моделювання;

в) проаналізовано психолого-педагогічні дослідження щодо специфіки навчання старшокласників математики;

г) встановлена доцільність розробки авторської технології формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи;

д) визначено сутність ключових понять дослідження.

Результати цього етапу педагогічного експерименту доповідалися та обговорювалися на засіданнях кафедри алгебри та методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського та науково-практичних конференціях Вінницького обласного комунального гуманітарно-педагогічного коледжу.

Мета *пошукового етапу* педагогічного експерименту, який проходив з 2014 року по 2018 рік, полягала в *з'ясуванні* актуальних методичних аспектів процесу формування в учнів умінь математичного моделювання; *визначенні критеріїв та показників* сформованості умінь математичного моделювання в учнів старшої школи; *створенні* системи прикладних задач для формування в учнів умінь математичного моделювання; *розробці* організаційно-методичного інструментарію на допомогу вчителям математики; *обґрунтуванні* сутності *превентивної діяльності у процесі* формування умінь математичного моделювання.

Експериментальною базою дослідження на *пошуковому етапі* педагогічного експерименту стала кафедра алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені

Михайла Коцюбинського, Обласний науковий ліцей-інтернат Комунального закладу вищої освіти «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж» та загальноосвітні школи: загальноосвітньої школи I-III ступенів м. Козятина; загальноосвітня школа I-III ступенів №1 м. Калинівка Вінницької області; Зеленодольська ЗШ I-III ступенів №1 Апостолівського району, Дніпропетровської області; Тиврівський ліцей-інтернат поглибленої підготовки в галузі науки; фізико-математична гімназія №17 міста Вінниці.

У педагогічному експерименті на цьому етапі взяли участь всього біля 200 учнів, 50 студентів, 4 викладачів та більше 500 вчителів.

Упродовж *пошукового* етапу педагогічного експерименту були отримані такі результати:

- *з'ясовано* актуальні методичні аспекти процесу формування в учнів умінь математичного моделювання на основі ґрунтовного аналізу закордонного та вітчизняного досвіду;
- *обґрунтовано* місце і роль дослідницької та проектної діяльності учнів у процесі формування умінь математичного моделювання;
- *пояснено* методичні аспекти побудови та використання систем задач для формування в учнів умінь математичного моделювання;
- *виокремлено* прийоми та засоби *превентивної діяльності вчителя та учнів на уроках математики в процесі* формування в учнів умінь математичного моделювання;
- *підготовлено* навчально-методичний посібник «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання».

На *пошуковому* етапі педагогічного експерименту навчання учнів математичному моделюванню здійснювалося за пропонованою нами технологією. На цьому етапі відбувалася корекція технології формування умінь учнів з математичного моделювання.

Результати *пошукового етапу* педагогічного експерименту доповідались та обговорювались на засіданнях кафедри алгебри та методики навчання

математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, на міжнародних науково-практичних конференціях [13, 9, 10, 15, **Помилка! Джерело посилання не знайдено.**] та на всеукраїнських науково-методичних конференціях [2, 3, 5, 7, 12, 11]. Результати *пошукового етапу* педагогічного експерименту відображені в публікаціях [4, 8, 14, 19, 20, 21].

Метою *узагальнювального* (2018-2020 рр.) етапу педагогічного експерименту було *проектування* актуальних напрямів та завдань формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання; *обґрунтування* методичних рекомендацій для вчителів математики щодо навчання учнів математичному моделюванню; *встановлення* динаміки змін у формуванні умінь математичного моделювання в учнів; *оцінка* розробленого нами навчально-методичного оснащення; *впровадження* результатів дослідно-експериментальної роботи в практику діяльності шкіл.

На *узагальнювальному етапі* педагогічного експерименту отримані наступні результати:

- результати дослідження *впроваджено* в практику діяльності міського методичного об'єднання учителів математики м. Козятина, загальноосвітньої школи I-III ступенів № 1 м. Калинівка Вінницької області, Зеленодольської ЗШ I-III ступенів №1 Апостолівського району, Дніпропетровської області, Тиврівського ліцею-інтернату поглибленої підготовки в галузі науки;
- *здійснено* аналіз та інтерпретацію результатів дослідження;
- *сформульовано* висновки дослідно-експериментальної роботи;
- *оформлено* текст дисертаційної роботи.

Результати *узагальнювального* етапу педагогічного експерименту доповідались та обговорювались на засіданнях кафедри алгебри та методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, на міжнародних науково-практичних конференціях [6, 16, 25, **Помилка! Джерело посилання не знайдено.**] та на всеукраїнських науково-практичних конференціях [18, 17].

3.2. Обробка й аналіз результатів педагогічного експерименту

У процесі *констатувального* етапу педагогічного експерименту відвідувались та аналізувались уроки математики в основній та старшій школі, різні заходи позакласної роботи за напрямом прикладної спрямованості навчання математики. Вчителі масово зауважували на серйозні проблеми із недостатністю часу на уроках математики для формування умінь математичного моделювання в учнів, на проблеми формування інтересу учнів до навчання математики, тощо. Спостереження, бесіди з учителями дали змогу констатувати, наприклад, наявність проблем з недостатністю зручних задач для формування умінь математичного моделювання в учнів у процесі вивчення окремих тем шкільної програми з математики. Додаткові дослідження (багаторазові зрізи знань та умінь учнів із розв'язування текстових задач) підтвердили висновки багатьох українських науковців про низький рівень сформованості знань та умінь учнів з математичного моделювання. На цьому етапі дослідно-експериментальної роботи нами зроблено висновок про необхідність пошуку шляхів надання вчителям математики допомоги в подоланні проблем навчання учнів математичному моделюванню.

Для з'ясування стану проблеми дослідження було проведене анкетування учителів математики (500 осіб):

1. Чи вважаєте Ви потрібним знайомити учнів з сучасними підходами та методами математичного моделювання?
2. Чи вважаєте Ви необхідність у вдосконаленні вмінь математичного моделювання в учнів?
3. Чи достатньою на Вашу думку є кількість прикладних задач в шкільних підручниках?
4. Чи потрібно урізноманітнювати системи прикладних задач відповідно до сучасних вимог, враховуючи профілі навчання?

5. Чи згодні Ви з тим, що для якісного оволодіння знаннями, методами, прийомами і вміннями математичного моделювання учнями є наявність високоосвічених вчителів математики?

6. Чи вважаєте Ви, що проблема формування вмінь математичного моделювання в учнів достатньо висвітлена в навчально-методичній літературі?

Результати анкетування представлені в таблиці 5 (Додаток Ж) та на наступних діаграмах:

1. Чи вважаєте ви потрібним знайомити учнів з сучасними підходами та методами математичного моделювання?

500 відповідей

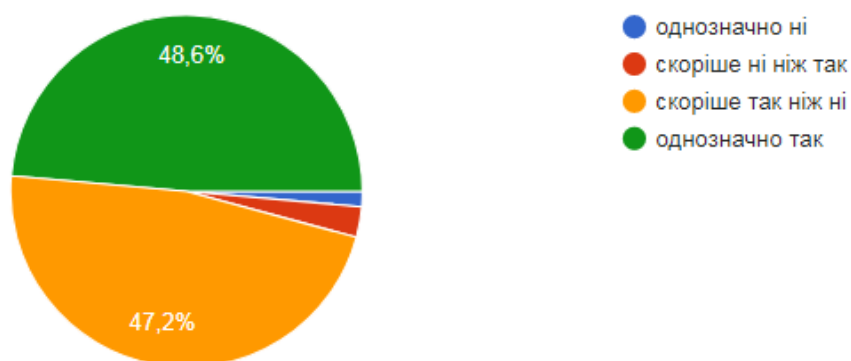


Рис. 3.1

2. Чи вважаєте ви необхідність у вдосконаленні вмінь математичного моделювання в учнів?

500 відповідей

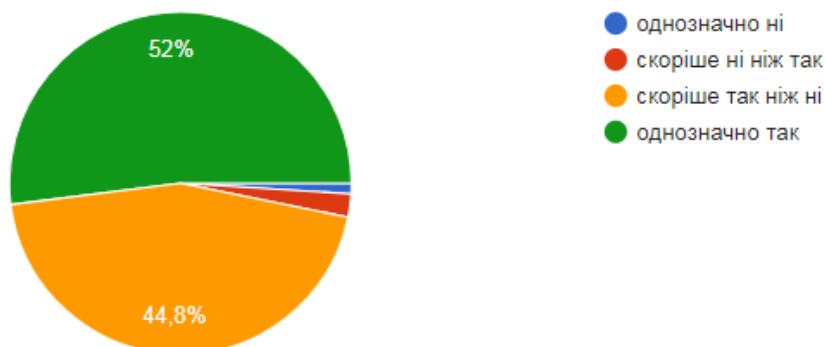


Рис. 3.2

3. Чи достатньою на вашу думку є кількість прикладних задач в шкільних підручниках?

500 відповідей

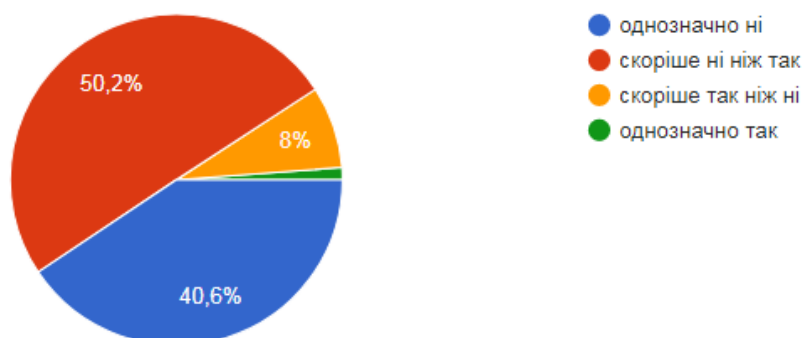


Рис. 3.3

4. Чи потрібно урізноманітнювати системи прикладних задач відповідно до сучасних вимог, враховуючи профілі навчання?

500 відповідей

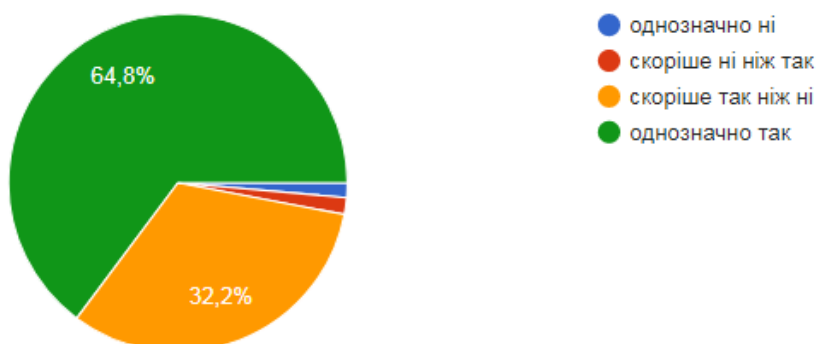


Рис. 3.4

5. Чи згодні ви з тим, що для якісного оволодіння знаннями, методами, прийомами і вміннями математичного моделювання учнями є наявність високоосвічених вчителів математики?

500 відповідей

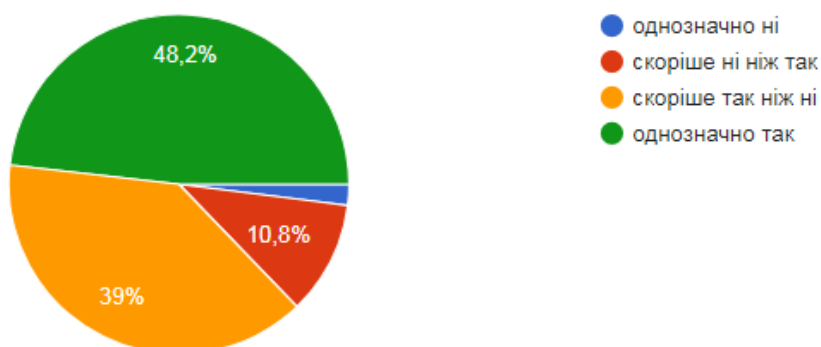


Рис. 3.5

6. Чи вважаєте ви, що проблема формування вмінь математичного моделювання в учнів достатньо висвітлена в навчально-методичній літературі?

500 відповідей

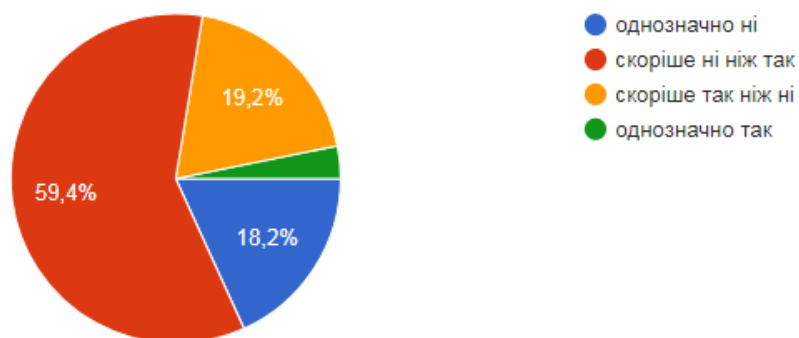


Рис. 3.6

Як слідує із представлених діаграм, майже 95,8% вчителів вважає потрібним знайомити учнів із сучасними підходами та методами математичного моделювання; 52% вчителів математики відповіли «однозначно так» на необхідність у вдосконаленні вмінь математичного моделювання в учнів, а 44,8% - вибрали відповідь на це ж питання «скоріше так, ніж ні». Лише 9,2% опитаних учителів стверджують, що в шкільних підручниках є достатня кількість прикладних задач. 97% вчителів визнали необхідність урізноманітнювати системи прикладних задач відповідно до сучасних вимог, враховуючи профілі навчання, причому дві третини цих учителів уважають таку необхідність гострою. 87,2% опитаних учителів математики погодилися з нами, що для якісного оволодіння знаннями, методами, прийомами і вміннями математичного моделювання учнями потрібна наявність вчителів математики з високим рівнем методичної компетентності. Лише приблизно четверта частина опитаних нами учителів математики вважає, що проблема формування вмінь математичного моделювання в учнів достатньо висвітлена в навчально-методичній літературі.

Для того, щоб дослідити реальні проблеми формування в учнів умінь математичного моделювання, під час констатувального етапу педагогічного

експерименту була проведена діагностична робота із студентами молодших курсів, які навчаються за спеціальністю «Середня освіта (Математика)». Отже, це були випускники різних українських шкіл, які навчалися в різних учителів математики, пройшли ЗНО з математики, а тому їхній рівень умінь математичного моделювання у процесі розв'язування типових задач шкільних підручників математики об'єктивно відображає ситуацію сформованості відповідних умінь. Діагностична робота складалася із шести завдань:

1. Після того, як Сергій витратив 40% усіх своїх грошей на купівлю книжки, а $\frac{2}{3}$ решти – на купівлю зошитів, у нього залишилося 3 грн. скільки грошей було у Сергія спочатку?
2. Відстань між двома містами 420 км. З одного міста до іншого виїхало одночасно дві машини. Швидкість однієї з них на 10 км/год більша за швидкість другої, через що вона приїхала в пункт призначення на 1 год раніше. Знайти швидкість кожної машини?
3. Два робітники працюючи разом можуть виконати виробниче завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен із них працюючи самостійно, якщо одному для цього потрібно на 9 днів більше ніж другому?
4. У свіжих грибах 90% води, у сушених – 20% води. На скільки відсотків зменшується маса грибів при висушуванні?
5. Батькові зараз 36 років, а двом його синам – 10 і 15 років. Через x років вік батька буде дорівнювати сумі років синів. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

$$- 36 + 2x = 25$$

$$- 36 + x = 25$$

$$- 36 + x = 25 + x$$

$$- 36 = 25 + x$$

$$- 36 = 25 + 2x$$

6. У творі на тему «Моя сім'я» Дмитрик написав: «5 років тому татко був старшим за мене у 6 разів, а через 15 років він буде старшим за мене

тільки у 2 рази». Учителька, яка перевіряла цей твір, замислилася: «А в скільки разів старший за Дмитрика його татко ЗАРАЗ?» Допоможіть учительці встановити істину.

- У 4,75 рази;
- У 4 рази;
- У 3,8 рази;
- У 3,5 рази;
- У 3,25 рази.

Отримані результати правильного виконання завдань відображені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2.

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Відсоток правильного виконання завдання	27,5	25	0	0	50	0

На жаль, такі результати не потребують коментарів. Уся зібрана інформація згодом враховувалась нами на пошуковому етапі педагогічного експерименту в процесі вибудовування технології формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи.

Таким чином, різні методи експериментальних досліджень на *констатувальному* етапі педагогічного експерименту дозволили виявити необхідність пошуку шляхів підвищення якості навчання учнів математичному моделюванню. З огляду на це, було сформульовано проблему дослідження, його мету та завдання.

Розглянемо окремі результати *пошукового* етапу педагогічного експерименту. Для з'ясування показників сформованості умінь математичного моделювання ми використали метод ранжування. Участь у визначенні досліджуваних показників взяли 500 учителів математики. Ми

попросили розмістити у певному порядку, за ступенем важливості, п'ять із нижче запропонованих 10 показників сформованості в учнів умінь математичного моделювання:

- 1) здатність працювати з інформацією (оперувати текстовою та числовою інформацією);
- 2) здатність аналізувати життєві ситуації;
- 3) здатність аналізувати поставлене завдання, скласти алгоритм розв'язання завдання, або використовувати вже відомий;
- 4) здатність встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо);
- 5) здатність розв'язувати математичні задачі побутового, практичного та прикладного спрямування;
- 6) здатність скласти математичні задачі побутового, практичного та прикладного спрямування;
- 7) здатність бачити у навколишній дійсності (побуті, природі, виробництві, техніці) прояви математичних законів, а також пояснити їх з точки зору математичних теорій;
- 8) здатність будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ;
- 9) здатність інтерпретувати, оцінювати та прогнозувати результати в контексті навчальних та практичних задач;
- 10) здатність використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях.

Якщо в поданому списку відсутній показник, який на думку вчителя є значущим, то можна було його додати з потрібним номером.

Результати анкетування представлені в таблиці 6 (Додаток 3) та на наступних діаграмах:

здатність працювати з інформацією (оперувати текстовою та числовою інформацією)

422 відповіді

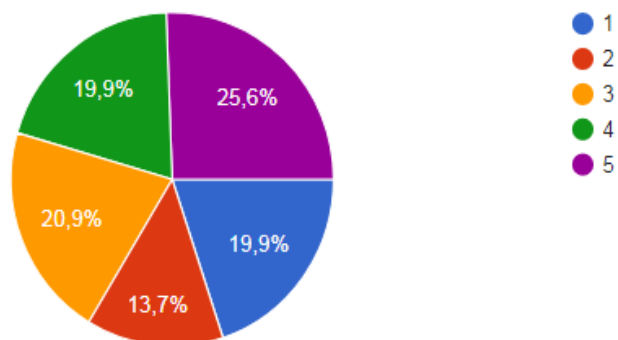


Рис. 3.7

здатність аналізувати життєві ситуації

419 відповідей

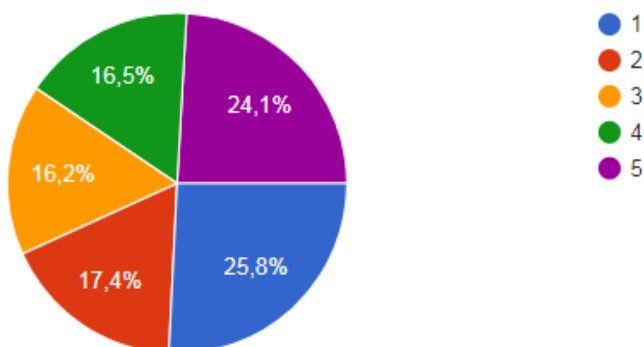


Рис. 3.8

здатність аналізувати поставлене завдання, складати алгоритм розв'язання завдання, або використовувати вже відомий

449 відповідей

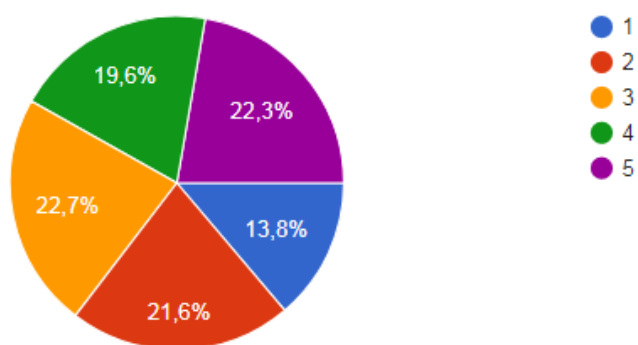


Рис. 3.9

здатність встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо)

400 відповідей

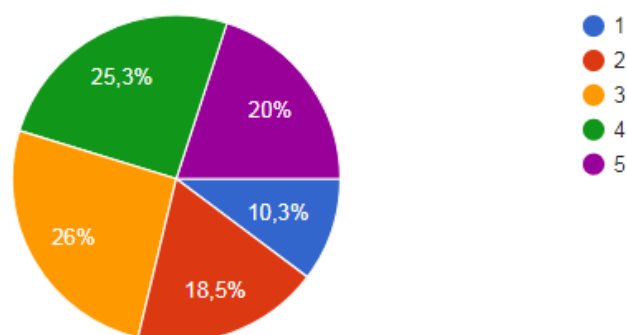


Рис. 3.10

здатність розв'язувати математичні задачі побутового, практичного та прикладного спрямування

433 відповіді

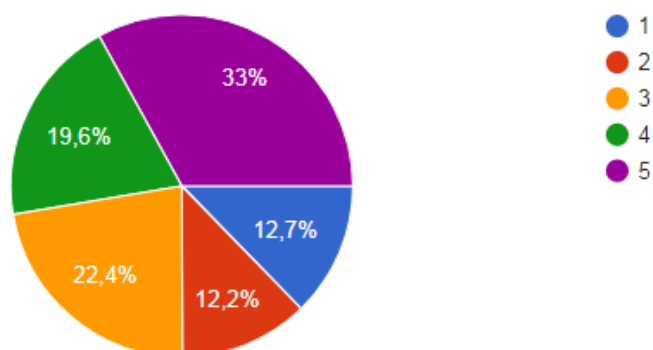


Рис. 3.11

здатність складати математичні задачі побутового, практичного та прикладного спрямування

364 відповіді

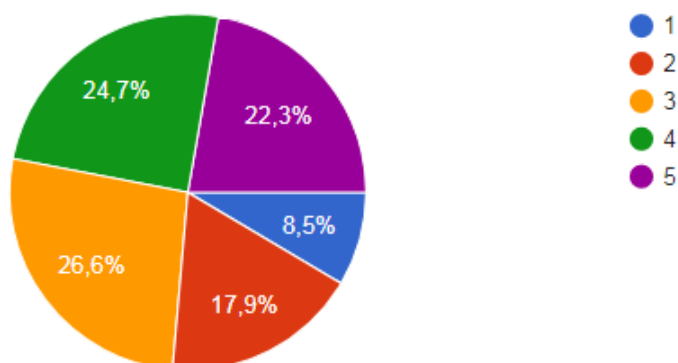


Рис. 3.12

здатність бачити у навколишній дійсності (побуті, природі, виробництві, техніці) прояви математичних законів, а також пояснити їх з точки зору математичних теорій

426 відповідей

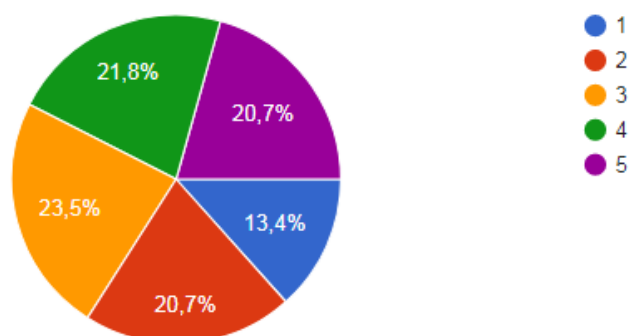


Рис. 3.13

здатність будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ

387 відповідей

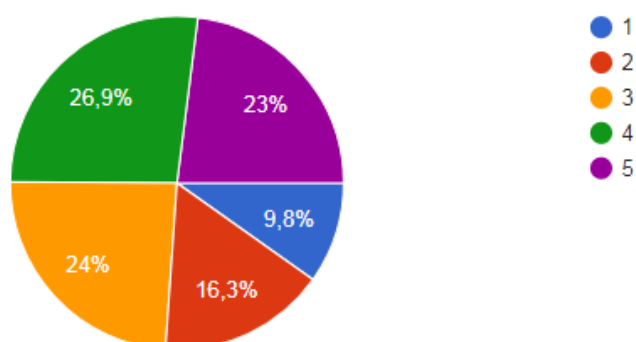


Рис. 3.14

здатність інтерпретувати, оцінювати та прогнозувати результати в контексті навчальних та практичних задач

381 відповідь

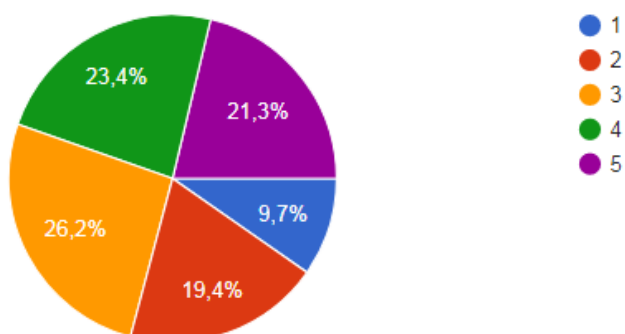


Рис. 3.15

здатність використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях

420 відповідей

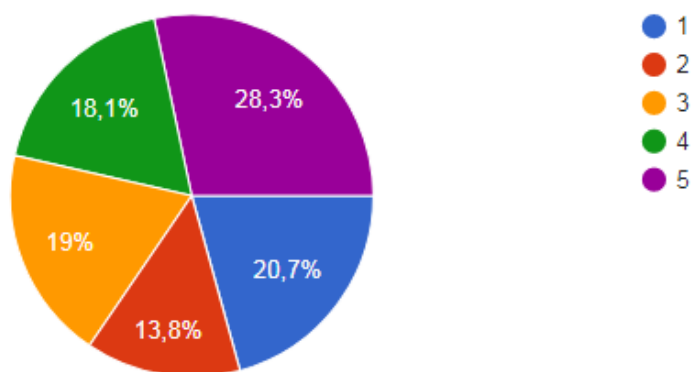


Рис. 3.16

Якщо в поданому списку відсутній показник, що на вашу думку є значущим, додайте його з потрібним номером:

13 відповідей

-
4
5
3
1 Візуалізація
10
-
.
2
Збірники саме з прикладними задачами потрібно випускати

Рис. 3.17

Аналіз, порівняння, систематизація та узагальнення точок зору опитаних учителів щодо показників сформованості в учнів умінь математичного моделювання подано в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№1	19,9%	25,8%	13,8%	10,3%	12,7%	8,5%	13,4%	9,8%	9,7%	20,7%
№2	13,7%	17,4%	21,6%	18,5%	12,2%	17,9%	20,7%	16,3%	19,4%	13,8%
№3	20,9%	16,2%	22,7%	26%	22,4%	26,6%	23,5%	24%	26,2%	19%
Сума	54,5%	59,4%	58,1%	54,8%	47,3%	53%	57,6%	50,1%	55,3%	53,5%

Якщо розглядати пріоритетність за позицією під номером 1, то найвагомішими є такі показники сформованості здатності до математичного моделювання в учнів: здатність аналізувати життєві ситуації; здатність використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях; здатність працювати з інформацією (оперувати текстовою та числовою інформацією).

Якщо просумувати пріоритетність за позиціями під номерами від 1 до 3, що найвагомішими є такі показники сформованості здатності до математичного моделювання в учнів: здатність аналізувати життєві ситуації; здатність аналізувати поставлене завдання, скласти алгоритм розв'язання завдання, або використовувати вже відомий; здатність бачити у навколишній дійсності (побуті, природі, виробництві, техніці) прояви математичних законів, а також пояснити їх з точки зору математичних теорій; здатність інтерпретувати, оцінювати та прогнозувати результати в контексті навчальних та практичних задач; здатність встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо).

Ми виокремили критерії сформованості здатності до математичного моделювання в учнів профільної школи:

- *когнітивний* (рівень теоретичних знань), показники якого мають свідчити про рівень теоретичної підготовки учнів до здійснення математичного моделювання;
- *практично-діяльнісний* (самостійність), показники якого мають визначати рівень сформованості необхідних навчальних умінь і навичок;

- *мотиваційний* (інтереси і схильності), показники якого мають свідчити про ставлення учнів до вивчення математичного моделювання та стійкий позитивний інтерес до математики взагалі, а також прагнення до самоосвіти стосовно математичного моделювання;
- *особистісний* (особистісна відповідальність при роботі), показники якого мають визначати внутрішні та індивідуальні якості учнів відносно виконання певного виду діяльності, що формують здатність до математичного моделювання.

Відповідно показники сформованості здатності до математичного моделювання в учнів профільної школи:

- здатність аналізувати життєві ситуації;
- здатність використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях;
- здатність працювати з інформацією (оперувати текстовою та числовою інформацією).
- здатність аналізувати поставлене завдання, скласти алгоритм розв'язання завдання, або використовувати вже відомий;
- здатність бачити у навколишній дійсності (побуті, природі, виробництві, техніці) прояви математичних законів, а також пояснити їх з точки зору математичних теорій;
- здатність інтерпретувати, оцінювати та прогнозувати результати в контексті навчальних та практичних задач;
- здатність встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо).

Критерії сформованості умінь математичного моделювання є якісними характеристиками, а рівні сформованості умінь математичного моделювання є кількісними характеристиками. Вчитель у своєму арсеналі має мати навчальні ресурси для формування здатності учнів до математичного моделювання, а перш за все, це розв'язування на уроках і в позаурочний час задач, і зокрема таких, що моделюють реальні життєві ситуації.

З метою виявлення потреб учителів математики в методичному інструментарії для формування в учнів умінь математичного моделювання була запропонована анкета:

1. Я маю необхідність у відповідній навчально-методичній літературі по формуванню умінь математичного моделювання в учнів.
2. Корисною була б система прикладних задач.
3. Я відчуваю необхідність у методиці розв'язування задач на основі математичного моделювання.
4. Доречними б були орієнтовані конспекти уроків на математичному моделюванні.
5. Корисним був би діагностичний інструментарій сформованості умінь математичного моделювання.
6. Цікаво було б познайомитися з публікаціями різних авторів, щодо формування умінь математичного моделювання.
7. Хотілося б мати такий посібник в друкованому/електронному варіанті (потрібне підкреслити).

Результати анкетування представлені в таблиці 7 (Додатки II) та на наступних діаграмах:

1. Я маю необхідність у відповідній навчально-методичній літературі по формуванню умінь математичного моделювання в учнів:

500 відповідей

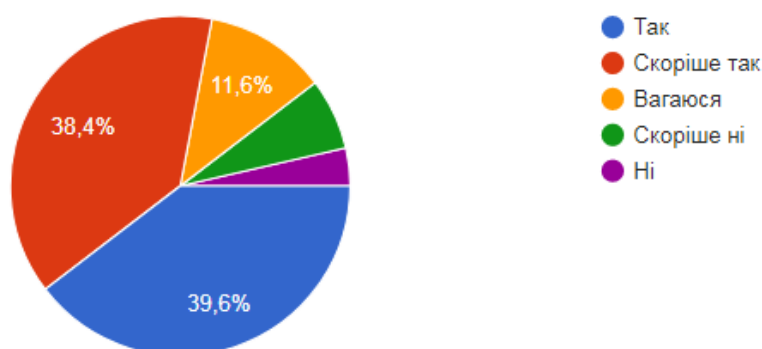


Рис. 3.18

2. Корисною була б система прикладних задач

500 відповідей

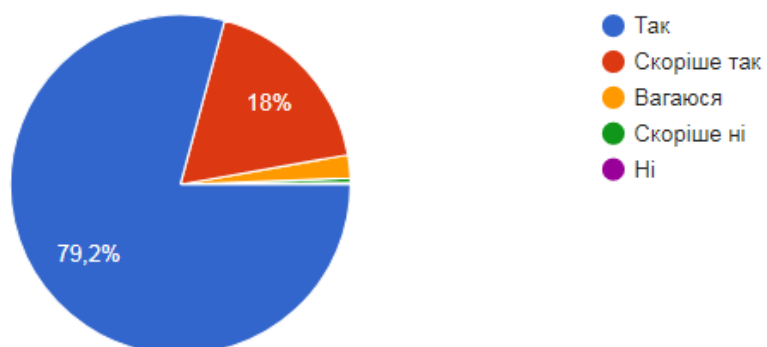


Рис. 3.19

3. Я відчуваю необхідність у методиці розв'язування задач на основі математичного моделювання

500 відповідей

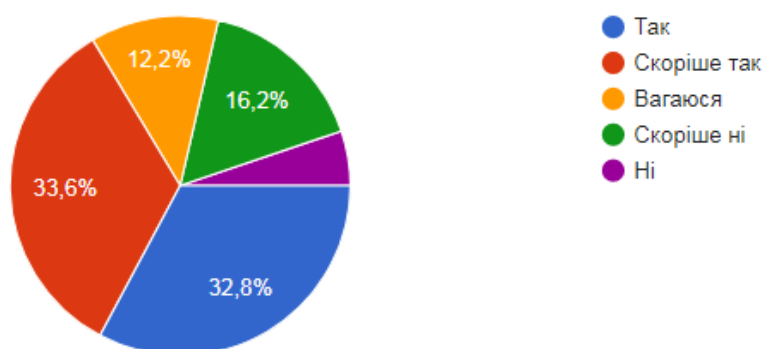


Рис. 3.20

4. Доречними б були орієнтовані конспекти уроків по математичному моделюванню

500 відповідей

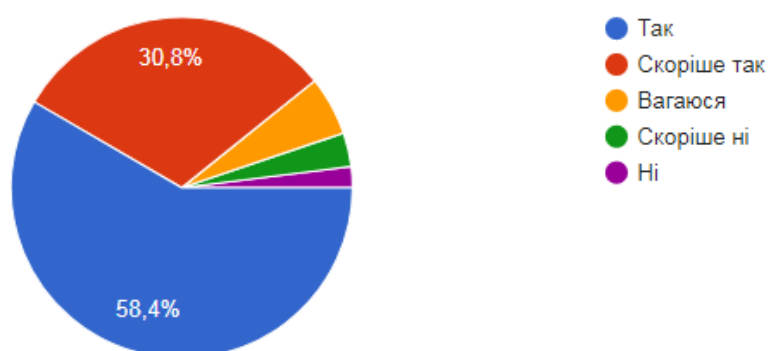


Рис. 3.21

5. Корисним був би діагностичний інструментарій сформованості умінь математичного моделювання

500 відповідей

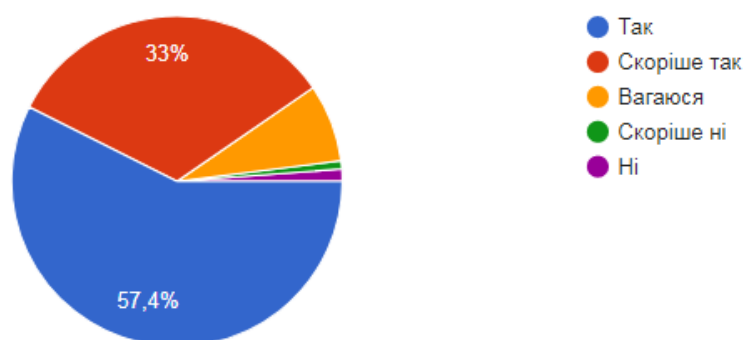


Рис. 3.22

6. Цікаво було б познайомитися з публікаціями різних авторів, щодо формування умінь математичного моделювання

500 відповідей

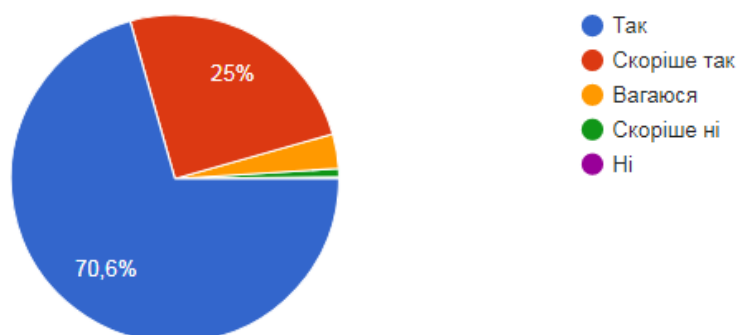


Рис. 3.23

7. Хотілося б мати такий посібник в:

498 відповідей

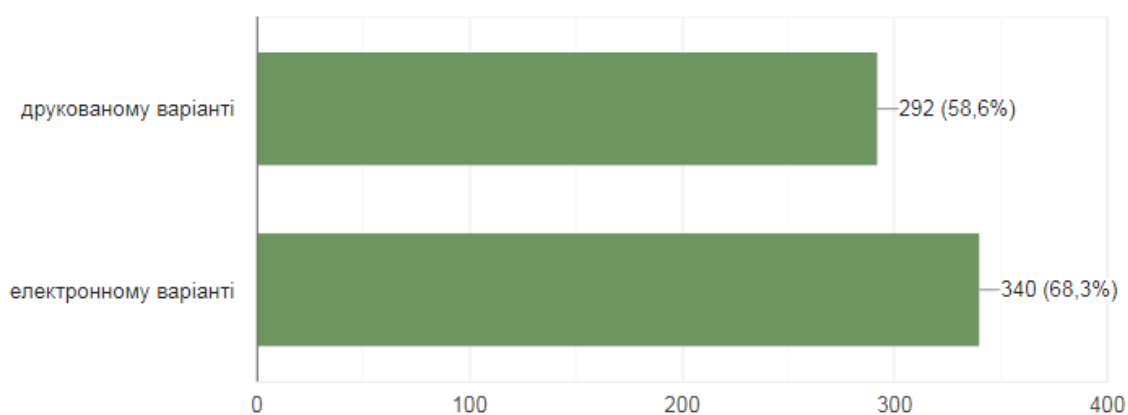


Рис. 3.24

Як слідує із представлених діаграм, 78% опитаних учителів (500 осіб) має необхідність у навчально-методичній літературі з формування в учнів умінь математичного моделювання; 97,2% вчителів визнали корисним розробку системи прикладних задач; 66,4% вчителів відчувають потребу в оволодінні методикою розв'язування задач на основі математичного моделювання; 58,4% вчителів однозначно стверджують про доречність розробки для вчителів орієнтовних конспектів уроків на тематику математичного моделювання, а ще 30,8% вчителів також допускають корисність таких конспектів. 90,4% вчителів зацікавлені в діагностичному інструментарії сформованості умінь учнів щодо математичного моделювання. 95,6% опитаних виявили бажання познайомитися з публікаціями різних авторів щодо формування в учнів умінь математичного моделювання. Мати навчально-методичний посібник з навчання учнів математичному моделюванню виявили бажання 58,6% вчителів у друкованому варіанті, а в електронному варіанті – 68,3% опитаних нами вчителів.

Таким чином, різні методи дослідно-експериментальної роботи на *пошуковому* етапі педагогічного експерименту дозволили побудувати актуальну технологію формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи та розробити відповідний навчально-методичний інструментарій. У підготовленому нами посібнику «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання» для вчителів ми запропонували систему прикладних задач для формування в учнів умінь математичного моделювання, розглянули методичні аспекти розв'язування задач на основі математичного моделювання, сформулювали методичні рекомендації щодо організації самостійної пізнавальної діяльності учнів з метою формування в них умінь математичного моделювання, запропонували анотований список публікацій для вчителів математики щодо формування умінь математичного моделювання в учнів.

3.3. Статистичний аналіз ефективності запропонованого методичного інструментарію формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання

З метою з'ясування ефективності запропонованого нами методичного інструментарію формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання ми використали методику експертної оцінки (метод Делфі). Основними етапами реалізації методу експертних оцінок у нашому дослідженні є: добір експертів; визначення факторів для опитування, проведення опитування, аналіз результатів опитування та обробка результатів.

Експертами виступили вчителі математики міста Вінниці та Вінницької області, які проходили підвищення кваліфікації на базі кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського – 38 вчителів.

В листі опитування було запропоновано 10 факторів: (1) якісне оформлення посібника; (2) наявність чітких науково-обґрунтованих рекомендацій щодо формування в учнів умінь математичного моделювання; (3) збільшення уроків на навчання математики в школі; (4) сучасний, актуальний для учнів зміст задач; (5) переконаність вчителя математики в необхідності спеціальних умов формування в учнів умінь математичного моделювання; (6) висока заробітна плата вчителя; (7) вдалий підбір прикладних задач; (8) методична компетентність вчителя; (9) зацікавленість учнів навчальним матеріалом; (10) знання і розуміння вчителем критеріїв і показників сформованості здатності до математичного моделювання в учнів.

Використані нами методи математичної статистики ґрунтуються на ранжуванні. У нашому випадку кожному фактору кожний експерт присвоював ранг від 10 до 1 (у порядку зменшення для визначення їх відносної значущості). Необхідною умовою надійності колективної оцінки є достатня узгодженість думок опитаних експертів. Для визначення

узгодженості групових оцінок нами використано коефіцієнт конкордації – спільний коефіцієнт рангової кореляції для групи експертів. Обробка результатів опитування експертів відбувалася наступним чином (таблиця 3.5).

Таблиця 3.5. Ранги оцінки факторів.

Номер фактору	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Експерт 1	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆	X ₁₇	X ₁₈	X ₁₉	X ₁₁₀
Експерт 2	X ₂₁	X ₂₂	X ₂₃	X ₂₄	X ₂₅	X ₂₆	X ₂₇	X ₂₈	X ₂₉	X ₂₁₀
.....
Експерт 32	X ₃₂₁	X ₃₂₂	X ₃₂₃	X ₃₂₄	X ₃₂₅	X ₃₂₆	X ₃₂₇	X ₃₂₈	X ₃₂₉	X ₃₂₁₀

Для кожного фактора ми знайшли суму рангів, середній ранг, на основі якого визначили ранг фактору (таблиця 3.6).

Таблиця 3.6. Ранги факторів.

Фактори	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сума рангів	37	124	129	228	320	71	284	176	200	150
Середній ранг	1,16	3,90	4,03	7,12	10	2,22	8,87	5,50	6,25	4,69
Ранг фактору	10	8	7	3	1	9	2	5	4	6

Таким чином найбільш значимими виявилися:

- переконаність вчителя математики в необхідності спеціальних умов формування в учнів умінь математичного моделювання;
- вдалий підбір прикладних задач;
- сучасний, актуальний для учнів зміст задач;
- зацікавленість учнів навчальним матеріалом;
- методична компетентність вчителя.

Оцінка узгодженості думок експертів проводилася за допомогою коефіцієнта конкордації:

$$W = \frac{12}{m^2(n^3-n)} \cdot \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m x_{ij} - \frac{m(n+1)}{2} \right]^2,$$

де m – кількість експертів, n – кількість факторів.

У нашому випадку, $m = 32$, $n = 10$. Отримане значення $W = 0,64$, що згідно із шкалою для коефіцієнтів рангової кореляції потрапляє в інтервал $(0,6; 0,8)$, що означає хорошу узгодженість думок експертів. Для перевірки значущості коефіцієнту конкордації знайдемо фактичне значення за формулою $\chi_{\Phi}^2 = m(n-1) \cdot W$.

За рівнем значущості α і числу ступенів свободи $q=n-1$ в таблицях Пірсона знаходять критичне значення $\chi_{кр}^2$.

Якщо $\chi_{\Phi}^2 > \chi_{кр}^2$, то коефіцієнту конкордації можна довіряти і отримані, на його основі висновки достовірні.

Для перевірки значущості коефіцієнту конкордації знайдемо значення критичної точки за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і числом ступенів свободи $q=10-1=9$. За таблицею Пірсона знайдемо значення $\chi_{кр}^2(9; 0,05) = 10$. Оскільки $\chi_{\Phi}^2 > \chi_{кр}^2$, то можна зробити висновок про значимість коефіцієнту конкордації. Таким чином, висновки отримані в результаті наших експериментальних досліджень є достовірними.

За результатами експерименту, спостереження та проведеного експертного опитування було з'ясовано, що підготовлений нами навчально-методичний інструментарій є ефективним для формування умінь математичного моделювання в учнів. Підготовлений нами посібник «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання» впроваджений нами в практику роботи учителів математики м. Козятина, загальноосвітньої школи I-III ступенів № 1 м. Калинівка Вінницької області, Зеленодольської ЗШ I-III ступенів №1 Апостолівського району, Дніпропетровської області; Тиврівського ліцею-інтернату поглибленої підготовки в галузі науки; фізико-математичної гімназії №17 міста Вінниці (Додаток К, Додаток Н).

З метою з'ясування ефективності запропонованої нами технології формування вмінь математичного моделювання в учнів профільної школи, на узагальнювальному етапі педагогічного експерименту, в 2018–2019 навчальному році нами було обрано 8 груп учнів (200 осіб) різних навчальних закладів та здійснено їх поділ на контрольні та експериментальні групи. Формування та розвиток умінь математичного моделювання в учнів експериментальних групах відбувалась із застосуванням запропонованого нами навчально-методичного інструментарію формування умінь математичного моделювання. В контрольних групах організація навчально-пізнавальної діяльності учнів на уроках математики відбувалась за традиційною методичною системою.

В якості кількісного критерію сформованості вмінь математичного моделювання в учнів контрольної та експериментальної груп був використаний коефіцієнт $k_i = \frac{a}{b}$, де a – сума набраних балів учнем у результаті виконання контрольної роботи, b – максимально можлива сума балів з виконаної роботи. Середнє значення коефіцієнту K сформованості умінь математичного моделювання в експериментальних групах визначалось як середнє арифметичне значень k_i .

За значенням коефіцієнта K визначався рівень сформованості умінь математичного моделювання в учнів: 0 – 0,5 – низький рівень; 0,51 – 0,7 – середній рівень; 0,71 – 0,85 – вищий середнього рівень; 0,86 – 1 – високий рівень сформованості умінь математичного моделювання.

Наприкінці кожного етапу перевірки ефективності технології формування умінь математичного моделювання в учнів здійснювалася підсумкова перевірка сформованості необхідних умінь в учнів у контрольній та експериментальній групах. Для цього здійснювався контрольний зріз набутих учнями умінь математичного моделювання у процесі розв'язування прикладних задач.

Наведемо приклад комплексної контрольної роботи проведеної на останньому етапі педагогічного експерименту:

Контрольна робота на тему «Рівняння»

Правильне виконання завдань 1-3 оцінюється по 1 балу.

У завданнях 1-3 виберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Мотоцикліст проїхав з пункту A в пункт B , відстань між якими дорівнює 40 км, і повернувся назад. На зворотному шляху він зменшив швидкість на 10 км/год порівняно з початковою і витратив на подорож на 20 хв більше, ніж на шлях з пункту A в пункт B . Знайдіть початкову швидкість мотоцикліста. Яке рівняння є математичною моделлю задачі, якщо через x позначено початкову швидкість мотоцикліста?

$$A. \frac{40}{x-10} - \frac{40}{x} = 0,2$$

$$B. \frac{40}{x-10} - \frac{40}{x} = \frac{1}{3}$$

$$B. \frac{40}{x-10} + \frac{40}{x} = 0,2$$

$$Г. \frac{40}{x} - \frac{40}{x-10} = \frac{1}{3}$$

2. Дві бригади робітників, працюючи разом, можуть виконати деяке завдання за 12 днів. Перша бригада, працюючи окремо, може виконати це завдання на 10 днів раніше, ніж друга. За скільки днів може виконати це завдання друга бригада? Яке рівняння є математичною моделлю задачі, якщо через x позначено кількість днів, за які може виконати завдання друга бригада?

$$A. \frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}$$

$$B. \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12}$$

$$B. \frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{10}$$

$$Г. \frac{1}{x} + \frac{1}{x-12} = \frac{1}{10}$$

3. Із селища в місто виїхав велосипедист. Через 2 год слідом за ним із селища виїхав мотоцикліст, швидкість якого на 15 км/год більша за швидкість велосипедиста. У місто вони прибули одночасно. Знайдіть швидкість велосипедиста, якщо відстань від селища до міста дорівнює 60 км. Яке рівняння є математичною моделлю задачі, якщо через x позначено швидкість велосипедиста.

$$\text{А. } 60(x + 15) - 60x = 2x \quad \text{В. } \frac{60}{x+15} + \frac{60}{x} = 2$$

$$\text{Б. } \frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} = 2 \quad \text{Г. } \frac{60}{x} - \frac{60}{x-15} = 2$$

Правильне виконання завдань 4-5 оцінюється по 2 бали.

Скласти математичну модель задачі:

4. Замовлення по випуску холодильників завод повинен був виконати за 20 днів. Випускаючи щодня по 3 холодильники понад план, завод вже за два дні до терміну виготовив на 6 холодильників більше, ніж було передбачено в замовленні. Скільки холодильників відповідно до замовлення повинен був випустити завод?
5. Оператор комп'ютерного набору мав за деякий час набрати 180 сторінок тексту. Проте він виконав роботу на 5 год раніше строку, оскільки набирав щогодини на 3 сторінки більше, ніж планував. Скільки сторінок він набирав щогодини?

Правильне виконання завдань 6-8 оцінюється по 3 бали.

Скласти математичну модель задачі та розв'язати її.

6. Відстань між станціями, що становить 60 км, поїзд мав подолати зі сталою швидкістю за певний час, визначений розкладом, проте перед виїздом поїзд затримали з технічних причин на 5 хв. Щоб наздогнати ці 5 хв і приїхати на станцію за розкладом, машиніст був вимушений збільшити швидкість на 10 км/год. З якою швидкістю мав їхати поїзд за розкладом?
7. Два перекладачі перекладають книгу за 18 днів. Скільки часу знадобилося б другому перекладачу на переклад, якщо він може перекласти книгу на 15 днів швидше, ніж перший?
8. До басейну підведено дві труби. Через одну трубу воду наливають у басейн, а через іншу зливають, причому для зливу потрібно на 1 год

більше, ніж для наповнення. Якщо ж відкрити обидві труби одночасно, то басейн наповниться водою за 30 годин. За скільки годин можна наповнити порожній басейн водою?

Кількісні результати виконання комплексних контрольних робіт учнями експериментальної та контрольної груп наведені в таблиці 3.7.

Таблиця 3.7

Результати аналізу сформованості умінь математичного моделювання в учнів після проведення педагогічного експерименту

Середнє значення коефіцієнта	Експериментальна група	Контрольна група
<i>K</i>	0,73	0,41

Розглянемо розподіл учнів експериментальної та контрольної груп за рівнями сформованості умінь (таблиця 3.8).

Таблиця 3.8

Розподіл учнів за рівнями сформованості умінь математичного моделювання після педагогічного експерименту

Підсумковий рівень	Експериментальна група (%)	Контрольна група (%)
Низький	13	65
Середній	39	21
Вищий середнього	33	14
Високий	15	-

З таблиці 4 бачимо, що відбувся значний ріст усіх показників в експериментальній групі, які перевищили відповідні показники учнів контрольної групи. Причому в контрольній групі ніхто із учнів не досяг високого рівня сформованості умінь математичного моделювання. Якщо розглядати середні значення коефіцієнта *K* учнів експериментальної групи (Таблиця 3), то вони сягнули мітки вище середнього рівня, в той час, як для

учнів контрольної групи засвідчили низький рівень сформованості умінь математичного моделювання.

Таким чином, за результатами проведеного педагогічного експерименту, можна стверджувати, що за допомогою запропонованої нами технології можна формувати вміння математичного моделювання в учнів профільної школи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ У РОЗДІЛІ 3

1. Захарченко Н. В. Експеримент як один із методів педагогічного дослідження. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. 2014. Вип. 39. С. 230-234.
2. Катеринюк Г. Д. Актуальні проблеми формування математичних компетентностей учнів. Матеріали IV Всеукраїнської конференції молодих учених і студентів «Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень». Вінниця, 21-22 листопада 2016. С. 229-231.
3. Катеринюк Г. Д. Використання персонального web-сайту вчителя для формування умінь математичного моделювання. Збірник тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції з міжнародною участю «Сучасні інформаційні технології та інновації методики навчання: досвід, тенденції, перспективи», 9-10 листопада, 2017 р.: Тернопіль Осадца Ю. В. 2017. №1. С.91-94.
4. Катеринюк Г. Д. До питання методики формування геометричних умінь учнів старшої школи. Збірник наукових праць. Вінниця, ВДПУ, 2007. С. 124-125.
5. Катеринюк Г. Д. Здатність до математичного моделювання як ознака математичної компетентності учнів. *Моделювання у навчальному процесі*: матеріали Всеукр. наук.-практ. Інтернет-конф. (03-04 березня 2017 р.) / укладач Н.А. Головіна Луцьк: Вежа-Друк, 2017. С. 70-73.
6. Катеринюк Г. Д. Место и значение методики решения задачи для формирования умений математического моделирования при обучении учащихся. Винницкий государственный педагогический университет имени Михаила Коцюбинского. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, VIII (90), Issue: 222, 2020 Feb.* P. 15-19.
7. Катеринюк Г. Д. Місце і роль математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів. Матеріали Всеукраїнської

- науково-практичної конференції *«Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи»*. Одеса, 15-16 вересня 2016. С. 82-84.
8. Катеринюк Г. Д. Психолого-педагогічні особливості розвитку математичного мислення учнів. Збірник наукових праць. Вінниця, ВДПУ, 2006. С. 200-205.
9. Катеринюк Г. Д. Реалізація прикладної спрямованості навчання математики в спортивно-гуманітарному ліцеї. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції *«Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики»*, 11-13 травня 2017 р., Київ: М. П. Драгоманова, 2017. С. 51-52.
10. Катеринюк Г. Д. Розвиток математичних компетентностей учнів у процесі формування здатності до математичного моделювання *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 47/ редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016. С. 63-67.
11. Катеринюк Г. Д. Система задач з математики прикладної спрямованості для учнів спортивно-гуманітарного профілю. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами I Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця, 2017. С. 150-153.
12. Катеринюк Г. Д. Необхідність вдосконалення умінь математичного моделювання. Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції *«Математика у технічному університеті XXI сторіччя»*, 15–16 травня, 2017 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. Краматорськ : ДДМА, 2017. С. 232-234.

13. Катеринюк Г.Д. Педагогічні умови формування та розвитку здатності до математичного моделювання. «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». К.: Гнозис, 2016. С. 239-246.
14. Катеринюк Г.Д. Система задач з математики прикладної спрямованості для учнів спортивно-гуманітарного профілю. *Методичний пошук. Конструювання задач та їх систем у методичній діяльності вчителя математики*. Науково-методичний збірник праць студентів. Випуск 7. Вінниця, 2017. С. 226-228.
15. Катеринюк Г. Д. Аналіз програм з математики щодо місця і ролі математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 49 / редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2017. 186с. С.25-28.
16. Катеринюк Г. Д. Критерії та показники сформованості здатності до математичного моделювання в учнів профільної школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. Наук. Праць з матеріалами Міжнар. Наук.-практ. конф., 30 травня – 1 червня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. 334 с. С. 263-264.
17. Катеринюк Г. Д. Методичні аспекти формування умінь математичного моделювання в учнів гуманітаріїв. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами II Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 18 жовтня 2018 р. Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2018. 221с. С. 89-92.
18. Катеринюк Г. Д. Порівняльний аналіз шкільних навчальних програм щодо завдання формування в учнів умінь математичного моделювання.

- Сучасна освіта в контексті нової української школи: зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11-12 жовтня 2018 р. М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області [та ін.]. Чернівці, 2018. 276 с. С. 48-52.*
19. Катеринюк Г. Д. Психолого-педагогічні аспекти формування умінь математичного моделювання в учнів старої школи. *Фізико-математична освіта*. Суми, 2018. Випуск 1(15). С. 52-56.
20. Катеринюк Г. Д. Теоретичні аспекти формування умінь учнів у процесі навчання математики. *Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень: зб. наук. пр. Вип. 7 (10) / редкол.: Р.С. Гуревич (голова) [та ін.]* Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2017. С.243-245.
21. Катеринюк Г. Д. Формування ключових компетентностей учнів в освітньому процесі (на прикладі навчання математики). *Професійно-педагогічна компетентність: навчальний посібник / за ред. І. Л. Холковської*. Вінниця: ТОВ «Нілан ЛТД», 2018. 308с. С.114-131.
22. Матяш О. І. Формування методичної компетентності з навчання геометрії майбутніх учителів математики : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика). Вінниця, 2014. 568 с.
23. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Методические особенности системы задач для развития умений математического моделирования в учащихся профильной школы. *Curriculumul școlar: provocări și oportunități de dezvoltare. Materialele conferinței științifice Internaționale. 7–8 decembrie 2018, Chișinău* P. 84-89
24. Матяш О.І., Катеринюк Г.Д. Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2019. 270 с.
25. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Формування здатності учнів до математичного моделювання в умовах позакласної роботи. *Сучасні*

інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Зб. наук. пр. Випуск 52 / редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2018. 465 с. С.93-97.

26. Михайленко Л. Ф., Катеринюк Г. Д. Развитие рефлексии учащихся в процессе формирования умений математического моделирования. *Evaluarea in sistemul educational: deziderate actuale.* Materialele conferinta stiintifica Internationala. 9-10 noiembrie 2017, Chisinau. P.215-218
27. Педагогічний експеримент : навч.-метод. посіб. / укладач: О. Е. Жосан. Кіровоград: Видавництво КОШПО імені Василя Сухомлинського, 2008. 72 с.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертації подано теоретичний аналіз і нове практичне вирішення проблеми формування та розвитку вмінь математичного моделювання в учнів профільної школи. У відповідності до поставленої мети та завдань дисертаційного дослідження отримані наступні **основні результати**:

- *виокремлено* основні проблеми вчителів математики, які пов'язані з формуванням в учнів умінь математичного моделювання;
- *з'ясовано* ступінь розроблення різних аспектів досліджуваної проблеми у педагогічній вітчизняній та зарубіжній літературі;
- *визначено* актуальні методичні аспекти процесу формування в учнів умінь математичного моделювання та ключові фактори його ефективності;
- обґрунтовано місце і роль прикладних задач як основного засобу формування в учнів умінь математичного моделювання;
- *з'ясовано* показники сформованості в учнів умінь математичного моделювання;
- *апробовано* організаційно-методичний інструментарій формування в учнів умінь математичного моделювання, зокрема, авторські задачі, які створені для забезпечення ефективних умов формування умінь математичного моделювання в учнів;
- *запропоновано* технологію формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи та перевірено її ефективність.

Результати дослідження засвідчили досягнення мети та ефективність виконання завдань, уможливили формулювання наступних **висновків**:

- На сучасному етапі розвитку математичної освіти, в умовах реалізації компетентнісного підходу до навчання, проблема формування здатності учнів до математичного моделювання набула особливої гостроти. Упровадження в Україні в шкільний курс математики методу математичного моделювання в останні три десятиріччя, фактично,

обмежилося лише побажаннями щодо необхідності формування необхідних компетентностей учнів. Нині здатність до математичного моделювання стає все більш значущою. Узагальнення доробку українських науковців щодо методики навчання математики в профільній школі дозволяє стверджувати, що проблема розроблення спеціальної методики формування та розвитку умінь математичного моделювання в учнів профільної школи окремо не досліджувалася. Наш аналіз закордонних публікацій спонукає до висновку, що проблема формування та розвитку умінь математичного моделювання – одна із найбільш всесвітньо визнаних проблем у дослідженнях математичної освіти. З'ясовано, що німецька шкільна математична освіта є досить ефективною в покращенні можливостей учнів розв'язувати задачі засобами моделювання. Дослідження проблем навчання моделюванню в німецькомовних країнах перетворилися від просто якісних кейсів на дослідження до великих науково-дослідних проектів. На основі аналізу навчання математичному моделюванню у Німеччині, виокремлюємо актуальні для України проблеми та завдання формування в учнів профільної школи умінь математичного моделювання. Серед основних проблем: недостатня кількість часу, який вказано в навчальних програмах з математики, для формування необхідних умінь учнів; недостатність методичних матеріалів щодо навчання математичному моделюванню (особливо для учнів старших класів); складність оцінювання ефективності навчання учнів моделюванню. У висновках досліджень закордонних науковців вказується також на необхідності застосування технологій, що базуються на проектах: у вигляді міжпредметних проектів з математики; реалізації можливостей навчання на основі проектів; рекомендується використання проектних тем інтегрованих дисциплін, які відрізняються за часом, обсягом та кількістю.

- До актуальних методичних аспектів процесу формування в учнів умінь математичного моделювання ми відносимо, з'ясовані нами у процесі дослідно-експериментальної роботи та підтвержені аналізом висновків закордонних дослідників, наступні положення: здатність до моделювання формується досить важко; діяльність з моделювання в навчанні математики може бути значно змінена завдяки розвитку цифрових технологій; діяльність та роль вчителів математики для успішного впровадження математичного моделювання на уроках математики є важливою; у центрі уваги мають бути дослідження дизайну окремих уроків моделювання, а також усього навчального середовища моделювання; значно впливає на ефективність учнів під час роботи над моделюванням проблем - стиль їхнього математичного мислення; одним із важливих аспектів у навчанні моделюванню є зв'язок між компетентністю моделювання, з одного боку, та різними видами інших компетентностей учня, з іншого боку.

Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке та систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Вчитель математики має усвідомлювати, що математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Вміння математичного моделювання є складним динамічним утворенням, формування якого розпочинається у процесі навчальної діяльності й триває впродовж усієї навчальної та майбутньої професійної діяльності. Математичне моделювання, через свою універсальність, заслуговує бути представленим як самостійна змістова лінія шкільного курсу математики. Формування умінь математичного моделювання – це педагогічно обґрунтований процес формування здатності учня свідомо та успішно виконувати діяльність, засновану на доцільному

використанні набутих знань математичного моделювання та позитивного досвіду їх застосування.

- Прикладні задачі – один з дієвих і ефективних засобів для формування в учнів умінь і навичок застосовувати набуті в процесі навчання математики знання і вміння в нестандартних ситуаціях. У нашому розумінні сутність прикладної спрямованості шкільного курсу математики полягає в орієнтації цілей, змісту і засобів навчання математики у напрямку: здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зв'язків математики з практикою; набуття учнями в процесі математичного моделювання знань, умінь і навичок, які будуть використовуватись ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності. Нині немає такої галузі знань, де б не застосовувалися досягнення математики. Основним засобом розвитку умінь математичного моделювання в учнів профільної школи ми вважаємо спеціальну систему задач сконструйовану вчителем математики, з урахуванням вимог цілісності, інтегративності, адитивності, методичної доцільності та методичної відповідності. Широке і системне застосування методу математичного моделювання протягом вивчення всього курсу математики має стати потужним засобом формування в учнів навичок повсякденного користування математикою. Забезпечення прикладної спрямованості навчання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі й до навчання математики зокрема.
- Акцентуємо увагу, що в старшій школі, відповідно до визначених в програмах з математики результатів навчання, вчителі математики мають забезпечити умови формування та розвитку в учнів умінь математичного моделювання. Метод математичного моделювання допомагає глибше усвідомлювати математичні знання, формувати здатність творчо мислити, послідовно міркувати та презентувати свої ідеї, краще розуміти зміст математичних понять, розвивати вміння

застосовувати математичні знання до розв'язування прикладних задач, аналізувати результати та формулювати аргументовані узагальнення і висновки. Поняття математичної моделі та деякі загальні положення, пов'язані з цим, повинні в тій чи іншій формі ілюструватися протягом всього курсу математики, а розділи шкільних програм з різних навчальних дисциплін, що стосуються розв'язування задач на роботу, рух, відсотки, прогресії, застосування похідних та інтегралів, можуть слугувати формуванню в учнів умінь математичного моделювання. Для якісного оволодіння знаннями, методами, прийомами і вміннями математичного моделювання учнями, необхідним є високий рівень методичної компетентності вчителів математики. Формування та розвиток готовності та здатності учнів до математичного моделювання значно залежить від майстерності вчителя математики створити та оптимально використати в процесі навчання цілісну систему задач. В змісті задач використовуваних для навчання моделюванню має бути відображений особистий досвід учнів, враховані їхні інтереси, сучасність, цікавість, актуальність. Необхідною та можливою є превентивна діяльність вчителя математики старшої профільної школи з виявлення помилок учнів при розв'язуванні текстових задач, їх причин, а також ліквідації помилок, які мали місце при розв'язуванні задач на рух, на сумісну роботу, на відсотки при вивченні в основній школі систем рівнянь та дробово-раціональних рівнянь. Ефективними методами організації діяльності учнів у навчанні математичному моделюванню є проектний метод та навчальне портфоліо. Застосування в профільній школі технології портфоліо «Математичне моделювання на службі у людини» забезпечує суб'єктну позицію учня в навчальному процесі, так як ґрунтується на самостійній діяльності школярів, яка полягає в аналізі власних досягнень, результатів пізнавальної діяльності.

Розроблений й експериментально апробований нами навчально-методичний посібник «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання» є важливим складником технології формування умінь математичного моделювання в учнів. У посібнику подано та обґрунтовано теоретичні аспекти формування здатності учнів до математичного моделювання, запропоновано систему прикладних задач для формування умінь математичного моделювання (задачі на знаходження найменших або найбільших значень величини; задачі геометричного змісту; задачі фізичного змісту; задачі стохастичного змісту; задачі виробничого змісту; задачі сучасного професійного змісту; задачі побутового змісту), пояснено методичні аспекти розв'язування задач на основі математичного моделювання. Також дані методичні рекомендації щодо організації самостійної пізнавальної діяльності учнів з метою формування в них умінь математичного моделювання, проектної діяльності учнів, діагностичного інструментарію сформованості умінь математичного моделювання в учнів. Окремим розділом у цьому посібнику запропоновано для вчителів список публікацій щодо формування умінь математичного моделювання в учнів. Таким чином, нами систематизовано актуальний матеріал для практичного використання на уроках математики в школі, запропоновані авторські задачі. За результатами нашої дослідницько-експериментальної роботи спрямованої на пошук шляхів підвищення ефективності формування умінь учнів з математичного моделювання, можемо стверджувати, що персональний сайт учителя в технології формування в учнів умінь математичного моделювання є актуальним.

- Ефективність запропонованої технології формування в учнів умінь математичного моделювання підтверджена результатами педагогічного експерименту. З'ясовано, що суттєвість змін у формуванні в учнів умінь математичного моделювання в умовах запропонованої нами

експериментальної технології навчання більша суттєвості змін у формуванні таких умінь в умовах традиційної методичної системи.

Матеріали дисертації не вичерпують усіх аспектів проблеми забезпечення ефективних умов формування здатності до математичного моделювання в учнів профільної школи. Ці аспекти вмотивовують доцільність подальших наукових досліджень. Вважаємо необхідним дослідження проблеми формування методичної компетентності майбутніх учителів математики у навчанні учнів математичному моделюванню. Подальшого розвитку потребує також питання розробки вимірників компетентності учнів у математичному моделюванні.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця 1.

**Зміст та вимоги програм з математики для 1-4 класів щодо формування
в учнів умінь математичного моделювання**

Клас	Тема	Зміст	Вимоги програми
1 клас	Ознаки предметів	<p>Ознаки об'єктів навколишнього світу. Спільні та відмінні ознаки.</p> <p>Об'єднання об'єктів навколишнього світу у групу за спільною ознакою.</p> <p>Розбиття групи об'єктів навколишнього світу на підгрупи за спільною ознакою</p>	<p><i>Називає</i> ознаки об'єктів навколишнього світу: форма, розмір, колір тощо;</p> <p><i>розпізнає</i> об'єкти навколишнього світу за розміром, формою, призначенням, кольором тощо;</p> <p><i>визначає</i> спільні та відмінні ознаки об'єктів навколишнього світу ;</p> <p><i>порівнює</i> об'єкти навколишнього світу за вказаними ознаками;</p> <p><i>об'єднує</i> об'єкти навколишнього світу в групу за спільною ознакою;</p> <p><i>розбиває</i> групу об'єктів навколишнього світу на підгрупи за спільною ознакою</p>
	Ознаки, пов'язані із поняттям величини	Співставлення об'єктів навколишнього світу за розміром, довжиною, масою тощо	<p><i>Зіставляє</i> об'єкти навколишнього світу: за розміром (більший, ніж; менший, ніж; однакові за розміром); за довжиною (коротший ніж; довший за; однакові за довжиною); за масою (важчий, легший) та ін.;</p> <p><i>впорядковує</i> об'єкти навколишнього світу за розміром, довжиною, висотою, товщиною, масою тощо</p>
	Геометричні фігури		<p><i>Моделює</i> лінії (прямі, криві та ламані) з підручного матеріалу (шнурків, олівців, паличок, тощо)</p>

Величини: Довжина	Одиниці вимірювання довжини – сантиметр, дециметр, метр. Вимірювання довжин відрізків. Запис результатів вимірювання довжини відрізка. Порівняння довжин відрізків. Побудова відрізків заданої довжини	<i>Розуміє</i> , які одиниці вимірювання довжини доцільно використовувати в конкретному випадку; <i>вимірює</i> довжину предметів або відрізків; <i>записує</i> результати вимірювання із використанням різних одиниць (<i>см, дм, м</i>);
Маса	Одиниця вимірювання маси – кілограм. Запис результатів вимірювання маси тіл (за малюнками)	<i>Порівнює</i> предмети за масою «на руку»; <i>записує</i> результати вимірювання маси (за малюнками);
Місткість	Одиниця вимірювання місткості – 1 літр. Вимірювання місткості посудини за допомогою літрової мірки. Запис результатів вимірювання місткості посудини	<i>Порівнює</i> посудини за місткістю, <i>вимірює</i> місткість посудини, використовуючи літрову мірку; <i>записує</i> результати вимірювання місткості
Вартість	Одиниці вартості – копійка, гривня. Співвідношення між одиницями вартості.	<i>Виконує</i> найпростіші розрахунки з використанням монет і купюр <i>використовує</i> знання про вивчені величини при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач.
Час	Одиниці вимірювання часу – година, доба, тиждень. Визначення часу за годинником	<i>Використовує</i> знання про вивчені величини при розв'язуванні практично - зорієнтованих задач
Дії з іменованими числами (величинами)	Порівняння, додавання і віднімання величин	<i>Порівнює</i> іменовані числа (з одиницями довжини, маси, місткості, вартості, часу) ; <i>додає і віднімає</i> іменовані числа (з одиницями довжини, маси, місткості, вартості, часу), подані в однакових одиницях вимірювання.

<p>Сюжетні задачі Поняття «задача»</p>	<p>Поняття задачі. Структурні елементи задачі. Зв'язок умови і запитання.</p>	<p><i>Знає</i> структурні елементи задачі – умова і запитання; числові дані та шукане; <i>розуміє</i>, що в умові задачі містяться числові дані, а запитання вказує на шукане; <i>визначає</i> числові дані, необхідні і достатні для відповіді на запитання задачі; <i>робить висновок</i> про те, чи описана ситуація є задачею</p>
<p>Прості задачі. Розв'язування простих задач</p>	<p>Прості задачі на знаходження суми, різниці двох чисел; збільшення та зменшення числа на кілька одиниць, різницеve порівняння; знаходження невідомого доданка, зменшуваного, від'ємника.</p>	<p><i>Розв'язує</i> прості задачі на знаходження суми, різниці двох чисел; збільшення та зменшення числа на кілька одиниць, різницеve порівняння; знаходження невідомого доданка</p>
<p>Загальні прийоми розв'язування задачі:</p>	<p>Ознайомлення з текстом задачі, виділення в ньому умови та запитання, числових даних і шуканого, об'єкта (об'єктів) задачі; моделювання описаної ситуації за допомогою малюнків, схем, короткого запису; обґрунтування вибору арифметичної дії для розв'язування задачі; запис розв'язання, формулювання та запис відповіді на запитання задачі</p>	<p><i>Читає</i> задачу; <i>виділяє</i> умову і запитання, про кого або про що йдеться в задачі, числові дані й шукане; <i>обґрунтовує</i> вибір арифметичної дії для розв'язування задачі; <i>записує</i> розв'язання задачі дією із зазначенням найменування результату, коротку відповідь; <i>формулює</i> (усно) повну відповідь на запитання задачі</p>
<p>Додаткові теми</p>	<p>Задачі з логічним навантаженням. Буквена символіка (запис переставного закону додавання, взаємозв'язку між діями додавання і віднімання, властивостей арифметичних дій тощо). Перетворення іменованих чисел. Обернена задача.</p>	

		Задачі на конструювання геометричних фігур.	
2 К Л а с	Величини: Узагальнення і систематизація навчального матеріалу за 1-й клас	Величини. Одиниці вимірювання величин. Розв'язування практично-зорієнтованих задач	<i>Знає</i> , що одиницями вартості товару є гривня і копійка, <i>знає</i> співвідношення між ними та їх скорочене позначення (грн, к.); <i>розрізняє</i> поняття «монета» і «копійка». <i>використовує</i> знання про вивчені величини при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач
	Маса	Одиниця вимірювання маси – центнер. Співвідношення між одиницями вимірювання маси: центнером і кілограмом.	<i>Розуміє</i> , які одиниці вимірювання величини доцільно використовувати в конкретному випадку; <i>використовує</i> знання про масу тіл та одиниці її вимірювання (<i>ц, кг</i>) при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач
	Час	Одиниці вимірювання часу. Місяць, рік. Хвилина. Визначення часу за годинником. Співвідношення між одиницями часу	<i>Знає</i> співвідношення між добою і місяцем, місяцем і роком; годиною і хвилиною; <i>визначає</i> час за годинником з точністю до 5-ти хвилин; <i>використовує</i> знання про час та одиниці його вимірювання при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач
	Іменовані числа	Додавання і віднімання іменованих чисел, поданих в одиницях вимірювання довжини, маси, місткості, часу. Порівняння іменованих чисел. Перетворення іменованих чисел, виражених в одиницях двох найменувань	<i>Розуміє</i> зміст поняття «іменоване число»; <i>виконує</i> дії додавання й віднімання з іменованими числами, поданими в однакових одиницях вимірювання; <i>порівнює</i> іменовані числа, подані в одиницях довжини, маси, місткості, часу; <i>перетворює</i> іменовані числа, виражені в одиницях двох найменувань
	Периметр многокутника	Периметр многокутника. Правило знаходження периметра прямокутника, квадрата	<i>Розуміє</i> поняття «периметр многокутника»; <i>знаходить</i> периметр многокутника; <i>застосовує</i> правило знаходження периметра прямокутника, квадрата, в тому числі й при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач

<p>Сюжетні задачі Узагальнення і систематизація навчального матеріалу за 1-й клас</p>	<p>Підготовча робота до розв'язування складеної задачі</p>	<p><i>Розв'язує</i> прості задачі вивчених видів: на знаходження суми, різниці двох чисел; збільшення та зменшення числа на кілька одиниць, різницеve порівняння; знаходження невідомого доданка, зменшуваного, від'ємника, в тому числі й задачі з логічним навантаженням</p>
	<p>Задачі на знаходження третього числа за сумою двох інших; на знаходження суми трьох доданків; на розкриття змісту множення, ділення, на збільшення або зменшення числа в кілька разів, на кратне порівняння чисел. Запис розв'язання задач на знаходження суми трьох доданків виразом. Обернена задача (ознайомлення)</p>	<p><i>Розуміє</i>, що один і той самий вираз може бути розв'язанням безлічі сюжетних задач; <i>розв'язує</i> задачі на знаходження третього числа за сумою двох інших, на знаходження суми трьох доданків, на розкриття суті множення, ділення, на збільшення або зменшення числа в кілька разів, на кратне порівняння чисел; <i>обґрунтовує</i> усно вибір арифметичної дії, якою розв'язується задача;</p>
	<p>Задачі із зайвими числовими даними або з нестачею даних. Дві послідовні прості задачі, що пов'язані за змістом. Задачі з двома запитаннями. Ознайомлення зі складеною задачею як такою, яку не можна розв'язати однією арифметичною дією</p>	<p><i>Розрізняє</i> просту і складену задачу; <i>обирає</i> числові дані, достатні для знаходження відповіді на запитання задачі; <i>розуміє</i>, що для відповіді на запитання задачі може бракувати числових даних; <i>розуміє</i>, що не на кожне запитання задачі можна відповісти, виконавши одну арифметичну дію</p>

Розв'язуван ня складених задач	Задачі на 2-3 дії одного або різних ступенів, які є комбінаціями простих задач вивчених видів.	<i>Знає</i> порядок роботи над складеною задачею; <i>розв'язує</i> складені задачі на 2-3 дії, які є комбінаціями простих задач вивчених видів; <i>розв'язує</i> задачу різними способами, якщо це можливо
	Аналіз задачі. Допоміжна модель задачі: рисунок, короткий запис, схема.	<i>Виконує</i> аналіз змісту задачі – виділяє умову й запитання, числові дані й шукане, про кого або про що йдеться в умові задачі, ситуацію, яка описується; визначає слова-ознаки окремих відношень; <i>моделює</i> під керівництвом учителя описану в задачі ситуацію у вигляді короткого запису і/або за допомогою схем, рисунків; <i>обґрунтовує</i> усно дію, за допомогою якої розв'язується проста задача; <i>здійснює</i> аналітичні міркування пошуку розв'язання складеної задачі, <i>виділяє</i> у складеній задачі прості, <i>визначає</i> порядок їх розв'язування; <i>складає</i> усно план розв'язування задачі; <i>записує</i> розв'язання задачі арифметичними діями з поясненням, виразом; <i>записує</i> відповідь на запитання задачі; <i>складає</i> усно задачі за рисунком, схемою, виразом
<i>Додаткові теми</i>	Задачі на збільшення та зменшення числа на кілька одиниць, сформульовані у непрямої формі. Складання та розв'язування обернених задач до складених. Нестандартні задачі. Задачі на конструювання геометричних фігур. Стовпчикові та кругові діаграми.	

З К Л а с	Величини Узагальнення і систематизація навчального матеріалу за 2-й клас	Величини. Одиниці вимірювання величин. Іменовані числа. Порівняння іменованих чисел. Дії з іменованими числами.	<i>Застосовує</i> знання про величини, одиниці вимірювання довжини (сантиметр, дециметр, метр); маси (кілограм, центнер), місткості (літр); часу (рік, місяць, тиждень, доба, година, хвилина), вартості (гривня, копійка) та співвідношення між ними при розв’язуванні сюжетних та практично-зорієнтованих задач; <i>перетворює</i> величини, виражені у двох одиницях найменувань; <i>порівнює</i> іменовані числа; <i>виконує</i> додавання й віднімання іменованих чисел, поданих в однакових одиницях вимірювання
	Довжина Маса	Одиниця вимірювання довжини – міліметр, кілометр. Одиниця вимірювання маси – грам, тонна. Співвідношення між одиницями вимірювання величин. Порівняння іменованих чисел. Додавання і віднімання іменованих чисел	<i>Знає</i> співвідношення між одиницями вимірювання довжини, одиницями вимірювання маси; <i>розуміє</i> , які одиниці вимірювання довжини та маси доцільно використовувати в конкретних випадках; <i>вимірює</i> довжини відрізків та <i>записує</i> їх результати з точністю до міліметрів; <i>порівнює, додає і віднімає</i> іменовані числа, подані в одиницях довжини, маси (без переходу через одиницю вимірювання); <i>використовує</i> знання про довжину, масу тіл та одиниць їх вимірювання при розв’язуванні сюжетних та практично -зорієнтованих задач
	Час	Одиниці вимірювання часу – тисячоліття, століття. Одиниця вимірювання часу – секунда. Співвідношення між одиницями вимірювання часу Визначення часу за годинником. Календар. Визначення тривалості події, часу початку, закінчення події.	<i>Знає</i> , якими одиницями вимірюється час (тисячоліття, століття, десятиліття, рік, місяць, доба, година, хвилина, секунда), скорочене позначення години, хвилини і секунди (<i>год, хв, с</i>), <i>знає</i> співвідношення між одиницями вимірювання часу; <i>визначає</i> час за годинником та <i>записує</i> його значення; <i>перетворює</i> іменовані числа, виражені у двох одиницях найменувань; <i>додає і віднімає</i> іменовані числа з одиницями часу (без переходу через одиницю вимірювання); <i>визначає</i> тривалість події, дату (час) початку, закінчення події, використовуючи відповідно або календар, або годинник

Периметр прямокутника, квадрата	Формула периметра прямокутника, квадрата. Задачі на знаходження периметра прямокутника. Задачі на знаходження периметра квадрата та задачі, обернені до них	<i>Знає</i> формули обчислення периметра прямокутника, квадрата; <i>розв'язує</i> задачі на обчислення периметра прямокутника, квадрата; <i>розв'язує</i> задачі на знаходження довжини сторони квадрата за відомим периметром
Сюжетні задачі Узагальнення і систематизація навчального матеріалу за 2-й клас Прості та складені задачі вивчених видів	Розв'язування складених задач на 2-3 дії, які є комбінацією вивчених видів простих задач (дії першого та другого ступенів)	<i>Розв'язує</i> прості та складені задачі вивчених видів
Прості задачі	Прості задачі, що містять збільшення або зменшення числа на/у кілька одиниць, сформульовані у непрякій формі. Обернена задача. Складання і розв'язування обернених задач до простих. Задачі на знаходження частини від числа та числа за величиною його частини. Прості задачі, що містять трійки взаємопов'язаних величин (загальна довжина, довжина одного відрізка, кількість відрізків; загальна маса, маса одного предмета, кількість предметів; загальна місткість, місткість однієї посудини, кількість посудин; вартість, ціна, кількість; загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи). Прості задачі на визначення часу початку	<i>Розв'язує</i> прості задачі, що містять збільшення або зменшення числа на/у кілька одиниць, сформульовані у непрякій формі <i>розуміє</i> поняття «обернена задача»; <i>складає</i> обернені задачі до простих задач та розв'язує їх; <i>розв'язує</i> прості задачі нових видів: на знаходження частини від числа та числа за величиною його частини; задачі, що містять трійки взаємопов'язаних величин; задачі на знаходження часу початку події, тривалості події, часу закінчення події

	події, тривалості події, часу закінчення події. Задачі з буквеними даними	<i>записує</i> розв'язання задачі з буквеними даними виразом
Складені задачі та обернені до них	Складені задачі із взаємопов'язаними величинами: задачі на знаходження суми, різниці чи кратне порівняння двох добутоків або часток. Обернені до них задачі. Задачі на знаходження четвертого пропорційного. Спосіб знаходження однакової величини (зведення до одиниці). Задачі на подвійне зведення до одиниці. Обернені до них задачі. Задачі на спільну роботу та обернені до них. Задачі на знаходження трьох чисел за їх сумою та сумами двох доданків. Задачі геометричного змісту	<i>Розв'язує</i> складені задачі із взаємопов'язаними величинами: задачі на знаходження суми, різниці чи кратне порівняння двох добутоків або часток та обернені до них; задачі на знаходження четвертого пропорційного; задачі на подвійне зведення до одиниці; задачі на спільну роботу; <i>розв'язує</i> задачі на знаходження трьох чисел за їх сумою та сумами двох доданків; <i>розв'язує</i> задачі геометричного змісту
Загальні прийоми розв'язування задач	Аналіз задачі. Допоміжні моделі задачі: короткий запис (схематичний запис або таблиця), схема. Способи запису розв'язання задачі. Розв'язок задачі. Відповідь на запитання задачі. Творча робота над задачею	<i>Виконує</i> аналіз змісту задачі; <i>моделює</i> описану в задачі ситуацію у вигляді короткого запису і/або за допомогою схем; <i>аналізує</i> умову задачі та <i>обирає</i> спосіб її розв'язування; <i>складає</i> усно план розв'язування задачі; <i>записує</i> розв'язання задачі різними способами: окремими діями з поясненням, або виразом; <i>записує</i> повну відповідь на запитання задачі; <i>розв'язує</i> задачі різними способами; <i>складає</i> усно прості і складені задачі за малюнком, коротким записом, схемою, виразом
Додаткові теми	Складені задачі, що містять збільшення або зменшення числа на/у кілька одиниць, сформульовані у непрякій формі. Складені задачі з	

		<p>буквеними даними. Розв'язування складених сюжетних задач алгебраїчним методом. Нестандартні задачі. «Магічні фігури». Математичні ребуси. Стовпчикові та кругові діаграми</p>	
4 к л а с	Дроби	<p>Знаходження дроби від числа. Знаходження числа за величиною його дроби</p>	<p><i>Застосовує</i> правила знаходження дроби від числа та числа за величиною його дроби при розв'язуванні практично - зорієнтованих задач</p>
	Узагальнення і систематизація навчального матеріалу за 3-й клас	<p>Одиниці вимірювання довжини: міліметр, сантиметр, дециметр, метр, кілометр. Співвідношення між одиницями вимірювання довжини. Одиниці вимірювання маси: грам, кілограм, центнер, тонна. Співвідношення між одиницями вимірювання маси. Одиниці вимірювання часу: секунда, хвилина, година, доба, місяць, рік, століття, тисячоліття. Співвідношення між одиницями вимірювання часу. Одиниці вартості: гривня, копійка. Співвідношення між одиницями вартості. Порівняння іменованих чисел. Дії з іменованими числами</p>	<p><i>Знає</i> співвідношення між одиницями довжини, маси, часу, грошовими одиницями; <i>перетворює</i> більші одиниці вимірювання величини у менші і навпаки; <i>порівнює</i> іменовані числа; <i>виконує</i> додавання і віднімання, множення і ділення на одноцифрове число іменованих чисел, виражених в одиницях довжини, маси, вартості, часу; <i>застосовує</i> співвідношення між одиницями вимірювання величин при розв'язуванні практично - зорієнтованих задач</p>
	Швидкість	<p>Швидкість тіла у прямолінійному рівномірному русі. Одиниці швидкості. Залежність між швидкістю тіла, часом і пройденим шляхом при рівномірному прямолінійному русі та формули для їх</p>	<p><i>Розуміє</i> швидкість рухомого тіла як шлях, пройдений ним за одиницю часу; <i>знає</i> формули для знаходження швидкості руху тіла, шляху та часу; <i>знаходить</i> швидкість, час, шлях при розв'язуванні практично - зорієнтованих задач</p>

	обчислення	
Площа	<p>Площа. Порівняння плоских геометричних фігур за площею.</p> <p>Одиниці площі – квадратний міліметр, квадратний сантиметр, квадратний дециметр, квадратний метр, квадратний кілометр, ар (сотка), гектар.</p> <p>Вимірювання площі палеткою.</p> <p>Формула площі прямокутника, квадрата.</p> <p>Задачі на знаходження площі прямокутника та обернені до них</p>	<p><i>знає</i> формули для знаходження площі прямокутника, квадрата та <i>застосовує</i> їх при розв'язуванні практично - зорієнтованих задач ;</p> <p><i>знаходить</i> довжину однієї сторони прямокутника за відомими площею та іншою стороною</p>
Сюжетні задачі Узагальнення і систематизація навчального матеріалу за 3-й клас	<p>Прості задачі. Складені задачі, які є комбінаціями вивчених видів простих задач на дії різних ступенів</p>	<p><i>Розв'язує</i> прості задачі вивчених видів; <i>розв'язує</i> складені задачі на 2–4 дії (на знаходження суми, різниці та кратне порівняння двох добутоків або часток та обернені до них)</p>
Прості й складені задачі	<p>Задачі на знаходження дробу від числа та числа за величиною його дробу.</p> <p>Прості та складені задачі на встановлення залежності між швидкістю, часом і шляхом при рівномірному прямолінійному русі.</p> <p>Прості задачі на обчислення тривалості події, дати її початку, дати закінчення події</p>	<p><i>Розв'язує</i> сюжетні задачі вивчених видів</p>

	<p>Задачі на знаходження четвертого пропорційного. Задачі на подвійне зведення до одиниці.</p> <p>Задачі на пропорційне ділення.</p> <p>Задачі на знаходження невідомих за двома різницями.</p> <p>Задачі на спільну роботу.</p> <p>Задачі, на рівномірний прямолінійний рух двох тіл в різних напрямках</p>	<p><i>розв'язує</i> задачі вивчених типів (за можливості - різними способами)</p>
	<p>Задачі на обчислення довжини сторони прямокутника за відомим периметром і довжиною однієї з його сторін</p>	<p><i>розв'язує</i> задачі на обчислення довжини сторони прямокутника за відомим периметром і довжиною однієї з його сторін</p>
	<p>Задачі з буквеними даними</p>	<p><i>розв'язує</i> задачі з буквеними даними складанням виразу</p>
	<p>Задачі міжпредметного змісту на роботу з даними</p>	<p><i>розв'язує</i> пізнавальні та практично - зорієнтовані задачі, опираючись на таблиці, стовпчикові діаграми тощо</p>
<p>Загальні прийоми розв'язування задач</p>	<p>Аналіз змісту задачі.</p> <p>Складання допоміжної моделі задачі: короткого запису, схеми.</p> <p>План розв'язування задачі.</p> <p>Різні форми запису розв'язання задачі.</p> <p>Відповідь на запитання задачі.</p> <p>Перевірка правильності розв'язання задачі.</p> <p>Творча робота над задачею</p>	<p><i>Здійснює</i> аналіз змісту задачі;</p> <p><i>моделює</i> описану в задачі ситуацію у вигляді короткого запису і/або за допомогою схем;</p> <p><i>складає</i> усно план розв'язування задачі;</p> <p><i>використовує</i> різні форми запису розв'язання задачі (діями з поясненням, або виразом);</p> <p><i>розв'язує</i> задачі різними способами;</p> <p><i>перевіряє</i> правильність розв'язку задачі способом складання і розв'язування обернених задач, іншим способом розв'язування задачі;</p> <p><i>складає</i> задачі за виразом, малюнком, схемою, аналогічні до розв'язаної</p>
<p>Додаткові теми</p>	<p>Алгебраїчний метод розв'язування сюжетних складених задач.</p> <p>Додавання та віднімання складених іменованих чисел, поданих в одиницях часу.</p> <p>Множення і ділення іменованих чисел,</p>	

	<p>поданих в одиницях вимірювання довжини й маси, на двоцифрове число.</p> <p>Залежність швидкості від зміни відстані при сталому часі; від зміни часу при сталій відстані.</p> <p>Задачі на рух в одному напрямку.</p> <p>Задачі на рух тіл за течією та проти течії річки.</p> <p>Нестандартні задачі, задачі логічного характеру.</p> <p>Кругові діаграми</p>	
--	--	--

Таблиця 2.

Зміст та вимоги програм з математики для базової школи щодо формування в учнів умінь математичного моделювання

Клас	Тема	Зміст	Вимоги програми
5 клас	Тема 1. Натуральні числа і дії з ними.	Рівняння. Текстові задачі	Розв'язує: текстові задачі арифметичним і алгебраїчним способами
	Тема 2. Дробові числа і дії з ними.	Відсотки. Середне арифметичне. Середнє значення величини	Пояснює, що таке середнє значення величини Розв'язує вправи, що передбачають: знаходження середнього значення величини
6 клас	Тема 3. Відношення і пропорції.	Пряма пропорційна залежність. Відсоткові розрахунки.	Наводить приклади пропорційних величин. Пояснює, що таке: пряма пропорційна залежність; Розв'язує: основні задачі на відсотки; задачі на пропорційні величини і пропорційний поділ.
	Тема 4. Раціональні числа та дії над ними	Рівняння. Основні властивості рівнянь. Приклади графіків залежностей між величинами.	Будує та знаходить на малюнках: графіки залежностей між величинами по точках. Розв'язує вправи, що передбачають: аналіз графіків залежностей між величинами (відстань, час; температура, час тощо).

			Розв'язує: текстові задачі за допомогою рівнянь.
7 клас	Тема 2. Функції Тема 3. Лінійні рівняння та їх системи	Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів. Лінійні рівняння та їх системи як математичні моделі текстових задач	Наводить приклади: функціональних залежностей. Розв'язує: текстові задачі за допомогою лінійних рівнянь з однією змінною; текстові задачі за допомогою систем двох лінійних рівнянь з двома змінними
8 клас	Тема 3. Квадратні рівняння	Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі	Розв'язує вправи, що передбачають: складання і розв'язування квадратних рівнянь та рівнянь, що зводяться до них, як математичних моделей прикладних задач
9 клас	Тема 2. Квадратична функція	Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі	Розв'язує вправи, що передбачають: складання і розв'язування систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей прикладних задач

Таблиця 3.

**Порівняльна таблиця зміни змісту та вимог послідовних програм
з математики щодо формування в учнів умінь
математичного моделювання в 5-6 класах**

Попередні програми з математики		Останні програми з математики	
Зміст	Вимоги	Зміст	Вимоги
<p>5 клас Рівняння. Розв'язування текстових задач, зокрема комбінаторних</p>	<p>Аналізує залежності між величинами (швидкість, час і відстань; ціна, кількість і вартість тощо). Розв'язує нескладні текстові задачі, що вимагають використання залежностей між величинами.</p> <p>Розв'язує текстові задачі на основі аналізу залежностей між величинами, про які йдеться в умові, та прості задачі комбінаторного характеру.</p>	<p>5 клас Рівняння. Текстові задачі</p>	<p>Розв'язує: текстові задачі арифметичним і алгебраїчним способами</p> <p>Пояснює, що таке середнє значення величини</p> <p>Розв'язує вправи, що передбачають: знаходження середнього значення величини</p>
<p>5 клас Відсотки. Середнє арифметичне, його використання для розв'язування задач практичного змісту. Середнє значення величини.</p>	<p>залежностей між величинами, про які йдеться в умові, та прості задачі комбінаторного характеру.</p>	<p>5 клас Відсотки. Середнє арифметичне. Середнє значення величини</p>	<p>Розв'язує текстові задачі на основі аналізу залежностей між величинами, про які йдеться в умові, та прості задачі комбінаторного характеру.</p>

Розв'язування текстових задач.			
6 клас Розв'язування текстових задач.	Розв'язує текстові задачі.	-	-
6 клас Відсоткові розрахунки. Задачі економічного змісту. Прямая пропорційна залежність. Задачі на пропорційний поділ.	Наводить приклади пропорційних величин. Розв'язує: три основні задачі на відсотки; задачі на пропорційні величини і пропорційний поділ; задачі ймовірнісного характеру	6 клас Прямая пропорційна залежність. Відсоткові розрахунки.	Наводить приклади пропорційних величин. Пояснює , що таке: пряма пропорційна залежність; Розв'язує: основні задачі на відсотки; задачі на пропорційні величини і пропорційний поділ.
6 клас Рівняння. Основні властивості рівняння. Приклади графіків залежностей між величинами.	Розв'язує вправи, що передбачають: побудову окремих графіків залежностей між величинами по точках. Аналізує графіки залежностей між величинами (відстань, час; температура, час тощо). Розв'язує: задачі за допомогою рівнянь.	6 клас Рівняння. Основні властивості рівнянь. Приклади графіків залежностей між величинами.	Будує та знаходить на малюнках: графіки залежностей між величинами по точках. Розв'язує вправи, що передбачають: аналіз графіків залежностей між величинами (відстань, час; температура, час тощо). Розв'язує: текстові задачі за допомогою рівнянь.

Таблиця 4.

**Зміст та вимоги програм з математики щодо формування в учнів
умінь математичного моделювання в старшій школі**

Клас	Зміст	Рівень стандарту	Академічний рівень	Профільний рівень
10 клас	Відсоткові розрахунки.	Вміє: розв'язувати задачі на відсотки	-	-
	Функції, їхні властивості та графіки	Знаходить природну область визначення функціональних залежностей; Моделює реальні процеси за допомогою степеневих функцій.	-	-
	Тригонометричні функції	Застосовує тригонометричні функції до опису реальних процесів;	Застосовує тригонометричні функції до опису реальних процесів, зокрема гармонічних коливань.	-
	Похідна та її застосування	Розуміє значення поняття похідної для опису реальних процесів, зокрема механічного руху; Знаходить швидкість змінення величини в точці; Розв'язує нескладні прикладні задачі на знаходження	Пояснює геометричний та фізичний зміст похідної. Розв'язує нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.	Пояснює геометричний і фізичний зміст похідної; Розв'язує прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин; Застосовує похідну до розв'язування

		найбільших і найменших значень реальних величин.		задач, зокрема прикладного змісту.
11 клас	Показникова та логарифмічна функції Інтеграл та його застосування Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація	Застосовує показникову та логарифмічну функції до опису реальних процесів. -	- Застосовує інтеграл до розв'язування прикладних задач -	Застосовує показникову та логарифмічну функції до розв'язування прикладних задач. Застосовує інтеграл до розв'язування прикладних задач Розв'язує задачі, моделями яких є відомі рівняння або системи рівнянь.

**Система прикладних задач для формування умінь математичного
моделювання**

Задачі на знаходження найменших або найбільших значень величини

1. Два лижних загони йшли з однаковою швидкістю; один пройшов 112 км, другий – 96 км. Скільки часу йшов кожний загін, якщо їх швидкість була найбільша з усіх можливих швидкостей, що виражаються числом цілих кілометрів за годину?
2. У продавчині 42 яблука, 60 абрикосів і 90 груш. Вона вирішила розділити їх на однакові фруктові набори. Яку найбільшу кількість таких наборів вона могла б зробити з усіх цих фруктів?
3. Автобаза повинна виділити в розпорядження хлібзаводу не менше 8 машин вантажопідйомністю по 3 тони і не менше 6 машин по 5 тонн. Усього база може виділити не більше 15 машин. Скільки машин по 3 і 5 тонн треба виділити, щоб їх загальна вантажопідйомність була найбільшою?
4. (ЗНО 2017) В торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки однакової форми і розміру. Якого найменшого значення може набувати m , якщо ймовірність намагання витягнути з торбинки цукерки з молочного шоколаду менша за 0,25?
5. Є квадратний лист жерсті зі стороною 60 см. Знайдіть розміри квадратів, які треба вирізати в кутах даного листа, щоб з одержаної заготовки зробити коробку найбільшого об'єму.

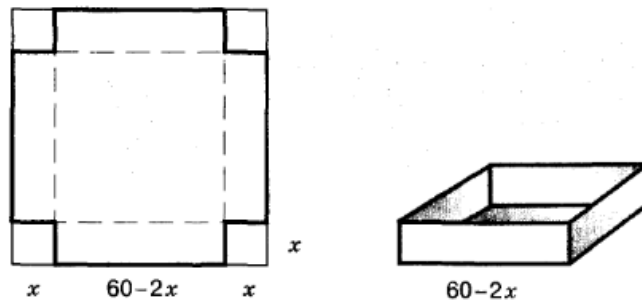


Рис.Д. 1.1.

6. Треба відгородити два пасовища у формі рівних прямокутників зі спільною стороною, щоб сума їх площ дорівнює 6 га. Знайдіть найменшу можливу довжину огорожі.
7. Якими повинні бути розміри басейну об'ємом 32 м^3 з квадратним дном і вертикальними стінками, щоб на його облицювання пішло найменше плиток?
8. Приватний пляж планують огородити так, як зображено на малюнку (від річки огорожа не ставиться). Для цього завезено 1000 м огорожі. Яку найбільшу площу (у гектарах) може мати огорожений таким чином пляж?
9. Заготовлено матеріал на 240 м огорожі двох суміжних ділянок прямокутної форми, периметр яких рівні. Які ширини і довжини повинні мати ділянки, щоб їх площа була найбільшою?
10. Відстань між двома пунктами А і В 80 км. На шахті А за день добувають 300 т руди, на шахті В 150 т. Де доцільно будувати завод для переробки руди, щоб за умови її перевезення кількість тонн на кілометр була найменшою?

Задачі геометричного змісту

11. Спостерігач знаходиться на відстані 50 м від вежі, висоту якої хоче знайти. Основу вежі він бачить під кутом 10° до лінії горизонту, а вершину під кутом 45° до лінії горизонту. Яка висота вежі?

12. Муха опинилася в банці з-під цукру. Банка має форму куба. Чи зможе муха послідовно обійти всі 12 ребер куба, не проходячи двічі по одному ребру, за умови, що підскакувати та перелітати з місця на місце муха не буде?
13. Яка повинна бути площа кабінету висотою 3,5 м для класної кімнати, що вміщує 28 чоловік, якщо на кожного учня потрібно $7,5 \text{ м}^3$ повітря?
14. Піраміда Хеопса має форму правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 230 м, а висота близько 138 м. Знайдіть її об'єм в кубічних метрах.
15. Воду, що знаходиться в циліндричній посудині на рівні 12 см, перелили в циліндричну посудину, в два рази більшого діаметра. На якій висоті буде перебувати рівень води в другій посудині?
16. Одна циліндрична кружка вдвічі вища другої, зате друга в півтора рази ширше. Знайдіть відношення обсягу другої кружки до обсягу першої.
17. Воду, що заповнює всю конічну колбу висотою 12 см, перелили в циліндричну посудину, радіус основи якої дорівнює радіусу кола конічної колби. На якій висоті від основи циліндричної посудини буде знаходитися поверхня води?
18. Мідний прямокутний паралелепіпед, ребра якого рівні 20 см, 20 см і 10 см, переплавлений в кулю. Знайдіть радіус кулі. (Прийміть $\pi \approx 3$.)
19. Скільки потрібно взяти мідних куль радіуса 2 см, щоб з них можна було виплавити кулю радіуса 6 см?
20. Знайдіть радіус кулі, який можна виплавити з трьох мідних куль радіусів 3 см, 4 см і 5 см.
21. М'якоть вишні оточує кісточку товщиною, рівній діаметру кісточки. Вважаючи кулястою форму вишні і кісточки, знайдіть відношення об'єму м'якоті до об'єму кісточки.
22. Профіль русла річки має форму рівнобедреної трапеції, основи якої рівні 10 м і 6 м, а висота – 2 м. Швидкість течії дорівнює 1 м / сек. Який

об'єм води проходить через цей профіль за 1 хв? Відповідь дайте у кубічних метрах.

23. Квадратний аркуш паперу зі стороною 6 см перегнули по пунктирним лініям, показаним на малюнку, і склали трикутну піраміду. Знайдіть її об'єм.

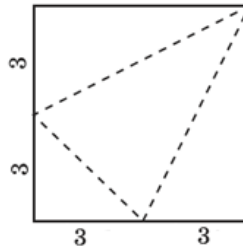


Рис. Д. 2.1.

24. Знайдіть об'єм фігури, зображеної на малюнку (всі двогранні кути – прямі).

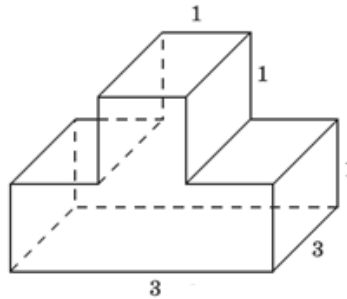


Рис. Д. 2.2.

25. Діаметр Сонця приблизно в 400 разів більше діаметру Місяця. У скільки разів об'єм Сонця більше об'єму Місяця?
26. Від квадратного листа жерсті відрізали смугу завширшки 25 см. Знайдіть початкові розміри листа, якщо площа його частин утвореної після відрізання смуги, дорівнює 4400 см^2 .
27. Знайдіть об'єм фігури, зображеної на малюнку (всі двогранні кути прямі).

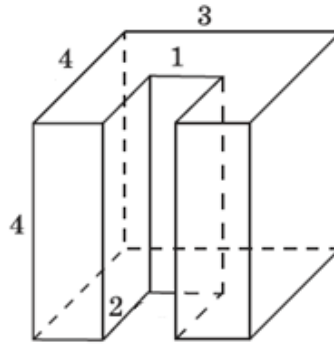


Рис. Д. 2.3.

28. Знайдіть об'єм фігури, зображеної на малюнку (всі двогранні кути-прямі).

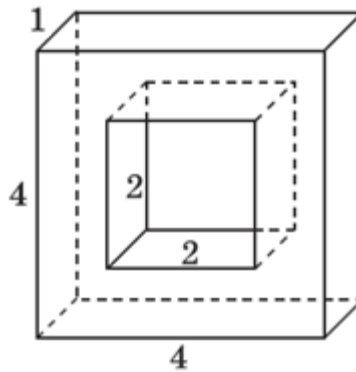


Рис. Д. 2.4.

29. У кожній грані мідного куба з ребром 6 см виконали наскрізний квадратний отвір зі стороною квадрата 2 см. Знайдіть вагу частини що залишилась, вважаючи, що питома вага міді приблизно дорівнює $0,9 \text{ г / см}^3$.

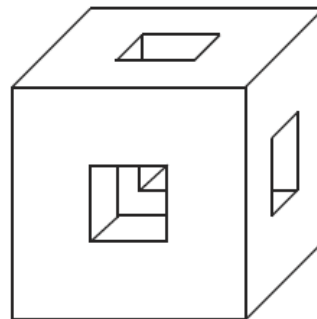


Рис. Д. 2.5.

Задачі фізичного змісту

30. Товарний потяг довжиною 630 м та експрес довжиною 120 м йдуть по двом паралельним коліям у одному напрямку зі швидкостями 48,6 км/год та 102,6 км/год відповідно. Протягом якого часу експрес буде обганяє товарний потяг?
31. Два потяги йдуть назустріч один одному зі швидкостями 36 км/год та 54 км/год. Пасажир у першому потязі помічає, що другий потяг проходить повз нього протягом 6 с. Яка довжина другого потяга?
32. Теплохід довжиною 300 м рухається по прямому курсу у стоячій воді зі швидкістю v_1 . Катер, що має швидкість $v_2 = 90$ км/год, проходить відстань від корми рухомого теплохода до його носу та назад за 37,5 с. Знайти швидкість теплохода v_1 .
33. Корабель пливе на захід зі швидкістю v . Відомо, що вітер дме з південного заходу. Швидкість вітру на палубі корабля дорівнює u_0 . Знайти швидкість вітру u відносно землі.
34. Один потяг йшов першу половину шляху зі швидкістю 80 км/год, а другу половину шляху зі швидкістю 40 км/год. Другий потяг йшов першу половину часу зі швидкістю 80 км/год, а другу половину часу зі швидкістю 40 км/год. Яка середня швидкість кожного потяга?
35. З Києва до Львова вирушає товарний потяг зі швидкістю 45 км/год, а через 1 год у тому ж напрямку вирушає пасажирський потяг зі швидкістю 81 км/год. Через який час після відправлення товарного потягу і на якій відстані від Києва пасажирський потяг наздожене товарний?
36. Потяг довжиною 225 м, рухаючись зі сталою швидкістю, проходить повз телеграфний стовп за 15 с. Скільки часу мине від моменту входження тепловоза в тунель довжиною 450 м до моменту виходу з тунеля останнього вагону ?

- 37.Парашутист спускається з постійною швидкістю 5 м/с. На відстані 10 м від землі у нього випав предмет. На скільки пізніше за цей предмет приземлиться парашутист? Опором повітря для падаючого предмета знехтувати.
- 38.Два потяги пройшли однаковий шлях за однаковий час, але перший потяг, рухаючись зі стану спокою, пройшов весь шлях з прискоренням 3 м/с^2 , а другий потяг половину шляху йшов зі швидкістю 18 км/год, а іншу половину шляху – зі швидкістю 54 км/год. знайти шлях, що пройшов кожний потяг.
- 39.Снаряд зенітної гармати, випущений вертикально вгору зі швидкістю 800 м/с, досяг цілі через 6 с. На якій висоті знаходився ворожий літак і якою була швидкість снаряда при досягненні цілі?
- 40.Два велосипедиста стартують одночасно на дистанції 2,2 км. Середня швидкість на всьому шляху у 1-го велосипедиста 10 м/с, у 2-го – 11 м/с. На скільки секунд другий велосипедист випереджає першого?
- 41.Машиніст пасажирського потягу, що рухається зі швидкістю 30 м/с, побачив товарний потяг, що йшов на відстані 180 м зі сталою швидкістю 9 м/с у тому ж напрямі. Машиніст відразу ж загальмував, причому гальма викликали прискорення $1,2 \text{ м/с}^2$. Чи станеться зіткнення потягів?
- 42.Від пристані відправився за течією річки пліт. Через 5 год 20 хв від цієї ж пристані у цьому ж напрямку рушив моторний човен, який через 20 км наздогнав пліт. Яка швидкість плоту, якщо власна швидкість моторного човна більша від швидкості плоту на 9 км/год?
- 43.З міста А в місто В виїжджає велосипедист, а через три години з міста В виїжджає назустріч йому мотоцикліст, швидкість якого втричі більша від швидкості велосипедиста. Вони зустрічаються посередині між А і В. Якби мотоцикліст виїхав через дві години після велосипедиста, то зустріч відбулася б на 15 км ближче до А. Знайти віддаль від А до В.
- 44.З пунктів А і В одночасно назустріч один одному вийшли два пішоходи і зустрілись через 3 год 20 хв. Скільки часу потрібно кожному з них, щоб

пройти цю відстань, якщо перший пройшов з А в В на 5 год пізніше ніж другий з В в А?

45. 8 % усього шляху становлять 56 км. Визначте довжину всього шляху?

46. Два лижних загони йшли з однаковою швидкістю; один пройшов 112 км, другий – 96 км. Скільки часу йшов кожний загін, якщо їх швидкість була найбільша з усіх можливих швидкостей, що виражаються числом цілих кілометрів за годину?

47. Відстань між двома містами дорівнює 420 км. З одного міста до іншого виїхало одночасно дві машини. Швидкість однієї з них на 10 км/год більша за швидкість другого. Через що вона приїхала в пункт призначення на 1 год раніше. Знайти швидкість однієї машини?

48. Із двох міст, відстань між якими дорівнює 42 км, одночасно в одному напрямку виїхали два автомобілі. Перший автомобіль, який їхав позаду другого, рухався зі швидкістю 70 км/год, а другий автомобіль — зі швидкістю 56 км/год. Визначте, скільки часу знадобиться першому автомобілю після початку руху, щоб наздогнати другий?

49. Із порту одночасно вийшли два теплоходи: перший рухався на південь, другий — на захід. Через 2 год відстань між ними становила 60 км. Знайдіть швидкість руху теплоходів, якщо теплохід, який ішов на південь, рухався на 6 км/год швидше за теплохід, який ішов на захід.

50. Драбина завдовжки 5 м стояла вертикально. Потім її нижній кінець став переміщатися по підлозі зі сталою швидкістю 2 м/с. З якою швидкістю в момент t опускався верхній кінець драбини?

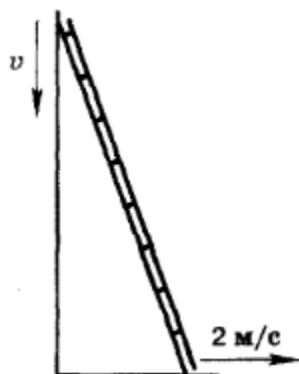


Рис. Д.3.1.

Задачі стохастичного змісту

51. На фірмі працюють 8 аудиторів, із яких 3 – високої кваліфікації, і 5 фінансистів, із яких 2 – високої кваліфікації. У відрядження необхідно відправити групу із 3 аудиторів і 2 фінансистів. Яка ймовірність того, що в цій групі буде хоча б 1 аудитор високої кваліфікації і хоча б 1 фінансист високої кваліфікації, якщо кожен спеціаліст має рівні можливості поїхати у відрядження.
52. Ймовірність своєчасної сплати податків для першого підприємства дорівнює 0,8, для другого – 0,6, для третього – $\frac{2}{3}$. Визначити ймовірність своєчасної сплати податків не більше ніж одним підприємством.
53. Учень витягнув екзаменаційний білет із 25, які лежали на столі. Знайдіть ймовірність того, що номер узятото білета: а) закінчується цифрою 5; б) ділиться на 3; в) ділиться на 4.
54. У ящику лежать катушки ниток трьох кольорів: 7 білих, 11 червоних, 4 сині. Визначте ймовірність того, що вийнята навмання катушка буде нечервоною.
55. Середній вік одинадцяти футболістів команди становить 21 рік. Під час гри одного з футболістів було вилучено з поля, після чого середній вік решти гравців став 20 років. Скільки років футболістові, який залишив поле?
56. (ЗНО 2018) В Оленки є 8 різних фотографій з її зображенням та 6 різних фотографій її класу. Скільки всього в неї є способів вибрати з них три фотографії зі своїм зображенням для персональної сторінки соціальної мережі та дві фотографії свого класу для сайту школи?
57. (ЗНО 2016) У чайному кіоску в наявності є лише розфасовані у коробки по 100 г листовий чорний чай 8 видів, серед яких є вид «чорна перлина». Покупець вирішив придбати цьому кіоску для подарункового набору три коробки чорного чаю трьох різних видів, серед яких обов'язково

повинно бути вид «чорна перлина». Скільки всього в покупця є варіантів такого придбання трьох коробок чаю для набору з наявних у кіоску?

Задачі виробничого змісту

- 58.Криницю циліндричної форми, що має діаметр 135 см, а глибину 180 см треба викласти цеглою. Скільки штук цеглин для цього буде потрібно, якщо розмір цеглини 25x12x6,5 см.
- 59.Скільки коробок у формі прямокутного паралелепіпеда розмірами $30 \times 40 \times 50$ (см) можна помістити в кузов машини розмірами $2 \times 3 \times 1,5$ (м)?
- 60.Скільки дощок довжиною 3,5 м, шириною 20 см і товщиною 20 мм вийде з чотирикутної балки довжиною 105 дм, що має в перерізі прямокутник розміром $30 \text{ см} \times 40 \text{ см}$?
61. Розміри цеглини $25 \times 12 \times 6,5$ (см). Знайдіть вагу однієї цеглини в грамах, якщо об'ємна вага цегли дорівнює $1700 \text{ кг} / \text{м}^3$.
- 62.Прямолінійна ділянка дороги шириною 10 м і довжиною 100 м потрібно покрити асфальтом товщиною 5 см. Скільки буде потрібно машин асфальту, якщо об'ємна вага асфальту дорівнює $2,4 \text{ т} / \text{м}^3$, а вантажопідйомність однієї машини – 5 тонн?
- 63.У циліндричну посудину, в якій знаходиться 6 дм^3 води, опущена деталь. При цьому рівень рідини в посудині піднявся в 1,5 рази. Чому дорівнює об'єм деталі в кубічних дециметрах?
- 64.Чавунна труба має довжину 2 м і зовнішній діаметр 20 см. Товщина стінок труби дорівнює 2 см. Знайдіть вагу труби, якщо питома вага чавуну приблизно дорівнює $7,5 \text{ г} / \text{см}^3$. Відповідь дайте у кілограмах. (Прийміть $\pi \approx 3$.)
65. Який обсяг фарби потрібно, щоб пофарбувати зовнішню поверхню циліндричної труби діаметру 1 м і довжиною 10 м шаром фарби в 1 мм? Відповідь дайте у кубічних дециметрах. (Прийміть $\pi \approx 3$.)

66. Який обсяг фарби потрібно, щоб пофарбувати поверхню кулі радіуса 1 м шаром фарби в 0,5 мм? Відповідь дайте у кубічних дециметрах. (Прийміть $\pi \approx 3$.)

67. Знайдіть об'єм деталі, зображеної на малюнку, складеної з двох частин циліндрів. (Прийміть $\pi \approx 3$.)

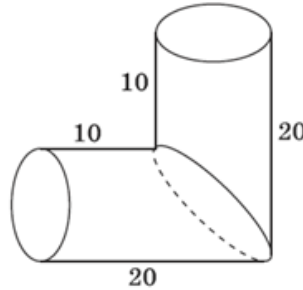


Рис. Д.5.1.

68. Знайдіть об'єм деталі, зображеної на малюнку, вирізаної з циліндра. (Прийміть $\pi \approx 3$.)

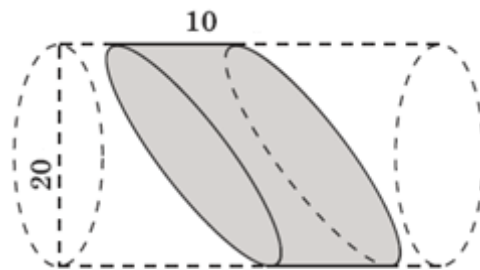


Рис. Д.5.2.

69. Одна бригада може зорати все поле за 12 днів. Іншій бригаді для виконання цієї самої роботи треба 75% від цього часу. Після того, як протягом 5 днів працювала тільки перша бригада, до неї приєдналась друга, і обидві разом закінчили роботу. Скільки днів працювали бригади разом?

70. Протягом року завод двічі збільшував випуск продукції на одне і те саме число відсотків. Знайти це число, якщо відомо, що на початку року завод випускав щомісячно 600 виробів, а в кінці – 726 виробів.

71. Кусок сплаву міді з оловом загальною масою 12 кг містить 45% міді. Скільки чистого олова треба додати до цього куска сплаву, щоб одержаний новий сплав містив 40% міді?

72. Дві бригади, працюючи одночасно, обробили ділянку землі за 12 год. За який час могла б обробити цю ділянку кожна з бригад окремо, якщо швидкості виконання робіт бригадами співвідносяться як 3:2?
73. Зал для проведення конференцій містив x рядів по y місць у кожному. Під час реконструкції до кожного ряду додали 2 місця, і загальна кількість місць у залі збільшилася від 54 до 72. Знайдіть x і y .
74. Мідь становить 25% сплаву. Скільки сплаву буде містити 300 г міді?
75. До 8 кг 70 % розчину кислоти долили 2 кг води. Визначте відсоткову концентрацію нового розчину.
76. Скільки необхідно змішати 10%-го і 15%-го розчинів солі, щоб одержати 1 кг 12%-го розчину?
77. У 500 кг руди міститься деяка кількість заліза. Після відділення від руди 200 кг суміші, яка в середньому містить 12,5 % заліза, у решті руди вміст заліза підвищився на 20 %. Скільки кілограмів заліза лишилося в руді?
78. Маємо два сплави міді і цинку. Перший сплав містить 9%, другий – 30% цинку. Скільки треба взяти кілограмів першого сплаву, щоб отримати сплав масою 300 кг, що містить 23% цинку?
79. Два дизайнери, працюючи разом, виконують завдання за $1\frac{1}{5}$ год. Одному дизайнеру на виконання цього завдання потрібно на 1 год більше, ніж іншому. За скільки годин може виконати завдання кожен дизайнер, працюючи самостійно?
80. Два робітники працюючи разом можуть виконати виробниче завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен із них працюючи самостійно, якщо одному для цього потрібно на 9 днів більше ніж другому.
81. Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати деяке завдання за 6 днів. Перша бригада, працюючи самостійно, може виконати це завдання за 10 днів. За скільки днів виконає завдання друга бригада, працюючи самостійно?

82. Скільки потрібно змішати 25 %-го й 40 %-го розчинів солі, щоб одержати 34%-й розчин солі масою 50 кг?
83. (ЗНО 2018) У майстерні мали виготовити 240 стільців за n днів причому щодня планували виробляти однакову кількість стільців. Однак, на прохання замовника, завдання виконали на два дні раніше запланованого терміну. Для цього довелося денну норму виготовлення збільшити на чотири стільці визначте n .
84. Дві бригади, що здійснюють роботи з утеплення фасадів, працюючи разом, виконують усе завдання за 6 год. За скільки годин може виконати це завдання кожна бригада, працюючи самостійно, якщо одній бригаді на це потрібно на 5 год більше, ніж іншій бригаді?

Задачі сучасного професійного змісту

85. Спортсменка виконала кілька стрибків у довжину, досягнувши середнього результату 3,80 м. В наступній спробі вона стрибнула на 3,99 м, а середня довжина стрибка зросла до 3,81 м. На яку відстань вона повинна стрибнути ще раз, щоб збільшити середню довжину стрибка до 3,82 м?
86. Протягом вихідних днів до інтернет магазину надійшло 72 замовлення. Менеджери Андрій і Максим упродовж понеділка мають їх опрацювати. Відомо, що за той самий час Андрій опрацьовує 6 замовлень, а Максим — 5 замовлень. Скільки замовлень опрацьовує за 1 год кожний менеджер, якщо всі замовлення Андрій може опрацювати на 1,5 год швидше, ніж Максим?
87. Перший менеджер має оформити 80 замовлень, а другий — 56 таких самих замовлень. Перший менеджер оформлював щогодини на 2 замовлення більше, ніж другий, а закінчив свою роботу на 1 год пізніше, ніж другий. Скільки замовлень оформлював кожний менеджер щогодини?

88. Кожна з двох бригад має оновити інформацію на 24 біг-бордах. Перша бригада щогодини оновлювала x біг-бордів, друга бригада — y біг-бордів. Відомо, що перша бригада щогодини встигала оновити на 1 біг-борд більше, ніж друга, і закінчила роботу на 2 год раніше від неї. Запишіть систему рівнянь для визначення x і y . Знайдіть x і y .
89. Тренер хоче скласти графік тренувань на наступні декілька місяців. Він планує проводити заняття тричі на тиждень у одні й ті самі дні. Він не хоче працювати два дні підряд. Скількома способами він може спланувати собі графік тренувань?
90. Перший менеджер має надати 84 консультації по телефону, а другий — 96 таких консультацій. Другий менеджер надавав щогодини на 4 консультації більше, ніж перший, і закінчив свою роботу на 1 год раніше від першого. Скільки консультацій надавав кожний менеджер щогодини?
- 91.^A В зв'язку з подорожчанням бензину у таксиста постало запитання чи варто продовжувати займатися цією справою. Для розрахунку він взяв останній місяць, за який він проїхав 4000 км. Вартість 1 літра бензину — 32 грн. Середній розхід бензину на 100 км складає 9 літрів. Крім розходів на пальне, він витратив 400 грн на паливно-мастильні матеріали та 1800 грн. на амортизацію.
- 92.^A Постачальник привіз на ринок 13 ящиків мандарин по 7 кілограм в кожному, які після транспортування розділив на три сорти. Він запропонував реалізатору продавати мандарини першого сорту по 40 грн, другого — по 30 грн, третього — по 20 грн за кілограм. Виручка від продажу всіх мандарин склала 3290 грн. Відомо, що маса мандарин 2-го сорту менше маси мандарин 1-го сорту на стільки ж відсотків, на скільки відсотків маса мандарин 3-го сорту менше маси мандарин 2-го сорту. Чи може постачальник дізнатися скільки кілограмів мандарин 2-го сорту продав реалізатор? *Скільки кілограмів мандарин кожного сорту було продано?

- 93.^A Однією з інноваційних технологій сучасності є панорамні ліфти. Будівельна компанія закупила звичайні та панорамні ліфти. Кількість звичайних ліфтів відноситься до кількості панорамних як 3:2. Відомо, що загальна кількість закуплених ліфтів може виражатися одним із чисел: 23, 35, 32, 44, 48, 51. Укажіть це число.
94. Зарплата водія становить 5400 грн. Авансом йому виплатили 40% зарплати. Яку суму отримав водій?
95. Сторожеві із зарплати 5800 грн. виплатили авансом 2320 грн. Який відсоток зарплати він отримав?
96. У Вінницькому музеї моделей транспорту представлений макет автомобіля, побудованого у відношенні 1:87 до оригіналу, має висоту 2 см. Якою є висота автомобіля-оригіналу?
97. Система навігації літака інформує пасажера про те, що політ проходить на висоті 37 000 футів. Виразіть висоту польоту в метрах. Рахуйте, що 1 фут дорівнює 30,5 см.

Задачі побутового змісту

98. За 15 листівок з конваліями і 4 листівки з півоніями заплатили 37 грн. Якщо б купили 5 листівок з півоніями, то заплатили б на 10 грн більше, ніж за 1 листівку з конваліями. Скільки коштують листівки кожного виду?
99. У першому будинку 36 квартир, а в другому — 50. У другому будинку поверхів на 2 менше, а квартир на кожному поверсі на 2 більше, ніж у першому будинку. Знайдіть кількість поверхів у кожному будинку та кількість квартир на кожному поверсі.
100. Учень прочитав із 400 сторінок книги 40 %. Скільки сторінок прочитав учень?
101. У класі 30 учнів, 20% з них навчаються у музичній школі. Скільки учнів навчаються у музичній школі?

102. Учні школи могли обрати або гурток англійської, або гурток французької мови, або взагалі не відвідувати жоден. 35% учнів, що записалися у гуртки, обрали гурток англійської. 13% учнів школи обрали гурток французької мови. Який відсоток учнів школи записалися у гуртки?
103. Після того, як Сергій витратив 40% усіх своїх грошей на купівлю книжки, а $\frac{2}{3}$ решти – на купівлю зошитів, у нього залишилося 3 грн. скільки грошей було у Сергія спочатку?
104. У першому бідоні було молоко, масова частка жиру якого становила 3%, а в другому – вершки жирністю 18%. Скільки треба взяти молока і скільки вершків, щоб отримати 10л молока з масовою часткою жиру 6%?
105. У свіжих грибах 90% води, у сушених – 20% води. На скільки відсотків зменшується маса грибів при висушуванні?
106. Ціна товару – 1200 грн. Якою стане ціна після зниження на 15 %?
107. Стіл і стілець коштували разом 650 грн. після того як стіл подешевшав на 20%, а стілець подорожчав на 20%, вони стали коштувати разом 568 грн. Знайдіть початкову ціну стільця і стола.
108. У свіжих сливах 70% води, у сушеному чорносливу 20% води. На скільки відсотків зменшується маса слив при висушуванні?
109. Ізюм отримують з процесі сушки винограду. Скільки кілограмів винограду потрібно для одержання 20 кг ізюму, якщо виноград містить 90% води, а ізюм – 5% води.
110. Ціна 1 кг моркви збільшилася на 60% і дорівнює тепер ціні 1 кг капусти, яка зменшилася на 60%. На скільки відсотків змінилася загальна вартість 1 кг капусти і 1 кг моркви?
111. Ціна виробу спочатку збільшилася на 10 %, а потім знизилася на 20 %. На скільки відсотків змінилася ціна внаслідок двох переоцінок?
112. Ціна автомобіля спочатку піднялася на 20 %, а потім знизилася на 20 %. На скільки відсотків змінилася ціна автомобіля після двох переоцінок?

113. Чотири однакові светри дешевше куртки на 8%. На скільки відсотків п'ять таких же светрів дорожче куртки?
114. Якою є сума грошей, що за умови нарахування 20 % річних дає прибуток, котрий становить 540 грн?
115. Скільки відсотків річних (прості відсотки) нараховує банк, якщо через 2 роки сума в 2000 грн зросла до 3380 грн?
116. Грошовий внесок, покладений у банк на 2 роки, збільшився на 69 %. Скільки відсотків нараховує банк щорічно?
117. Вкладник поклав до банку 20000 грн під 14% річних. Який прибуток отримає вкладник через рік?
118. Вкладник поклав до банку 30000 грн під 12% річних. Яка сума буде на рахунку через рік?
119. Вкладник поклав до банку 1500 грн. на два різні рахунки. По першому банк виплачує 7% річних, а по другому – 10% річних. Через рік клієнт мав 120 грн. відсоткових грошей. Скільки гривень він поклав на перший рахунок?
120. Хворому прописаний курс ліків, які потрібно приймати по 0,5 г три рази в день протягом трьох тижнів. В одній упаковці міститься 10 таблеток по 0,5 г. Якої найменшої кількості упаковок вистачить на весь курс лікування?
121. Вартість учнівського проїзного квитка на місяць складає 70 грн. А вартість квитка на одну поїздку складає 3 грн. Оксана придбала проїзний і зробила 45 поїздок за місяць скільки грошей вона заощадила?
122. Сирок коштує 7 грн. 40 коп. Яке найбільше число сирків можна придбати на 40 грн.?
123. Магазин відчиняється в 10 годин, а зачиняється в 22 години. Обід триває з 14 до 15 годин. Скільки годин в день відкритий магазин?
124. Школа закупує книги по ціні 50 грн. за штуку. При купівлі більше 10 шт. магазин дає знижку 10%. Скільки книг можна купити на 1000 грн.?

125. (ЗНО 2016) У готелі для проживання туристів є одномісні, двомісні та тримісні номери. Їх всього 124. Якщо всі номери в готелі заповнені, то одночасно в ньому проживає 255 туристів. Скільки всього в цьому готелі тримісний номерів, якщо кількість одномісних номерів дорівнює кількості двомісних номерів?
126. (ЗНО 2017) Для поповнення рахунку телефону Андрій вніс певну суму грошей до платіжного терміналу. З цієї суми утримано комісійний платіж у розмірі 2 грн 40 к, що становить 3 % від суми, унесеної до терміналу. У результаті рахунок телефону поповнено на решту внесеної суми. Яку суму грошей (у гривнях) Андрій уніс до платіжного терміналу?
127. (ЗНО 2017) Мобільний оператор, послугами якого користується Андрій нараховує 8 бонусів за кожні 5 грн, на які поповнено рахунок телефону. На залишок грошей менше за 5 грн, бонуси не нараховуються. Скільки бонусів нараховано Андрію за здійснення ним поповнення телефону?
128. На двох фуршетних столах рядами викладено по 260 канапе (маленьких бутербродів). На другому столі кількість рядів на 3 менша, а кількість канапе у кожному ряді на 6 більша, ніж на першому столі. Визначте кількість рядів і кількість канапе в кожному ряді на першому столі.
129. Дохід будь-якої родини складається із сукупності доходів її членів. Сім'я складається з чоловіка, жінки та їхньої доньки студентки. Якби зарплатня чоловіка збільшилася вдвічі, загальний дохід сім'ї збільшився на 67%. Якщо стипендія доньки зменшилася втричі, загальний дохід сім'ї скоротився б на 4%. Скільки відсотків від загального доходу сім'ї складає заробітна плата жінки?
130. Учасник міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру 2018» відповів на 30 запитань. Відомо, що він дав на 50% більше правильних відповідей, ніж неправильних. На скільки запитань він відповів правильно?

131. На упаковці вершкового сиру написано: «24% загального жиру і 64% жиру в сухій речовині». Який відсоток води у цьому сирі?
132. У 2017 році в міському кварталі мешкало 40 000 чоловік. У 2018 році, в результаті побудови нових будинків, число мешканців виросло на 8%, а в 2019 році на 9% порівняно з 2018 роком. Скільки чоловік стало мешкати в кварталі в 2019 році?
133. Оксана придбала по 4 шоколадки для кожного з чотирьох членів своєї сім'ї. У магазині діяла акція (одна шоколадка – 20 грн, кожна шоста безкоштовно!). Скільки заплатила Оксана?
134. Шоколадка коштує 30 грн. В супермаркеті протягом місяця діє спеціальна пропозиція: купуючи дві шоколадки, отримуєш три (одна в подарунок). Скільки шоколадок можна придбати на 190 грн в цей місяць?
135. У першому будинку 128 квартир, а в другому — 120. У другому будинку поверхів на 4 більше, а квартир на кожному поверсі на 2 менше, ніж у першому будинку. Знайдіть кількість поверхів у кожному будинку та кількість квартир на кожному поверсі.
136. У класі навчається 33 дитини. Кожен учень відвідує спортивний гурток, або гурток програмування. Троє учнів відвідують обидва гуртки. Гурток програмування відвідує вдвічі більше дітей, ніж спортивний гурток. Скільки дітей відвідують гурток програмування?
137. Кожний з двох принтерів має надрукувати текстовий файл обсягом 120 сторінок. Перший принтер за одну хвилину друкує на 2 сторінки менше, ніж другий, і тому пропрацював на 3 хв довше. Скільки сторінок за хвилину друкує кожний принтер?
138. ^A Потяг Львів-Маріуполь відправляється в 01:18, а прибуває в 06:30 на наступний день. Скільки годин потяг знаходиться в дорозі?
139. Одним із найсуттєвіших джерел економії коштів є ощадливе використання електроенергії. Скільки ви зможете зекономити за рік, якщо відмовитесь від використання телевізора в своїй родині?

Враховуючи, що 1 кВт/год електроенергії коштує 1 гривню, а один телевізор за рік споживає електроенергії близько 300 кВт/год і послуги кабельного телебачення складають 100 гривень за місяць.

140. ^A Вартість учнівського проїзного квитка на місяць складає 100 грн. А вартість квитка на одну поїздку складає 4 грн. Оксана ходить до школи п'ять разів на тиждень і два рази на тиждень у художню школу. Чи вигідно їй придбати проїзний квиток і якщо так, то скільки грошей за місяць вона може заощадити?
141. В квартирі встановлений прилад обліку витрат холодної води (лічильник). 1 червня лічильник показував витрати 178 куб. м. води, а 1 липня – 189 куб.м. Яку суму повинен сплатити власник квартири за холодну воду за червень, якщо ціна за 1 куб. м. холодної води складає 8 грн 60 к?
142. ^A Існує думка, що купувати товари в інтернет магазині дешевше. Термос Gram в інтернет магазині коштує 685 грн. Вартість доставки Новою поштою складає приблизно 50 грн. Крім того, на пошті при отриманні потрібно ще сплатити за наложений платіж 2% від суми + 20 грн, а також, якщо оголошена вартість складає більше 200 грн, то ще 0,5% від оголошеної вартості. В магазині «Мандрівник» вартість такого ж термоса складає 720 грн. Для того щоб його придбати в магазині достатньо під'їхати маршруткою, вартість поїздки в якій складає 6 грн. Врахувати, що відділення Нової пошти знаходиться біля будинку. То як вигідніше здійснити покупку і на скільки? (випадок передоплати не розглядатимемо через велику кількість шахрайства пов'язану з інтернет покупками)
143. ^A За сезон сім'я може зібрати 200 кг горіхів. Горіхи не чищені приймають по ціні 35 грн за кілограм. Вартість не чищених горіхів складає 120 грн/кг. Але на 100 кг нечищених горіхів 60 кг відходів. Які горіхи варто здавати чищені чи ні, і який максимальний прибуток може отримати сім'я за свій урожай?

144. ^A Ізюм отримують в процесі сушки винограду. Скільки кілограмів ізюму можна одержати з 16 кг винограду, якщо виноград містить 90% води, а ізюм – 5% води. Розрахуйте, що вигідніше придбати готовий ізюм на ринку, якщо його вартість складає 70 грн за кілограм, чи виготовивши його в домашніх умовах використовуючи сушарку. Скільки можна заощадити коштів? Важливо: номінальна споживана потужність сушарки 0,6 кВт, тариф за електроенергію складає 0,9 грн/кВт до 100 кВт, та 1,68 грн/кВт поверх 100 кВт. Для висушування вказаної кількості винограду потрібно дві доби. Вартість винограду складає 35 грн/кг.
145. Якою має бути початкова сума, покладена в банк під 20% річних, щоб через два роки прибуток становив 22000 грн.?

10 клас

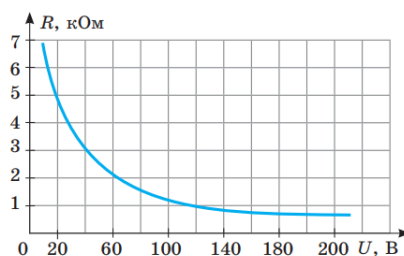
Функції, їхні властивості та графіки

1. У таблиці подано обсяг споживання електроенергії (у кВт · год) родиною Рахувальників у першому півріччі 2012 і 2017 років. Складіть таблицю про споживання електроенергії за минулий рік у вашій родині. Побудуйте в одній системі координат: а) графік споживання електроенергії за перше півріччя минулого року у вашій родині; б) графік споживання електроенергії за перше півріччя 2017 року в родині Рахувальників. Зробіть висновки.

Місяць Рік	1	2	3	4	5	6
2012	150	130	145	120	125	110
2017	105	100	90	90	95	70

2. Маса порожньої бочки — 40 кг, а маса 1 л бензину — 0,8 кг. Виразіть формулою залежність маси m бочки з бензином від об'єму V бензину в ній. Чи є ця залежність лінійною функцією?

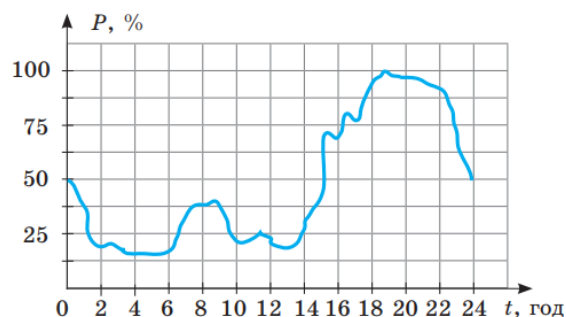
3. Під дією електричного струму в тілі людини виникають достатньо складні біохімічні і фізіологічні процеси, які знижують опір її тіла. Залежність опору тіла людини від напруги електричної мережі наведено на малюнку. Використовуючи графік, встановіть: а) чому дорівнює опір тіла людини, якщо напруга дорівнює 20 В; б) починаючи з якої напруги опір тіла людини не перевищує 1 кОм; в) зростаючою чи спадною є задана функція; г) дізнайтеся більше про чинники, що впливають на зміну опору тіла людини.



4. Ательє виготовляє та продає вишиванки, вартість кожної з яких 750 грн. Щоб пошити одну таку сорочку, потрібно 2,4 м тканини. Запишіть формулу для обчислення залишку тканини після пошиття x сорочок, якщо в сувої 50 м тканини. Яких значень може набувати x ? Скільки тканини залишиться в сувої, якщо пошиють 15 сорочок? Який дохід матиме ательє від продажу цих 15 сорочок? Який дохід матиме ательє, якщо продасть усі сорочки, виготовлені з одного сувою?

5. Вважають, що при заглибленні на кожні 30,5 м внутрішня температура Землі підвищується на $1\text{ }^{\circ}\text{C}$. На глибині 5 м вона дорівнює $15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Задайте залежність температури t від глибини h . Яка температура на глибині 1 км? А на глибині 3 км?

6. На малюнку подано графік електричного навантаження в житловому будинку за одну добу взимку (залежність електроспоживання від часу доби). Встановіть: а) проміжки спадання і зростання заданої функції; б) протягом якого часу мешканці будинку споживають найбільшу кількість електроенергії; в) у які години електричне навантаження в житловому будинку не перевищує 25 %. Дізнайтеся, що таке двотарифний лічильник, як він функціонує і за яких умов його доцільно використовувати для житлових будинків.

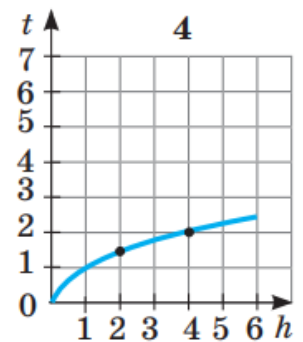
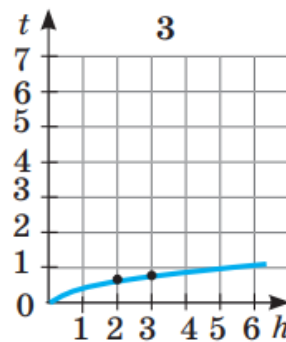
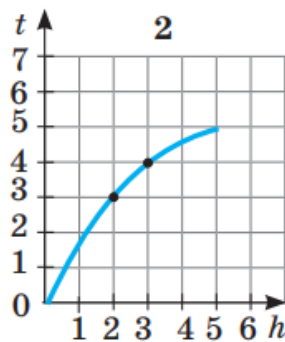
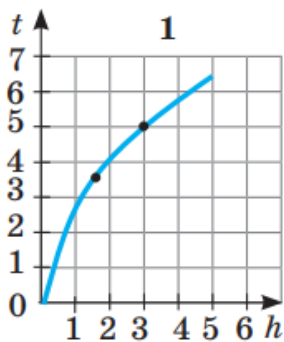


7. На наслідки ураження людини електричним струмом впливає вид і частота струму, що проходить через тіло людини. На малюнку зображено залежність ураження людини змінним струмом від його частоти



Використовуючи графік, встановіть: а) зростаючою чи спадною є задана функція? б) за якої частоти небезпека ураження не перевищує 50 %? в) яка частота змінного струму є найбільш небезпечною?

8. З літака, що рухається на висоті 1020 м над землею, стрибає парашутист. Його шлях h (у метрах), пройдений в умовах вільного падіння, визначається формулою: $h = 0,5gt^2$, де t — час (у секундах), а g — стале число $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Парашут розкрився за 975 м від землі. а) Задайте формулою залежність часу вільного падіння парашутиста від пройденого шляху. б) Побудуйте графік встановленої залежності. в) З'ясуйте, скільки часу парашутист летів в умовах вільного падіння. г) На якому графіку подано залежність часу t руху тіла при вільному падінні від довжини шляху h ?



9. Рухаючись зі швидкістю v км/год протягом 6 год, автомобіль пройшов шлях s км. Задайте формулою залежність s від v . Користуючись цією формулою: а) знайдіть s , якщо $v = 65$ км/год; б) знайдіть v , якщо $s = 363$ км.

10. З турбази на станцію, віддалену на відстань 60 км, вирушив велосипедист зі швидкістю 12 км/год. Знайдіть формулу залежності змінної s від t , де s — відстань велосипедиста від станції в кілометрах, а t — час його руху в годинах.

11. Стовбуром дерева з ґрунту до його крони піднімається вода, яку через листя випаровують промені Сонця. Якщо вирубати дерева, то ця вода буде накопичуватися в ґрунті, що призведе до утворення болота. Доросла береза за добу випаровує близько $15^3\sqrt{125}$ л води, бук — $5^4\sqrt{16} \cdot \sqrt{10^2}$ л, а липа — удвічі більше за бук. Розрахуйте, скільки потрібно посадити на ділянці беріз, щоб за день випаровувалося 1500 л води, якщо на цій ділянці вже ростуть 2 буки й 3 липи.

12. Маса Сонця становить приблизно $2 \cdot 10^{27}$ т, а маса Нептуна — приблизно $1 \cdot 10^{23}$ т. У скільки разів маса Нептуна менша від маси Сонця?

13. Лінійні розміри атома становлять 10^{-8} см. Скільки атомів можна «вкласти» у відрізок завдовжки 1 мм?

14. Початкова вартість деякого обладнання складає 200 000 грн. Щороку вона зменшується на 5 %. Знайти:

1) Функцію P залежності вартості обладнання від терміну експлуатації t (років).

2) Вартість обладнання через 4 роки, використовуючи функцію P .

15. Записати формулу для обчислення кінетичної енергії кульки масою 50 г. З'ясувати, чи задає ця формула функцію, і якщо так, указати її аргумент.

16. Під час вільного падіння тіло долає відстань $S = 0,5gt^2$, де t — час у секундах, $g \approx 10$ м/с². Побудуйте графік цієї функції. Яку відстань подолає тіло за 1 с? За який час тіло подолає 20 м?

17. Пляшечка шампуню коштує 40 грн. Яку найбільшу кількість таких пляшечок можна придбати за 170 грн під час дії акції, коли знижка на цей шампунь складає 25% ?



18. М'яч рухається за законом $s(t) = 8t - 4t^2$, де s — відстань у метрах від поверхні землі, t — час у секундах, $t \geq 0$.

- 1) Побудуйте графік руху м'яча.
- 2) Визначте, у який момент часу м'яч буде на землі.
- 3) Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $s(t)$.
- 4) Знайдіть найбільшу висоту, на яку підніметься м'яч.

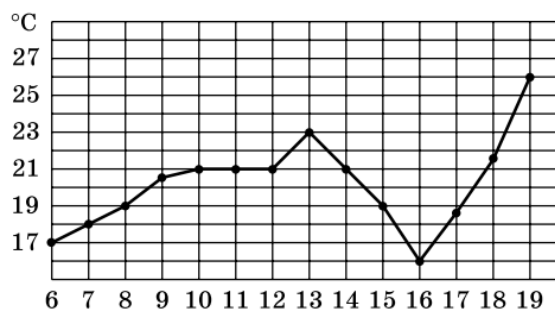
19. Машина таксі за місяць проїхала 6000 км. Витрати пального для цієї автівки в середньому складають 9 літрів на 100 км. Вартість пального – 22 грн/л. Скільки було витрачено на бензин за цей місяць?

20. Бак має форму куба і вміщує $2,744 \text{ м}^3$ води. Знайдіть висоту бака і площу його основи.

21. Вкладник поклав на банківський депозит 10 000 грн, а через 3 роки на його депозитному рахунку стало 17 280 грн. Який відсоток річних виплачує банк вкладникам?

22. Вкладник відкрив у банку депозитний рахунок на суму 20 000 грн, а через 4 роки отримав 29 282 грн. Який відсоток річних надає банк?

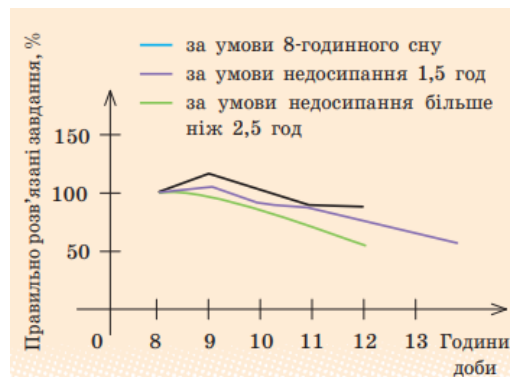
23. На малюнку точками позначено щоденну середньодобову температуру повітря в Одесі з 6 по 19 червня. По горизонталі вказано дату місяця, по вертикалі – температуру у градусах Цельсія. Для наочності точки з'єднано лінією. Визначте по малюнку різницю між найбільшою і найменшою середньодобовими температурами у вказаний період. Відповідь подайте у градусах Цельсія.



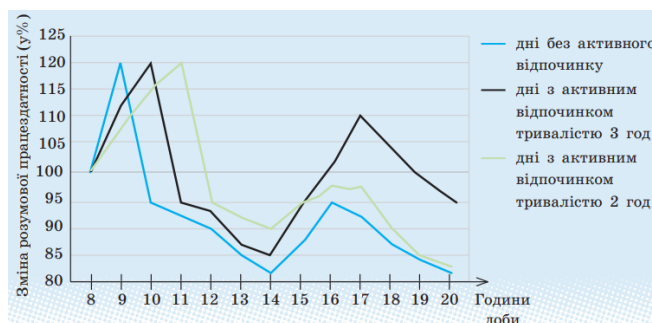
24. Клієнт банку взяв кредит у розмірі 24 000 грн на рік під 16%. Погашати банку кредит він має, вносячи щомісяця однакову суму коштів так, щоб через рік виплатити всю суму кредиту разом з відсотками. Скільки коштів має щомісяця вносити в банк цей клієнт?

25. Медичними працівниками встановлено, що дитина віком a років $a < 18$, для нормального розвитку повинна спати протягом t год на добу, де t визначається за формулою $t = 16 - \frac{a}{2}$. Знайдіть $t(16)$, $t(15)$, $t(14)$.

26. На рис. зображено графіки зміни розумової працездатності учнів залежно від тривалості сну, наведені в підручнику для медичних закладів вищої освіти. Охарактеризуйте за кожним графіком, як змінюється кількість правильно розв'язаних завдань (y %) з 8 до 12 год однієї доби. Які висновки ви можете зробити?

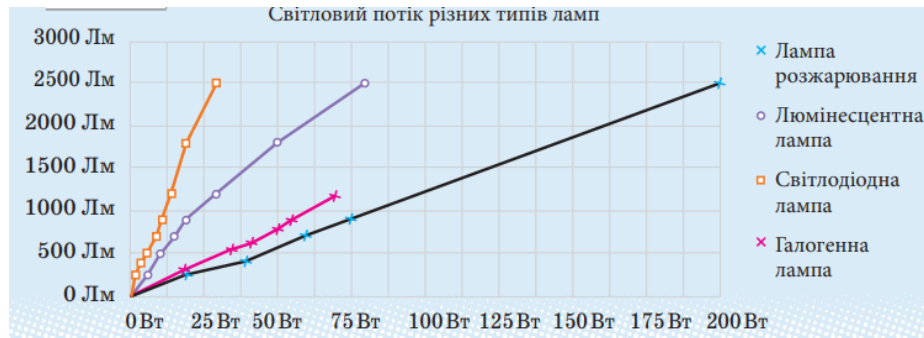


27. На рис. 1.3.4 зображено графіки зміни розумової працездатності учнів залежно від тривалості активного відпочинку на свіжому повітрі, наведені в підручнику для медичних закладів вищої освіти. Охарактеризуйте за кожним графіком, як змінюється кількість правильно розв'язаних завдань (y %) з 8 до 20 год однієї доби. Які висновки ви можете зробити?



28. На графіках (рис. 1.3.5) проілюстровано залежність світлового потоку різних типів ламп від їх потужності. Оцініть потужність світлодіодної лампи, необхідну для отримання такого самого світлового потоку, як від лампи розжарювання потужністю 100 Вт. Знайдіть у мережі Інтернет вартість лампи розжарювання, вартість відповідної світлодіодної лампи і вартість 1 кВт-год

електроенергії та підрахуйте, за який час окупиться заміна лампи розжарювання світлодіодною лампою, якщо вони працюватимуть по 6 год на день. Врахуйте, що лампа розжарювання розрахована на 1000 год роботи, а світлодіодна — на 20 000 год.



29. Вартість поїздки в таксі включає оплату подання автомобіля 25 грн та вартість пройденої відстані в розмірі 5 грн за кожний кілометр. 1) Складіть функцію, яка визначає вартість поїздки в таксі залежно від пройденої відстані. 2) Знайдіть вартість поїздки, якщо пасажир проїхав 30 км.

30. Складіть функцію, яка визначає залежність витрат на поїздку власним автомобілем від відстані подорожі, якщо ваш автомобіль споживає 7,5 л бензину на шляху 100 км. Скільки грошей вам знадобиться на купівлю бензину для автомобіля, щоб доїхати з Харкова до Києва? Дізнайтеся вартість квитка на потяг і порівняйте витрати на транспорт в обох випадках. За яких умов подорож автомобілем може бути економнішою?

31. Скільки дітей у родині, якщо семеро з них залюбки їдять яблука, шестеро — груші, п'ятеро — сливи? Четверо дітей люблять їсти яблука і груші, троє — яблука і сливи, двоє — груші і сливи. Відомо, що одна дитина любить усі фрукти, а решта — принаймні один з перелічених.

32. Інвестор має можливість розмістити капітал у 10 млн грн у банк під 40 % річних або вкласти у виробництво з очікуваною ефективністю у розмірі 150 %. Втрати виробництва (y , грн) описуються квадратичною залежністю $y = 0,05x^2$, де x — розмір вкладеного капіталу (грн). Прибуток обкладається

податком у р %. При яких значеннях р вклад у виробництво буде ефективнішим, ніж просте розміщення капіталу в банку?

Тригонометричні функції

1. На малюнку зображено промисловий вітрогенератор — пристрій для перетворення кінетичної енергії вітру на електричну. Встановіть, на який із поданих нижче кутів може повернутися лопать А вітрогенератора, щоб перейти на місце лопаті В. а) 3360° ; в) 6240° ; б) -4440° ; г) -8720° .

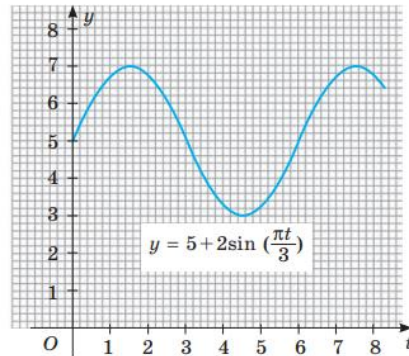


2. На малюнку зображено дерев'яний штурвал старовинного парусника. Запишіть кути, які утворює вертикальна спиця цього штурвала з кожною іншою спицею (у додатному напрямі). Знайдіть: а) синуси і косинуси кожного з цих кутів; б) тангенс найбільшого і найменшого кутів. (Підказка. Уявіть, що штурвал — це одиничне коло).



3. Еколог, що вивчає популяцію жуків плавунців протягом 8 тижнів, змоделював зміну їх кількості за допомогою функції $K(t) = 5 + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, π де t — кількість тижнів дослідження, $0 \leq t \leq 8$, а $K(t)$ — кількість жуків плавунців у тисячах. На малюнку побудовано графік цієї функції.

Встановіть: а) чисельність популяції на початку дослідження; б) чи зменшувалася кількість популяції жуків плавунців до 2000; в) найбільшу і найменшу чисельність популяції за час дослідження.



4. Практичне завдання. Розглянемо одну матеріальну модель синусоїди. Якщо обгорнути свічку кілька разів папером, потім перерізати її гострим ножом під кутом 45° до осі свічки (мал.) і розгорнути папір, матимемо матеріальну модель частини синусоїди. Спробуйте виготовити таку модель синусоїди, обгорнувши кольоровим папером свічку чи циліндр, виготовлений із пластиліну.



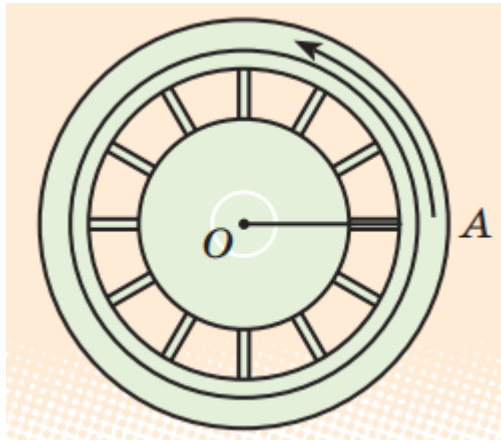
5. Електричний струм, який живить міську освітлювальну мережу, є змінним струмом. Його сила I постійно змінюється, здійснюючи гармонічне коливання, $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$, де I_0 — максимальне значення сили струму; T — період коливання; φ — початкова фаза. У які моменти часу сила струму досягає мінімального або максимального значення і коли його значення дорівнює нулю?

6. Великої шкоди сільськогосподарським культурам (виноградникам, плодовим деревам, зерновим тощо) завдають коники, що нерідко

розмножуються до господарсько відчутної чисельності (мал.). Для убезпечення посівів еколог протягом t тижнів, де $0 \leq t \leq 12$, досліджував популяцію коників і встановив, що зміну їх чисельності наближено можна характеризувати формулою $K(t) = 7500 + 3000 \sin \frac{\pi t}{8}$. Установіть, протягом якого тижня чисельність коників сягала: а) 6000; б) 9000. Якою була найбільша і найменша чисельність коників протягом досліджуваного періоду. Можете скористатися ІКТ.



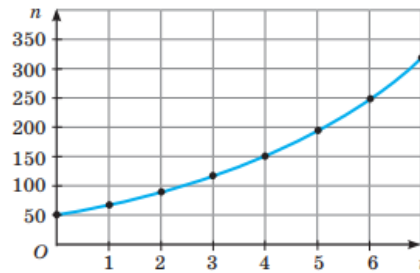
7. Знайдіть лінійну швидкість точки на обводі шліфувального диска, діаметр якого дорівнює 90 см, а кутова швидкість становить 500 рад/с
8. Знайдіть градусну й радіанну міри кута, утвореного годинною та хвилинною стрілками годинника, якщо він показує: 1) 3 год; 2) 6 год; 3) 8 год.
9. Колесо, рівномірно обертаючись, робить 20 обертів за хвилину. Знайдіть його кутову швидкість у радіанах за секунду.
10. Визначте кут (у градусах і в радіанах), який утворюється внаслідок обертання хвилинної стрілки від моменту часу 1 год 15 хв до моменту часу 1 год 40 хв тієї самої доби. Обговоріть, чи будуть відрізнятися запис самого кута і запис його модуля?
11. Маховик двигуна робить 50 обертів за хвилину. На який кут (у градусах і в радіанах) повернеться його спиця OA (рис.) за 2 с (напрямок обертання позначено на рисунку)?



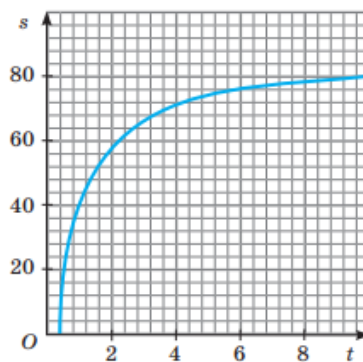
12. Колесо обертається з кутовою швидкістю $3/\pi$ рад/с. На який кут воно повернеться за 6 с, 12 с, 0,5 хв, 1 хв?
- 13.3 якою кутовою швидкістю (у радіанах за секунду) обертається колесо, якщо за одну хвилину воно робить 90 обертів?
14. На круглій клумбі чорнобривцями засадили сектор, довжина дуги якого дорівнює довжині радіуса. Знайдіть площу ділянки, засадженої чорнобривцями, якщо радіус клумби дорівнює 3 м.
15. Хід поршня в циліндрі двигуна дорівнює 12 см. Знайдіть амплітуду його коливання.

Похідна та її застосування

1. Відомо, що кількість населення деякого міста за час t (вимірюється у роках) змінюється за формулою $Q(t) = 20\,000 - 160t^2 + 800t$. Встановіть середню швидкість зміни кількості населення міста (в особах) за час від $t = 1$ до $t = 2,5$.
2. Кількість мишей у колонії записували щотижня і побудували відповідний графік (мал.). За даними графіка складіть таблицю і встановіть: а) кількість мишей на 4-й тиждень; б) коли кількість мишей перевищила 200 особин; в) приріст мишей з 4-го по 5-й тиждень. Визначте середню швидкість зростання популяції мишей: а) з 4-го по 6-й тиждень; б) за перші 5 тижнів.



3. На малюнку подано графік руху тіла $s(t)$ (шлях s у км, час t у год). Визначте: а) шлях, який пройшло тіло за перші 4 години руху; б) приріст шляху, пройденого тілом за час з 4-ї до 6-ї години, в) середню швидкість руху за час t , якщо: 1) $1 \leq t \leq 4$; 2) $4 \leq t \leq 8$.



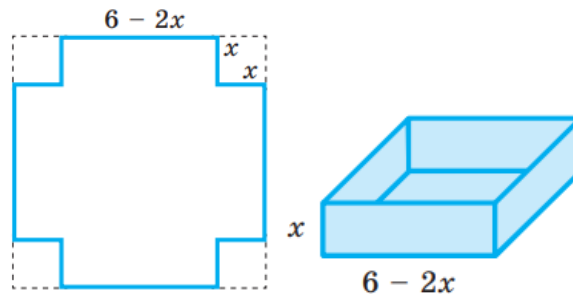
4. Відомо, що для деякої фірми витрати на випуск x одиниць продукції описуються функцією $K(x) = 0,002x^3 - 0,3x^2 + 20x + 100$ (грн), а дохід, одержаний від реалізації x одиниць продукції, можна обчислити за формулою $R(x) = 200x - 0,05x^2$ (грн). Визначте приріст витрат і доходу для збільшення випуску одиниць продукції: а) з 20 до 100; б) з 30 до 50.

5. За деякими підрахунками визначено, що фірма, виробляючи x одиниць продукції щомісяця, має витрати $K(x)$, що виражаються формулою $K(x) = 150 + 30x$ (грн), а дохід $R(x)$, одержаний від продажу x одиниць цієї самої продукції, становить $R(x) = 90x - 0,02x^2$ (грн). Якщо фірма збільшить щомісячний випуск продукції з 300 до 320 одиниць, як зміняться її: а) витрати; б) дохід; в) прибуток?

6. Залежність між витратами виробництва $Q(x)$ і обсягом продукції x , що випускається, виражається функцією $Q(x) = 325x - 0,03x^3$ (грн). Знайдіть середні витрати на одиницю продукції $A(x)$ і граничні витрати $M(x)$, якщо

$A(x) = \frac{Q(x)}{x}$, а $M(x) = Q'(x)$. Обчисліть $A(x)$ і $M(x)$ для обсягу продукції: а) 10 одиниць; б) 100 одиниць. Зробіть висновки.

7. Маємо квадратний лист жерсті зі стороною 6 дм. Які квадрати треба вирізати в кутах даного листа, щоб з одержаної заготовки зробити коробку без кришки найбільшого об'єму (мал.)?



8. Площа прямокутного загону для страусів дорівнює 40 000 м². Якими мають бути його розміри, щоб на огорожу пішло найменше сітки Рабиця?

9. Треба загородити два пасовища у формі рівних прямокутників зі спільною стороною так, щоб сума їх площ дорівнювала 6 га. Знайдіть найменшу можливу довжину огорожі.

10. Якими мають бути розміри басейну об'ємом 32 м³ із квадратним дном і вертикальними стінами, щоб на його облицювання пішло найменше плиток?

11. Сигнальна ракета летить вертикально вгору так, що її рух описується законом $s(t) = 98t - 4,9t^2$ (t — у секундах, s — у метрах). Знайдіть: а) швидкість ракети через 5 с руху; б) на яку максимальну висоту долетить ракета.

12. Кількість теплоти $Q(t)$, яка потрібна для нагрівання води масою 1 кг від 0 °С до температури t °С ($0^\circ \leq t \leq 95^\circ$), наближено можна визначити за формулою $Q(t) = 0,396 \cdot t + 2,081 \cdot 10^{-3}t^3 - 5,024 \cdot 10^{-7}t^5$. Установіть залежність теплоємності води $C(t)$ від температури.

13. Тіло масою 10 кг рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2 + t + 1$ (t — у секундах, x — у метрах). Знайдіть: а) кінетичну енергію тіла через 5 с після початку руху; б) силу, що діє на тіло в цей час.

14. Знайдіть миттєву швидкість тіла, що рухається за законом $s(t)$, де t вимірюється в секундах, а s — у метрах: а) $s(t) = 5t^2 + t$; б) $s(t) = t^2 - 1$; в) $s(t) = 1 - 3t$; г) $s(t) = 2t^3 + t$.
15. Знайдіть прискорення тіла, що рухається за законом $s(t)$, де t вимірюється в секундах, а s — у метрах: а) $s(t) = t^2 + t$; б) $s(t) = 5t - 1$; в) $s(t) = 1 - 3t^2$; г) $s(t) = 2t^3 + 5$.
16. Як залежить продуктивність праці молодого фахівця від тривалості роботи, якщо обсяг виготовленої ним продукції виражається формулою $V(t) = 10 + 6t^2 - t^3$?
17. Визначте швидкість коливання тіла, що рухається за законом: а) $x(t) = 10\cos \pi t$; б) $x(t) = 2\sin(t - \pi)$; в) $x(t) = 0,1\cos 10\pi t$.
18. Робота, яку виконує двигун автомобіля, визначається формулою: $A(t) = 15t^2 + 360$ ($A(t)$ — у Джоулях, t — у секундах). Яку потужність розвиває двигун?
19. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 100 + t^2$ (час t — у секундах, координата x — у метрах). Знайдіть швидкість v цієї точки в момент часу: а) $t = 5$ с; б) $t = 23$
20. Точка рухається так, що шлях, пройдений нею за t секунд, виражається формулою $s = 4t^2 + 3t$. Знайдіть: а) швидкість точки в будь-який момент часу; б) прискорення точки в будь-який момент часу; в) швидкість і прискорення точки в момент часу $t = 5$ с.
21. Точка обертається навколо осі за законом $\phi(t) = 3t^2 + 4t + 2$ (час t — у секундах, кут повороту $\phi(t)$ — у радіанах). Знайдіть кутову швидкість точки: а) у довільний момент t ; б) у момент $t = 4$ с.
22. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 7t^3 - 5t$. Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент: а) $t = 1$ с; б) $t = 2$ с; в) $t = 3$ с.
23. Маховик (махове колесо), затримуваний гальмом, обертається за законом $\phi(t) = 4t - 0,3t^2$ (час t — у секундах, кут $\phi(t)$ — у радіанах). У який момент він зупиниться?

24. Під час нагрівання тіла його температура T із часом змінюється за законом $T = 0,4t^2$, де T — температура в градусах, t — час у секундах. Знайдіть швидкість зміни температури в момент $t = 5$ с.

25. Маса кристалів у розчині змінюється за законом $m = \sqrt{t^2 + 5t}$, де m — маса кристалів у грамах, t — час у годинах. Знайдіть швидкість зростання маси кристалів через 4 год після початку кристалізації.

26. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2 + 8t - t^2$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Яку відстань пройде тіло до моменту, коли його швидкість дорівнюватиме нулю?

27. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). У який момент часу тіло рухається з найбільшою швидкістю?

28. Кулька коливається за законом $x(t) = 2\sin 3t$. Доведіть, що її прискорення пропорційне координаті x .

29. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \sqrt{t}$. Доведіть, що його прискорення пропорційне кубу швидкості.

30. Обсяг продукції V майстерні, яка виготовляє ялинкові прикраси, протягом дня виражається залежністю $V(t) = -\frac{5}{6}t^3 + 7\frac{1}{2}t^2 + 50t + 37$, де $t \in [1; 8]$.

Обчисліть продуктивність праці майстерні протягом кожної години роботи.

31. Через поперечний переріз провідника в кожний момент часу t проходить заряд $q(t) = 5\sqrt{2t+5}$ (q вимірюється в кулонах, а t — у секундах). Знайдіть силу струму в момент часу $t = 10$ с.

32. Колесо обертається так, що кут його повороту пропорційний квадрату часу. Перший оберт воно зробило за 8 с. Знайдіть його кутову швидкість через 48 с після початку обертання.

33. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t - t^2$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Знайдіть: а) миттєву швидкість тіла в моменти: $t_1 = 1$ с, t_2

= 2 с; б) кінетичну енергію тіла через 5 с після початку руху, якщо його маса дорівнює 2 г.

34. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 + 3t^2$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Знайдіть: а) прискорення його руху в момент $t = 5$ с; б) силу, що діє на тіло через 3 с після початку руху, якщо його маса дорівнює 5 г.

35. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6 + 4t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Коли його швидкість стане найбільшою? Визначте кінетичну енергію тіла в той момент, коли його швидкість стане найбільшою.

36. Тіло, підкинуте вертикально вгору зі швидкістю $v_0 = 40$ м/с, рухається за законом $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, де h — шлях у метрах, t — час у секундах, $g = 10$ м/с² — прискорення вільного падіння. Знайдіть: а) швидкість тіла через 2 с після початку руху; б) час, коли швидкість тіла дорівнює нулю; в) найбільшу висоту, якої досягне тіло.

37. За даним законом прямолінійного руху $s = s(t)$ (м), t — час (с), знайдіть середню швидкість v_c (м/с) на проміжку часу $[t_0; t_0 + \Delta]$ та миттєву швидкість $v(t)$ (м/с) в довільний момент часу t :

- 1) $s(t) = 9t + 1$, $t_0 = 3$, $\Delta t > 0$;
- 2) $s(t) = t^2 - 1$, $t_0 = 1$, $\Delta t = 2$;
- 3) $s(t) = t^2 + 3t + 2$, $t_0 = \frac{1}{2}$, $\Delta t = 1$;

38. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v = 3t^2 - 1$ (м/с), t — час (с). Знайдіть середнє прискорення a_c (м/с²) на проміжку часу $[2; 2 + \Delta t]$ та прискорення в момент часу $t_0 = 2$, якщо: 1) $\Delta t = 2$; 2) $\Delta t = 0,1$; 3) $\Delta t = 0,01$.

39. Закон прямолінійного руху визначається функцією $s(t) = 2t + 1$ (м), t — час (с). Чи є цей рух рівномірним? Намалюйте графік цього руху.

40. Тіло обертається навколо осі за законом $\varphi(t) = 3t^2 - 12t + 2$ (рад), t — час (с). Знайдіть кутову швидкість $\omega(t)$ обертання в довільний момент часу t і при $t = 4$ (с).

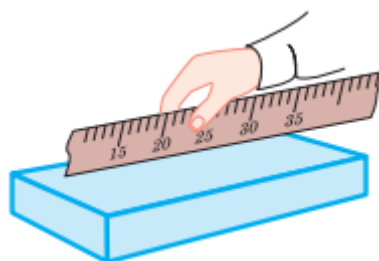
41. Якщо закон прямолінійного руху визначається квадратичною функцією $s(t)=at^2+bt+c$ (м), t — час (с), то такий рух є рівномірним. Доведіть.
42. Закон прямолінійного руху матеріальної точки в залежності часу t (с) визначається функцією $S(t)=3t^2-6t$ (м). У який момент часу тіло зупиниться?
43. Закон прямолінійного руху матеріальної точки залежно від часу t (с) визначається функцією $s(t)=4t^2+1$ (м). Знайдіть швидкість v (м/с) та прискорення a (м/с²) в момент часу $t = t_0$ (с), якщо: 1) $t_0 = 5$; 2) $t_0 = 10$.
44. Кількість одиниць виробленої майстром продукції протягом робочого часу визначається функцією $W(t)=2t^2-t$, $t \in [8;16]$, t — час (год). Знайдіть продуктивність праці майстра в момент часу $t_0 = 10$ (год).
45. Закон прямолінійного руху точки визначається функцією $s(t) = 4 + 12t - 0,25t^2$ (м), t — час (с). Знайдіть швидкість руху точки в момент часу $t = 8$ (с). У який момент часу t точка зупиниться?
46. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t)=1+t+t^2$ (м), t — час (с). Знайдіть діючу силу та кінетичну енергію руху через 2 с після початку руху, якщо маса тіла становить 2 кг.
47. Точка здійснює прямолінійний рух із прискоренням 4 см/с². Знайдіть закон руху, якщо при $t = 1$ (с) точка перебувала на відстані 2 см від початку руху, а в момент $t = 3$ (с) вона мала швидкість 5 см/с.
48. Задано закони прямолінійного руху двох матеріальних точок $S_1(t) = 4t^2 - 3$ (м) та $S_2(t) = t^3$ (м), t — час (с). Знайдіть проміжок часу, в якому швидкість першої точки більша за швидкість другої точки.
49. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 3t + 2t^2 + t^3$ (м), t — час (с). Знайдіть швидкість і прискорення в момент часу $t = 3$ (с).
50. Два тіла рухаються прямолінійно. Одне за законом $s(t) = t^3 + t^2 - 2$ (м), t — час (с), друге — за законом $s(t) = t^2 + 1$ (м), t — час (с). Знайдіть час, коли швидкості цих тіл будуть рівні.
51. Тіло масою 3 кг рухається за законом $s(t) = t^3 - 3t^2 - t$ (м), t — час (с). Знайдіть, яка сила діятиме на тіло через 2 (с) після початку руху.

52. Знайдіть швидкість гармонічного коливного руху, якщо $s(t) = 2 \sin t$, t — час (с). За якого значення t ця швидкість буде найменшою?
53. Визначте, як треба обгородити ділянку землі у вигляді кругового сектора дротом завдовжки 20 м, щоб площа ділянки була найбільшою.
54. Необхідно виготовити деталь у формі прямокутника з периметром $2p$, яка має найбільшу площу.
55. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (м), t — час (с). У який момент часу швидкість руху точки буде найбільшою і яка її величина?
56. Є кусок дроту завдовжки 40 м. Треба обгородити ним прямокутну ділянку землі, одна сторона якої прилягає до стіни будинку. Знайдіть розміри ділянки, за яких її площа буде найбільшою.
57. Площа прямокутної земельної ділянки становить $S = 25$ м². Якими мають бути розміри цієї ділянки, щоб її периметр був найменшим?
58. Вікно має форму прямокутника, завершеного півкругом. Знайдіть розміри вікна найбільшої площі, якщо задано його периметр P .
59. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$ (x вимірюється в метрах, t — у секундах). Знайдіть швидкість точки в момент часу $t = 5$ с.
60. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^3$ (t вимірюється у секундах, x — у метрах). Знайдіть швидкість точки в момент часу: 1) $t = 2$ с; 2) $t = 3$ с.
61. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$ (t вимірюється у секундах, x — у метрах). Знайдіть швидкість точки в момент часу: 1) $t = 4$ с; 2) $t = 10$ с.
62. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 10t$ (t вимірюється у секундах, x — у метрах). Знайдіть швидкість точки в момент часу: 1) $t = 2$ с; 2) $t = 3$ с.

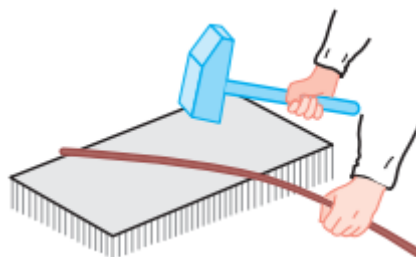
Паралельність прямих і площин у просторі

- Серед речей, які ви бачите в класі, покажіть або назвіть матеріальні моделі частин: а) прямих; б) площин.

2. Чому дітям безпечніше їздити на триколісному велосипеді?
3. Задача-жарт. Три бджоли розлетілися в різні боки. За яких умов усі вони будуть в одній площині? Обґрунтуйте.
4. Щоб перевірити, чи добре оброблено плоску поверхню, у різних її місцях прикладають вивірену лінійку і дивляться, чи немає зазору між ними. У яких випадках кажуть, що поверхня «неплоска»? Якими математичними твердженнями обґрунтовуються такі операції?



5. Якщо тільки деякі точки дроту дотикаються до плоскої поверхні ковадла, дріт «непрямий». Чому? Щоб вирівняти його, б'ють молотком, як показано на малюнку. При цьому дріт перевертають. Навіщо? Обґрунтуйте ці операції математичними твердженнями.

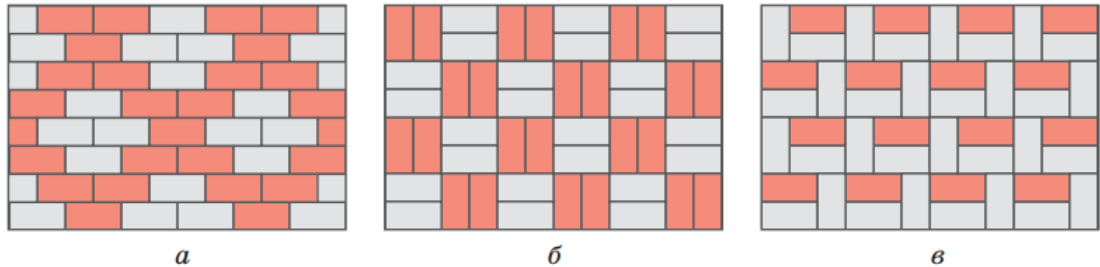


6. Розгляньте малюнок. Поясніть, чому для здійснення фотозйомки в студії і геодезичної зйомки місцевості використовують триноги.

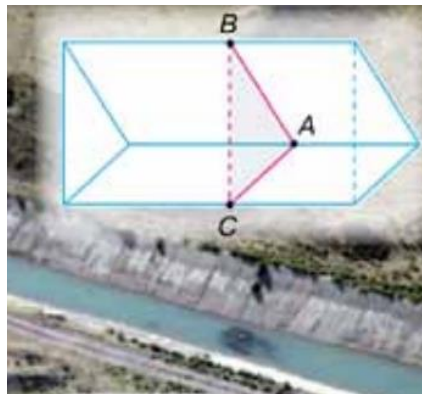


7. Тротуарна плитка має розміри 200×100 мм. Скільки червоної та сірої плитки знадобиться для заощення доріжки довжиною 10 м і шириною 1

м 40 см? Розрахуйте кількість кожного виду плитки, якщо доріжки заощуватимуть так, як показано на малюнках а–в. Порівняйте вартість плитки для кожного способу заощення, якщо 100 штук сірої плитки коштують 370 грн, а 100 штук червоної — 310 грн. Яке заощення (за цих умов) є економічнішим?

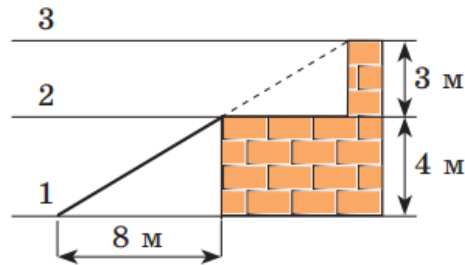


8. Канал із трикутним перерізом завглибшки 2,8 м перегороджено щитом, який має форму рівностороннього трикутника. Щоб визначити гідростатичний тиск на перегородку, треба знати її площу. Обчисліть площу трикутного щита ABC, якщо його розміщено вертикально.

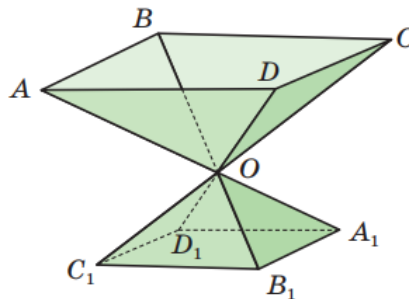


Перпендикулярність прямих і площин у просторі

1. На будівництві використовують похилий конвеєр для транспортування витратних матеріалів з рівня 1 до рівня 2, що розташований на 4 м вище від рівня 1, як показано на малюнку. Конвеєр підтримується опорою, основа якої віддалена на 8 м від початку конвеєра на рівні 1. Потрібно подовжити конвеєр, щоб досягти нового рівня 3, що розташований на 3 м вище від рівня 2, зберігаючи при цьому кут нахилу конвеєра. Знайдіть загальну довжину нового конвеєра та його проекцію на рівень 1.



2. Волонтери вирішили прикрасити парк «вуличними вазами», щоб висаджувати туди навесні квіти. Передбачалося каркас ваз виготовити з металевих прутів однакової довжини, зваривши їх в одній точці так, щоб тупі кути між протилежними прутами дорівнювали 120° . Відстань від землі до верхньої вершини вази має бути 60 см, а $CO : OC_1 = 2 : 1$. Встановіть, скільки метрів металевих стрижнів піде на виготовлення однієї такої вази. Чи вистачить зібраних волонтерами грошей (1900 грн), щоб закупити пруту для виготовлення 20 таких ваз, якщо пруту продають завдовжки 11,75 м, а вартість одного метра прута становить 15 грн.

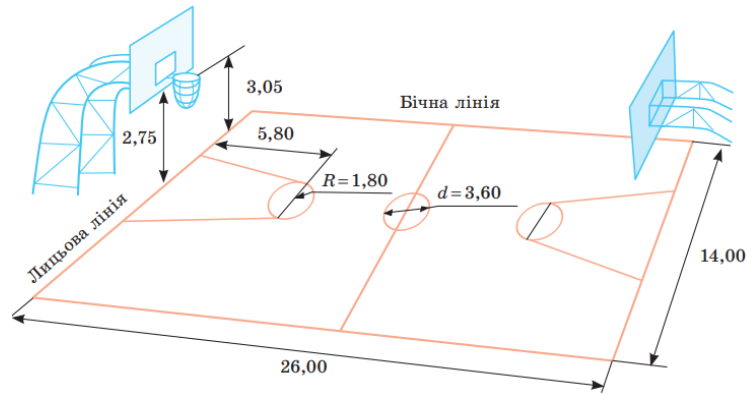


3. Задача з несподіваною відповіддю. На книжковій полиці стоїть тритомник. Товщина кожної книжки — 40 мм, а книжки без обкладинки — 35 мм. Знайдіть відстань від першої сторінки першого тому до останньої сторінки третього тому.

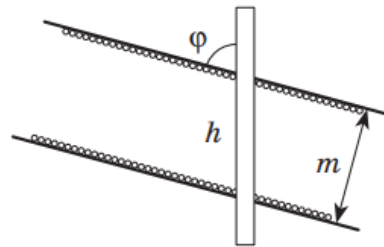


4. Дізнайтеся про стандартні розміри баскетбольного майданчика і правила встановлення баскетбольного щита. Установіть приблизну відстань, яку має подолати м'яч до попадання в кошик, якщо баскетболіст, зріст якого

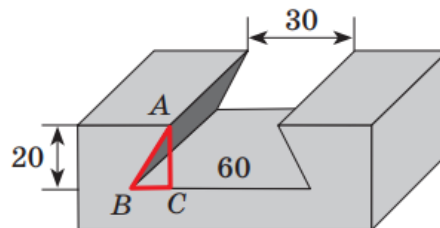
2 м, буде кидати м'яч двома руками від грудей, перебуваючи у центрі майданчика. З якої відстані від щита ви можете потрапити м'ячем у корзину?



5. Знайдіть товщину m вугільного пласта, якщо вертикальна свердловина нахилена до нього під кутом $\phi = 72^\circ$ і проходить по вугіллю відстань $h = 2,5$ м.



6. На якій глибині розташована станція метро, якщо її ескалатор довжиною 85 м нахилений до площини горизонту під кутом 42° ?
7. У металевій деталі зроблено паз, поперечний розріз якого має форму рівнобічної трапеції. За зазначеними на малюнку розмірами (у міліметрах) обчисліть: а) кути нахилу бічних граней паза; б) площу поперечного перерізу деталі.



8. Висота крісел дитячої каруселі — 0,4 м. Вони розташовані на ланцюгах завдовжки 1,6 м, що прикріплені до металевого кола радіуса 2 м. Під час руху каруселі максимальне відхилення крісел від осі становить 45° . Якого

радіуса слід спорудити загорожу навколо каруселі, якщо відомо, що до працюючої каруселі не можна підходити ближче, ніж на 2 м.



9. Щогла закріплена трьома однаковими тросами так, що їх нижні кінці віддалено від щогли на 20 м, а верхні закріплено на висоті 32 м. Які довжини тросів?
10. У підвалі, що має форму півциліндра, треба поставити два стояки, основи яких мають бути однаково віддалені по підлозі від найближчої стіни й розміщатися на відстані 2 м один від одного. Визначте висоту стояків, якщо ширина підвалу становить 4,6 м.

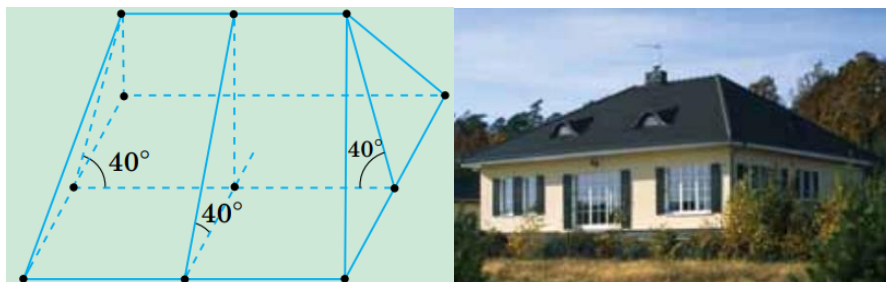


11. Потрібно протягнути два електричних дроти від стовпа до будинку. На стовпі вони кріпляться на висоті 9 м, а на стіні будинку — на висоті 4 м. Скільки потрібно дроту, якщо відстань від стовпа до будинку становить 20 м, а на кріплення і провисання слід додати 6 % знайденої довжини?



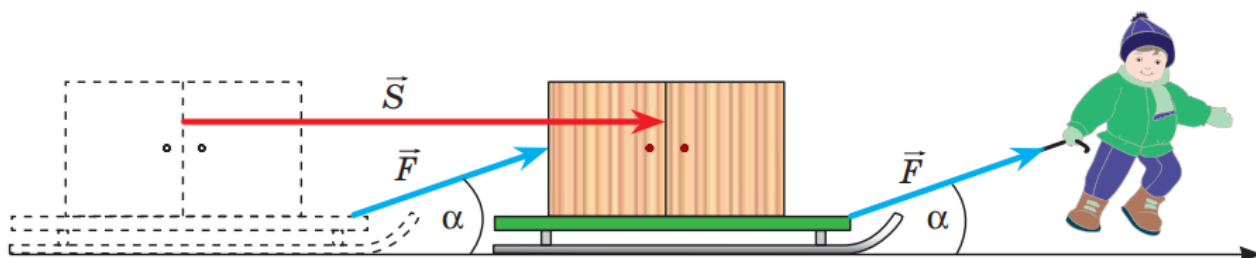
12. Чотирисхилий дах будинку розмірами 12,5 м і 7,2 м має нахил 40° .

- 1) Знайдіть площу кожного схилу даху.
- 2) Яка площа поверхні даху?
- 3) Скільки квадратних метрів дахового заліза треба на покриття, якщо витрати на згин й обрізки становлять 6 %?

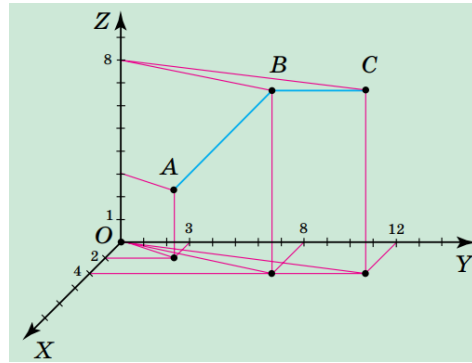


Координати і вектори у просторі

1. Навісну шафу тягнуть рівномірно на санчатах по горизонтальній поверхні. Мотузка, за допомогою якої тягнуть санчата, утворює з горизонтом кут 30° . Сила натягу мотузки 25 Н. Яка робота виконана при переміщенні шафи на 50 м?



2. Під дією сили 20 Н, прикладеної під кутом 30° до напрямку переміщення, фізичне тіло перемістилося на 3 м. Знайдіть виконану цією силою роботу.
3. Кристалічна решітка кристала кухонної солі є кубом, у центрі якого розташований іон натрію (Na^+) з координатами $(0,5a; 0,5a; 0,5a)$. Один з найближчих до нього йон хлору (Cl^-) має координати ядра $(a; 0,5a; 0,5a)$. Знайдіть відстань між йонами натрію і хлору, якщо довжина решітки дорівнює $a = 5,63 \times 10^{-10}$ м.
4. Під час ремонту даху майстер перемістився з точки А в точку С за схемою, зображеною на малюнку. Знайдіть довжину пройденого шляху та відстань по прямій від точки А до точки С.



5. У торговому центрі, щоб потрапити до взуттєвого відділу, треба пройти від входу десять кроків прямо, шість кроків ліворуч, піднятися ліфтом на третій поверх, пройти чотири кроки праворуч. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте траєкторію руху від входу до взуттєвого відділу.

11 клас

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ

- Ентомолог, вивчаючи нашестя саранчі, дослідив, що площа (у м²), заражена саранчею, змінюється за формулою $S_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$, де n — кількість тижнів після зараження. Знайдіть:
 - початкову площу зараження;
 - яку площу заражено через 5 тижнів;
 - яку площу заражено через 10 тижнів.
- Коли CD-програвач вимикають, то сила струму в ньому зменшується за формулою $I(t) = 24 \cdot (0,25)^t$ (А), де I — сила струму в амперах, t — час у секундах. Знайдіть:
 - силу струму в момент вимкнення CD-програвача;
 - $I(t)$, якщо t дорівнює: 1 с, 2 с, 3 с, 4 с;
 - протягом якого часу сила струму у вимкненому CD-програвачі перевищує 4 А. Скористайтесь графіком залежності $I(t) = 24 \cdot (0,25)^t$

3. Під час вирощування бактерій маса культури змінюється за формулою $m(t) = 2 \cdot e^{\frac{t}{2}}$ (г), де t — час у годинах, пройдений після початку розмноження. Знайдіть масу культури через:

а) 30 хв; б) 40 хв; в) 1 год; г) 3 год; ґ) 4 год; д) 6 год.

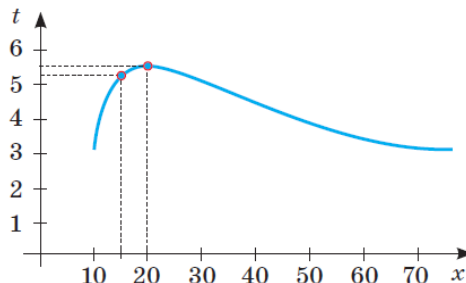
Побудуйте відповідний графік.

4. Металеву кульку, температура якої дорівнює 120°C , помістили в приміщення з температурою повітря 20°C . Через скільки хвилин температура кульки буде 84°C , якщо закон охолодження тіла виражається формулою $D = D_0 \cdot b^{kt}$, де D — різниця між температурою тіла, яке охолоджується, і температурою навколишнього середовища; D_0 — початкова різниця температур тіла й середовища; t — час у хвиликах; b і k — сталі величини, які залежать від форми тіла і матеріалу? Для даного тіла $b=0,8$, $k=0,1$.

ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ

1. Ємність легенів людини виражається функцією $t(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$, де x — вік людини в роках ($x \geq 10$); $t(x)$ — ємність легенів у літрах. За допомогою графіка функції $t(x)$, зображеного на малюнку, установіть:

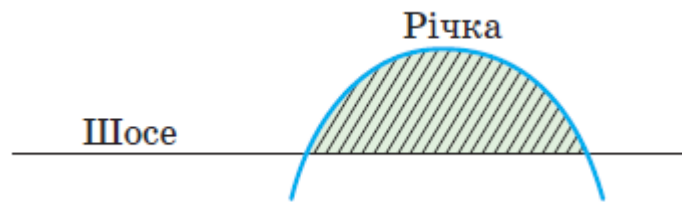
- а) у якому віці ємність легенів людини максимальна і чому вона дорівнює;
б) протягом якого часу ємність легенів більша, ніж у 15 років.



ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

1. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 2 \text{ м/с}^2$. Визначте швидкість руху тіла як функцію від часу t , якщо в момент $t=0$ вона дорівнювала 3 м/с .

2. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t)$, причому в момент часу t_0 швидкість тіла дорівнювала v_0 . Знайдіть залежність швидкості тіла від часу, якщо: а) $a(t) = 8t$, $t_0 = 5$ с, $v_0 = 120$ м/с; б) $a(t) = 8$, $t_0 = 3$ с, $v_0 = 30$ м/с.
3. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$, причому в момент часу t_0 пройдений шлях дорівнював s_0 . Знайдіть залежність шляху, пройденого тілом, від часу, якщо: $v(t) = 3t^2$, $t_0 = 2$ с, $s_0 = 12$ м.
4. (ЗНО, 2006). Річка тече лугом і двічі перетинає шосе, утворюючи криву $y = 3x - x^2$. Яка площа луку між шосе та річкою, якщо вважати, що лінія шосе збігається з віссю Ox ? Одиниця довжини — 1 км.



5. Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни визначається формулою $f(t) = -2,53t^2 + 24,75t + 111,1$, де t — робочий час у годинах. Визначте обсяг продукції, виготовленої за 5 робочих годин.
6. Точка рухається прямолінійно зі змінною швидкістю $v = 10t$ м/с; за перші 4 с вона пройшла 80 м. Знайдіть закон руху точки.
7. Продуктивність праці робітника протягом дня визначається функцією $z(t) = -0,00645t^2 + 0,05t + 0,5$ (грош. од./год), де t — час у годинах від початку роботи, $0 \leq t \leq 8$. Знайдіть обсяг продукції (у грошових одиницях), виготовленої за робочий день.
8. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 1 Н розтягує її на 1 см?
9. Для стиснення пружини на 1 см треба прикласти силу 9,8 Н. Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на 4 см?
10. Для кращого обслуговування заїзду гонок серії «Формула-1» майстри визначили найкращий закон зміни швидкості руху автомобіля прямою трасою: $v(t) = 2(t + 2)^{2,5}$. Який шлях проїде пілот цієї гонки з 2-ї до 7-ї секунди від початку руху?

11. Знайдіть шлях, який пройде тіло від початку руху до зупинки, якщо його швидкість $v(t) = 18t - 6t^2$.
12. Швидкість руху тіла $v(t)$ з часом t змінюється за законом $v = 20 - 3t$ (м/с). Знайдіть шлях, який пройшло тіло за 4-ту секунду свого руху.
13. Сила струму в провіднику з часом змінюється за законом $I(t) = 4 + 2t$. Яка кількість електрики пройде через поперечний переріз провідника за час від 2-ї до 6-ї секунди?
14. Швидкість матеріальної точки, яка рухається по координатній прямій, змінюється за законом $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишіть формулу залежності її координати від часу, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася в початку координат (швидкість руху вимірюють у метрах за секунду).
15. Тіло рухається по координатній прямій зі швидкістю, яка будь-який момент часу t визначається за формулою $v(t) = 6t^2 + 1$. Знайдіть формулу, яка виражає залежність координати точки від часу, якщо в момент часу $t = 3$ с тіло знаходилося на відстані 10 м від початку координат (швидкість руху вимірюють у метрах за секунду).

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

1. Випускниця школи склала ЗНО з української мови на 190 балів, математики — на 195 балів і англійської мови — на 185 балів. З такими сертифікатами вона може гарантовано вступити на чотири факультети в політехнічному університеті і два — в економічному. Скільки можливостей має абітурієнтка для вступу до університету?
2. Учасників театральної студії преміювали екскурсійними поїздками у різні місця України. Серед них: у Київ — 1, біля моря — 2, у Карпати — 4, в Асканію Нова — 1. Скільки можливостей вибору першої екскурсії мають діти?
3. Від селища A до селища B можна доїхати трьома дорогами, а від B до C — двома. Скільки існує маршрутів, щоб дістатися від A до C ?

4. У новій шкільній їдальні старшокласники можуть обирати страви на обід. Скільки різних варіантів обіду пропонують учням цієї школи, якщо їдальня на обід приготувала 2 перші страви — борщ (б) і суп (с), другі — котлети (к), вареники (в), голубці (г) і 2 напої — чай (ч) і йогурт (й).

5. У міжнародних змаганнях з художньої гімнастики беруть участь 7 команд з різних країн. Організатори вирішили зробити інсталяцію державних прапорів кожної команди учасниці. Скільки різних варіантів розташування прапорів існує, якщо кожен можна поставити на будь-якому місці?



6. Інвестиційний фонд «Майбутнє країни» з 10 переможців дистанційного конкурсу обирає три особи для надання грантів на навчання в найкращих університетах України — Київський національний університет ім. Тараса Шевченка (КНУ), Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського (КПІ) і Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна (ХНУ). Скількома способами можуть бути розподілені ці гранти?

7. Студентська група складається з 15 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна обрати старосту групи та його заступника?

8. Студентська група складається з 15 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одного студента в стипендіальну комісію?

9. Студентська група складається з 15 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одну дівчину та одного хлопця для участі в конкурсі «Найрозумніший»?

10. У притулок для тварин волонтери закупили три види сухого корму і два види м'ясних консервів. Скільки існує варіантів організувати для тварин вечерю, що складається з однієї страви?

11. Одинадятикласник має обрати для пробного ЗНО два навчальні предмети. На початку березня проводитиметься пробне ЗНО з української

мови і літератури, а наприкінці (в один день) — з історії України, математики, біології, географії, фізики, хімії, іноземної мови. У день проведення пробного тестування кожний зареєстрований учасник може пройти тест з одного навчального предмета. Скільки всього існує варіантів вибору учнем двох предметів для проходження пробного ЗНО?

12. Для завершення формування експедиції на космічну станцію додатково розглядалися заявки 10 претендентів на посаду лікаря-дослідника, 5 претендентів на посаду біолога і 3 претендентів на посаду техника. Жоден кандидат не претендував одночасно на дві чи більше посад. Скількома способами можна заповнити одне вільне місце в експедиції? У магазині є три види мінеральної води і п'ять видів соку. Тарас хоче купити собі воду або сік. Скількома способами він може це зробити?

13. На футбольний матч одна з команд заявила 4 запасних. Скількома способами тренер може посадити цих чотирьох запасних на лавці?

14. Групі туристів пропонується піднятися на одну з вершин Українських Карпат. Туди ведуть 4 стежки. Скількома маршрутами туристи можуть піднятися на гору та спуститися з неї, обираючи для спуску й підйому різні стежки?

15. У готелі на сніданок пропонують 3 другі страви (А, В, С) і два напої (М, К). Скільки різних наборів із двох страв можна вибрати на сніданок? Складіть відповідну діаграму-дерево.

16. Київський річковий трамвай — один із видів міського річкового транспорту в м. Києві. Скількома способами 5 осіб можуть утворити чергу, щоб зайти до такого трамвая?

17. Скільки різних речень можна написати словами «співати», «ми», «любимо»? А словами «ми», «дуже», «любимо», «співати»?

382. Скількома способами можна розмалювати букви в слові «Україна», якщо використати усі кольори райдуги без повторень.

18. Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб цифри не повторювалися?

19. (ЗНО, 2014). Студент на першому курсі повинен вибрати одну з трьох іноземних мов, яку вивчатиме, та одну з п'яти спортивних секцій, що відвідуватиме. Скільки всього існує варіантів вибору студентом іноземної мови та спортивної секції?

А	Б	В	Г	Д
5	8	10	15	28

20. Скількома способами можна нанизати 8 різних грибів на: а) один шампур; б) одну нитку?

21. Вісім друзів вирішили провести турнір з тенісу так, щоб кожен зіграв з кожним одну партію. Скільки партій буде зіграно?

22. Олег обирає одяг для зустрічі. Він розглядає 3 пари взуття (A, B, C), 2 пари брюк (a, b) і 3 сорочки (x, p, y). Скільки різних наборів одягу можна утворити? Складіть відповідну діаграму-дерево.

23. Від готелю до солоного озера ведуть 7 доріг. Скількома способами відпочивальник може дістатися озера і повернутися назад? Розгляньте випадки, коли рух до озера та від нього відбувається: а) однією дорогою; б) різними шляхами; в) одним із двох попередніх способів.

24. Скільки різних «кортежів» можна створити на міському карнавалі із чотирьох автомобілів — білого, жовтого, синього та зеленого? Складіть відповідну діаграму-дерево.

25. У середу за розкладом в 11-А класі 7 різних уроків, серед яких алгебра та геометрія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб алгебра й геометрія не стояли поруч?

26. У вівторок за розкладом в 11-Б класі 6 різних уроків, серед яких фізика та астрономія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб фізика й астрономія стояли поруч?

27. (ЗНО, 2012). Скільки існує різних дробів $\frac{m}{n}$, якщо m набуває значень 1; 2 або 4, а n набуває значень 5; 7; 11; 13 або 17?

28. Скільки різних упорядкованих трійок можна утворити з чотирьох елементів — \diamond , \blacksquare , \odot , \blacktriangle ?
29. У «Домашній пекарні» готують великі й малі струдлі з листкового та дріжджового тіста. Скільки різних видів струдлів можна замовити в цій пекарні, якщо для листкових струдлів використовують три види начинки, а для дріжджових — чотири?
30. Скількома способами можна скласти денний розклад із 5 різних уроків, якщо клас вивчає 10 різних предметів?
31. Скількома способами можна розмістити на полиці 5 дисків?
32. На колі розміщено 9 точок. Скільки існує відрізків, які з'єднують кожную точку з іншою?
33. Для чергування в їдальні запрошують трьох учнів з 7 класу і двох учнів з 10 класу. Скількома способами це можна зробити, якщо в 7 класі навчається 24 учні, а в 10 класі — 18.
34. Скількома способами 4 учні можуть розміститися за двома двомісними партами?
35. Скількома способами з трьох різних цукерок можна вибрати дві?
36. Скількома способами 6 учнів можуть розміститися за трьома двомісними партами?
37. На тарілці є 7 груш. 5 дітей мають взяти з тарілки по одній груші. Скількома способами це можна зробити?
38. На полиці є 20 книжок. Скількома способами можна вибрати дві з них?
39. У класі 32 учні. Скількома способами можна вибрати з них двох чергових?
40. (ЗНО, 2010). Кодовий замок на дверях має 10 кнопок, на яких нанесено 10 різних цифр (мал.). Щоб відчинити двері, потрібно одночасно натиснути дві кнопки, цифри на яких складають код замка. Скільки всього існує різних варіантів коду замка? Уважайте, що коди, утворені перестановкою цифр (наприклад, 1–2 і 2–1), є однаковими.



А	Б	В	Г	Д
100	90	45	20	10

41. Скільки словників треба мати, щоб безпосередньо перекладати з п'яти різних мов на кожен з них?

42. (ЗНО, 2014). Блок соціальної реклами складається з 4 рекламних роликів: про шкідливість паління, про охорону навколишнього середовища, про дотримання правил дорожнього руху та про велосипедне місто. Ролик про шкідливість паління заплановано показати двічі — першим і останнім, а інші три ролики — по одному разу. Скільки всього існує варіантів формування цього блоку соціальної реклами за вказаним порядком рекламних роликів?

А	Б	В	Г	Д
6	8	12	24	120

43. У баскетбольній команді, яка складається з 15 чоловік, треба обрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

44. Скількома способами можна заповнити картку «Спортлото» — закреслити 6 номерів із 49?

45. Для досліду треба взяти 3 білих, 5 червоних і 7 рожевих квіток гороху з наявних 10-ти білих, 10-ти червоних і 10-ти рожевих квіток. Скількома способами це можна зробити?

46*. Скількома способами можна роздати 28 кісточок доміно чотирьом гравцям, щоб кожному дісталася 7 кісточок?

47. 7 робітників бригади щомісяця одержують по 12 300 грн, 8 — по 12 450 грн, а 5 — по 12 500 грн. Визначте середню місячну зарплату робітника цієї бригади.

48. Виточуючи циліндричну деталь радіуса R , токарь практично виточує деталь радіуса $R + \alpha$, де α — деяке відхилення (додатне або від'ємне). Нехай

два токарі, виточивши по 6 деталей, допустили такі похибки (у десятих частках міліметра):

перший: 2, -5, 4, -3, -3, 5;

другий: 3, -1, 4, 1, 1, 2.

Хто з них виконав завдання якісніше?

49. Внаслідок вибіркового аналізу виручки (у тис. грн) туристичної фірми за день дістали вибірку обсягом $n = 40$:

87	94	99	90	90	87	85	87
90	94	87	87	82	90	94	90
85	85	87	94	81	82	87	97
90	94	85	81	87	85	90	82
94	90	94	82	97	81	85	87

За цими даними: а) знайдіть розмах вибірки; б) складіть частотну таблицю.

(Розв. див див. Бевз 11, с.98)

50. За результатами аналізу виробництва м'яса (у тис. т) за деякий період в усіх областях України отримали таку сукупність даних: 166; 73; 90; 206; 115; 52; 50; 63; 73; 211; 47; 47; 129; 34; 50; 52; 55; 44; 41; 90; 55; 50; 363; 47; 47.

Знайдіть: моду, медіану та розмах вибірки. (Розв. див див. Бевз 11, с.99)

51. (ЗНО, 2018). У таблиці відображено інформацію щодо кількості відвідувачів кінотеатру протягом семи днів тижня.

День тижня	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Нд
Кількість відвідувачів	124	140	140	170	163	195	168

Укажіть медіану кількості відвідувачів кінотеатру.

А	Б	В	Г	Д
140	155	163	170	195

52. Щоб з'ясувати кількість кишенькових грошей, які учні беруть у школу, провели опитування учнів 11 класу. Відповіді утворили певний ряд даних, на основі якого склали його статистичний розподіл частот:

Кількість грошей, грн	20	30	40	50	60	70	85	90	100	130
Частота	1	4	4	2	2	5	2	2	2	1

За цим статистичним розподілом частот установіть відповідність між характеристикою ряду даних (1–4) та її числовим значенням (А–Д).

- | | |
|--------------------|-------|
| 1 Середнє значення | А 110 |
| 2 Мода | Б 50 |
| 3 Медіана | В 60 |
| 4 Розмах | Г 70 |
| | Д 62 |

53. Під час медичного обстеження кров'яного тиску в курсантів (в умовах навчального навантаження) одержано такі результати:

x_i	112	114	116	118	120	122	124	126	128	130
n_i	5	20	30	40	40	30	20	10	3	2

Знайдіть моду, медіану та розмах вибірки.

54. Знайдіть середній відсоток бракованих виробів, користуючись такою таблицею.

Партія товару	Кількість виробів, шт.	Відсоток бракованих виробів	Кількість бракованих виробів, шт.
I	2000	3,4	68
II	1420	2,46	35
III	408	0,49	2
Разом	3828		105

54. Протягом 5 днів маси десяти бичків збільшилися відповідно на 2,5; 3,0; 2,8; 2,7; 2,7; 2,8; 2,0; 2,4; 2,6 і 2,9 кілограма. Знайдіть середній денний приріст маси одного бичка.

55. Три фрезерувальники виготовили по 5 однакових деталей завдовжки 235 мм, допустивши відповідно такі похибки (у мм):

перший: 0,2, -0,2, -0,5, 0,3, 0,4;

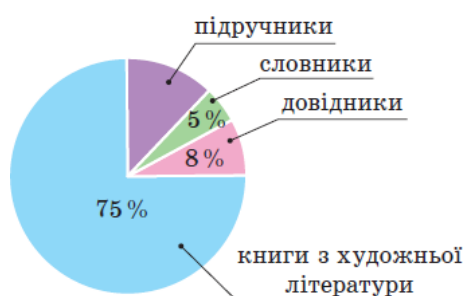
другий: 0,1, 0,5, -0,2, -0,4, 0,5;

третій: 0,5, -0,1, -0,4, 0,3, 0,4. Знайдіть середні квадратичні допущених ними похибок. Який фрезерувальник виконав завдання найкраще?

56. (ЗНО, 2016). У бібліотеці є лише підручники, словники, довідники та книги з художньої літератури. Відсотковий розподіл кількості цих книг у бібліотеці відображено на діаграмі.

а) Визначте загальну кількість книг у цій бібліотеці, якщо кількість підручників дорівнює 72.

б) Скільки потрібно придбати додатково підручників, щоб отримана після цього їхня сумарна кількість відносилася до кількості довідників, як 4 : 1?



57. Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді лише на 20 з 25 запитань програми. Знайдіть імовірність того, що він із трьох запропонованих запитань знатиме відповіді принаймні на два.

58. Волонтери екологічної організації проводили у супермаркеті акцію щодо використання багаторазових торбинок для овочів. Бажаючим дарували одну торбинку, яку діставали з коробки. Яка ймовірність того, що витягнута торбинка буде не червоною, якщо в коробці залишилося 2 білі, 3 зелені і 5 червоних торбинок?

59. Яка ймовірність того, що під час падіння грального кубика випаде: а) два очки; б) парна кількість очок; в) кількість очок, кратна 3?

60. З перевернутих 28 пластинок доміно навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на ній виявиться всього:

а) 2 очки (подія A); б) 5 очок (подія B); в) 12 очок (подія C)?

61. З перевернутих 28 кісточок доміно навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на одній з її частин виявиться 6 очок (подія A)?

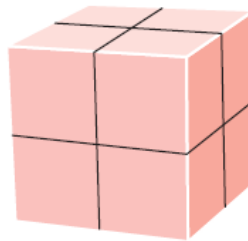
62. Знайдіть імовірність того, що навмання вибране натуральне одноцифрове число: а) є число 7; б) ділиться на 3.

63. (ЗНО, 2010). Пасічник зберігає мед в однакових закритих металевих бідонах. Їх у нього дванадцять: у трьох бідонах міститься квітковий мед, у чотирьох — мед із липи, у п'яти — мед із гречки. Знайдіть імовірність того, що перший навмання відкритий бідон буде містити квітковий мед.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$

64. Пофарбований з усіх боків дерев'яний кубик розпиляли на 8 рівних кубиків і зсипали їх у коробку. Яка ймовірність того, що вийнятий навмання з коробки кубик матиме зафарбовану:

а) тільки одну грань; б) дві грані; в) не менше трьох граней?

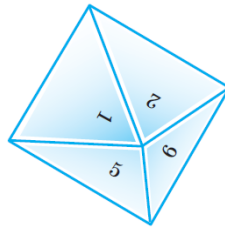


65. Пофарбований з усіх боків дерев'яний кубик розпиляли на 64 рівні кубики і зсипали їх у коробку. Яка ймовірність того, що вийнятий навмання з коробки кубик матиме зафарбовану: а) тільки одну грань; б) дві грані; в) не менше трьох граней?

66. Пофарбований дерев'яний кубик розпиляли на 125 рівних кубиків і зсипали їх у торбину. Яка ймовірність того, що, беручи з торбини навмання один кубик, ви візьмете такий, що має: а) тільки одну пофарбовану грань; б) тільки дві пофарбовані грані; в) не менше трьох граней?

67. З букв, написаних на окремих квадратних картках, склали слово МАТЕМАТИКА. Потім ці картки перевернули, перемішали і навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на ній написано: а) букву А; б) букву М?

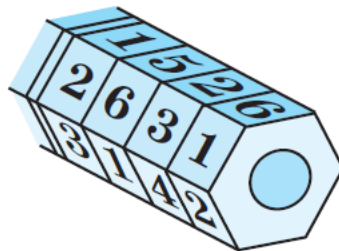
68. Уявіть, що на кожній грані правильного октаедра написано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Яка ймовірність того, що під час падіння такого грального октаедра випаде: а) цифра 7; б) цифра 8; в) цифра 9?



69. У торбині міститься 5 білих і 7 чорних кульок. Яка ймовірність того, що, беручи навмання, ви виймете: а) білу кульку; б) чорну кульку?

70. Їдальня на обід приготувала: 3 перші страви — борщ, суп, капуста; 4 другі — вареники, голубці, котлети, рагу; 2 десертні — морозиво й тістечка. Яка ймовірність того, що хтось, не знаючи смаків товариша, замовить для нього борщ, котлети й морозиво?

71. Замок із «секретом» містить 4 шестикутні призми, які можуть повертатися незалежно одна від одної навколо спільної осі. На кожній бічній грані призми написано цифру від 1 до 6. Повертаючи призми, у прорізі замка можна встановити будь-яке чотирицифрове число, записане такими цифрами. Замок відмикається тільки тоді, коли буде набрано число, яке становить «секрет» замка. Яка ймовірність того, що людина, яка не знає цього «секрету», відкриє замок за один набір числа навмання?



72. На полицю навмання поставили чотиритомний словник. Яка ймовірність того, що книжки поставлено в належній послідовності?

73. Дівчинка хотіла нанизати на нитку 7 різних намистин. Це зробив її братик. Яка ймовірність того, що він зробив саме так, як хотіла дівчинка?

74. На столі лежать 5 перевернутих і перетасованих карток, на кожній з яких написано одну з букв — А, Е, О, Р, Т. Яка ймовірність того, що:

а) першою візьмуть картку з буквою О, другою — з буквою Р, третьою — з буквою Т;

б) з трьох узятих навмання карток буде складено слово ОРТ?

75. Із 32 карток із буквами українського алфавіту беруть навмання 4 картки.

Яка ймовірність того, що з них можна скласти слово РОМБ

76. Із 10 металевих конструкцій дві — високої якості. Знайдіть ймовірність того, що серед взятих навмання п'яти конструкцій тільки одна високої якості.

77. У класі 10 учнів вивчають англійську мову, 8 — німецьку, 6 — французьку. Навмання складено групу з 3 учнів. Знайдіть ймовірність того, що: а) всі 3 учні групи вивчають різні іноземні мови; б) всі 3 учні вивчають англійську мову; в) всі 3 учні вивчають одну з названих мов.

78. Зі 100 деталей, серед яких виявлено 2 браковані, навмання вибрали 6 деталей. Знайдіть ймовірність того, що серед вибраних 6 деталей бракованими виявляться 2 деталі.

79. Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді на 45 запитань із 60. Кожен білет містить 2 запитання з 60. Студент узяв білет навмання. Знайдіть ймовірність того, що він знає відповідь на: а) на обидва запитання; б) тільки на одне запитання.

80. У магазин надходять лампи з двох заводів: 30 % — з одного і 70 % — з другого. Серед ламп першого заводу стандартних 85 %, а другого — 75 %. Яка ймовірність того, що куплена в цьому магазині лампа виявиться стандартною?

81. Знайдіть ймовірність того, що вибраний навмання член послідовності $a_n = 3n + 2$, де $n \leq 100$, ділиться на 5. А якщо $n \leq 1000$?

82. Серед 10 лотерейних білетів виграшних 2. Знайдіть ймовірність того, що серед узятих навмання 5 білетів виграшним виявиться: а) тільки 1; б) принаймні 1.

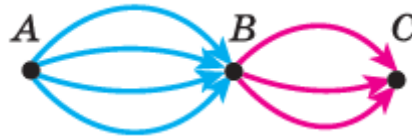
83. Учасник «Спортлото» має назвати 6 чисел із запропонованих 49. Він виграє, якщо вгадає 3, 4, 5 або 6 чисел. Знайдіть ймовірності вгадування цієї кількості чисел.

84. Відомо, що серед 1000 новонароджених зазвичай буває 517 хлопчиків і 483 дівчинки. Знайдіть імовірність народження хлопчика.
85. Випущено 1000 лотерейних білетів, на один із яких має випасти виграш 100 грн, на 10 — по 20 грн, на 50 — по 1 грн. Задайте таблицею випадковий виграш. Знайдіть математичне сподівання цієї величини.
86. Підкидають одразу два гральні кубики й підраховують суму очок на їх верхніх гранях. Задайте випадкову величину цієї суми та знайдіть її математичне сподівання.
87. З повного набору кісточок доміно, перевернутих донизу очками, взяли навмання одну й підраховували суму очок на обох її половинках. Задайте таблично випадкову величину цієї суми та накресліть відповідну діаграму.
88. У меню їдальні є 3 перші страви, 6 — других страв і 4 — треті страви. Скількома способами можна вибрати обід, який містить по одній страві кожного виду?
89. Телефонна станція обслуговує абонентів, номери телефонів яких містять 7 цифр і починаються з 257. На яку кількість абонентів розрахована ця станція?
90. У коробці було 6 зелених куль і кілька синіх. Скільки синіх куль у коробці, якщо ймовірність того, що вибрана навмання куля виявиться зеленою, дорівнює $\frac{3}{5}$?
91. Із 10 учнів, що брали участь у районній олімпіаді, троє посіли призові місця. Із цих 10 учнів навмання вибирають одного. Яка ймовірність того, що він став призером олімпіади?
92. Випущено 100 лотерейних білетів, із яких 5 мають виграти по 10 грн, 10 — по 5 грн, 40 — по 1 грн, решта — безвиграшні. Який середній виграш припадає на один білет?
93. (ЗНО, 2017). У торбинці лежать три цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки однакової форми й розміру. Якого

найменшого значення може набувати t , якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша від 0,25?

94. Для захисту інформації на комп'ютері використовують пароль — послідовність латинських букв завдовжки від 3 до 5 символів (пароль може містити кілька однакових букв). Скільки різних паролів можна утворити, використовуючи 26 латинських букв?

95. Із міста A до міста B проходять 4 шляхи, а з міста B до міста C проходять 3 шляхи. Скількома способами можна проїхати з міста A до міста C ?



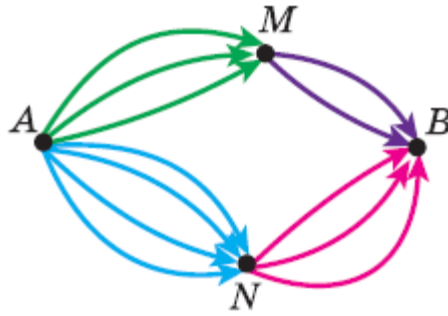
96. На вершину гори прокладено 5 маршрутів. Скількома способами альпініст може піднятися на гору та спуститися з неї? Дайте відповідь на це запитання також за умови, коли підйом і спуск мають відбуватися за різними маршрутами.

97. У кафе пропонують меню з 3 перших страв, 6 других страв і 5 третіх страв. Скільки є способів вибрати обід із трьох страв (по одній страві кожного виду)?

98. Розглядатимемо склади з двох букв, перша з яких позначає приголосний звук, а друга — голосний. Скільки таких різних складів можна скласти з букв слова: 1) шабля; 2) шаровари?

99. У корзині лежать 10 яблук і 7 груш. Антон вибирає яблуко або грушу. Після цього Максим вибирає яблуко та грушу. У якому випадку Максим має більше можливостей для вибору: коли Антон узяв яблуко чи коли Антон узяв грушу?

100. На рисунку показано схему доріг, які ведуть з міста A до міста B . Скількома способами можна проїхати з міста A до міста B ?



101. У кафе пропонують меню з 3 різних салатів, 6 різних м'ясних страв і 5 різних десертів. Скільки існує способів вибрати обід із двох страв різного виду?
102. Монету кидають 4 рази. Скільки різних послідовностей гербів і цифр можна отримати?
103. Гральний кубик кидають 3 рази. Скільки різних послідовностей очок можна отримати?
104. У книжковому магазині є 4 різних видання поеми «Енеїда», різних видання п'єси «Наталка Полтавка» і 2 різних видання п'єси «Москаль-чарівник». Крім того, є 5 різних книг, у яких містяться поема «Енеїда» та п'єса «Наталка Полтавка», і 6 різних книг, у яких містяться п'єси «Наталка Полтавка» та «Москальчарівник». Скількома способами можна зробити покупку, яка б містила по одному екземпляру кожного із цих творів?
105. Скількома способами 5 машин можуть вишикуватися в колону?
106. За правилами *FIFA* у фінальній частині чемпіонату світу з футболу беруть участь 32 команди. Скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі (три призових місця) між командами?
107. Скількома способами в класі, у якому 30 учнів та учениць, можна вибрати старосту та його заступника? Скількома способами в цьому класі можна призначити двох чергових?
108. Скількома способами можна розставити на полиці 7 різних книг?
109. У школі 20 класів і 20 класних керівників. Скількома способами можна розподілити класне керівництво між учителями?

110. Скількома способами можуть сісти в автомобіль 5 осіб, якщо кожна з них може водити автомобіль?
111. У футбольній команді, яка складається з 11 гравців, потрібно обрати капітана та його заступника. Скількома способами можна це зробити?
112. Комісія, що складається з 15 осіб, має вибрати голову, його заступника та секретаря. Скількома способами можна це зробити?
113. У 9 класі вивчають 12 предметів. Денний розклад містить 6 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад так, щоб усі 6 уроків були різними?
114. У фінальній частині чемпіонату Європи з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть розподілитися золоті, срібні та бронзові нагороди?
115. У класі навчаються 32 учні та учениці. Кожні двоє з них обмінялись одне з одним фотокартками. Скільки всього було роздано фотокарток?
116. У класі з поглибленим вивченням математики 29 учнів та учениць. Скількома способами можна сформувати команду з 5 осіб для участі в математичній олімпіаді?
117. Дано правильний n -кутник. Скільки існує чотирикутників із вершинами, які містяться серед вершин даного n -кутника?
118. На площині позначено 10 точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників із вершинами в цих точках?
119. Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, щоб цифри не повторювалися, а крайні цифри були парними?
120. Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило рівно 2 муляри?
120. Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 12 є виграшними. Перший учень навмання вибирає 10 білетів. Скільки існує варіантів вибору, при яких він вибере рівно 3 виграшних білети?

121. Нехай у коробці лежать 15 більярдних куль, пронумерованих числами від 1 до 15. Яка ймовірність того, що вийнята навмання куля матиме номер, кратний 3?

122. Переможцями шкільного етапу конкурсу талантів стали Марина, Світлана, Андрій та Дмитро. На районний конкурс талантів треба відправити двох учнів із числа переможців. Було прийнято рішення відібрати команду шляхом жеребкування. Яка ймовірність того, що на районному конкурсі школу представлятимуть хлопчик і дівчинка?

123. Нехай у коробці лежать 9 зелених куль. Яка ймовірність того, що взята навмання куля буде зеленого кольору? жовтого кольору?

124. На торговельному лотку лежать 28 яблук — 15 жовтих і 13 червоних. Покупець придбав 3 яблука, які продавець вибрав навмання. Яка ймовірність того, що всі придбані яблука жовті?

125. Ймовірність купити бракований електроприлад дорівнює 0,007. Чи правильно, що в будь-якій партії із 1000 електроприладів є 7 бракованих?

126. Ймовірність улучити в мішень становить 75 %. Чи може бути так, що в серії зі 100 пострілів буде 98 улучень у мішень?

127. У шухляді лежать 8 синіх і 12 червоних олівців. Яка ймовірність взяти навмання з шухляди: ручку; олівець?

128. У коробці було 17 карток, пронумерованих числами від 1 до 17. Із коробки навмання взяли одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записано число:

- 1) 12; 3) кратне 3; 5) двоцифрове;
- 2) парне; 4) не кратне 5; 6) просте?

129. На 15 картках записано натуральні числа від 1 до 15. Яка ймовірність того, що число, записане на навмання вибраній картці:

- 1) непарне; 3) не ділиться націло ні на 2, ні на 3?
- 2) складене;

130. У коробці лежать a синіх, b жовтих і c червоних кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться:

1) жовтою; 2) синьою; 3) не червоною?

131. У мішку Діда Мороза лежать n плюшевих ведмедиків, m цукерок і k мандаринів. Яка ймовірність того, що вибраний навмання подарунок виявиться:

1) ведмедиком; 2) їстівним; 3) не цукеркою?

132. На полиці лежать 12 зошитів, з яких 5 у клітинку. Яка ймовірність того, що вибрані навмання 2 зошити будуть у клітинку?

133. У колекції Андрія є 40 монет різних країн, серед яких 6 українських. Андрій узяв навмання 3 монети. Яка ймовірність того, що всі ці монети будуть українськими?

134. У ящику лежать 12 жовтих і 15 синіх куль. Яка ймовірність того, що з вибраних навмання восьми куль п'ять будуть жовтого кольору?

135. Для лотереї підготували 1000 білетів, з яких 15 є виграшними. Яка ймовірність того, що з трьох навмання вибраних білетів усі виявляться виграшними?

136. У шухляді лежать олівці та ручки. Відомо, що олівців на 12 штук менше, ніж ручок. Скільки олівців лежить у шухляді, якщо ймовірність того, що вибраний навмання предмет:

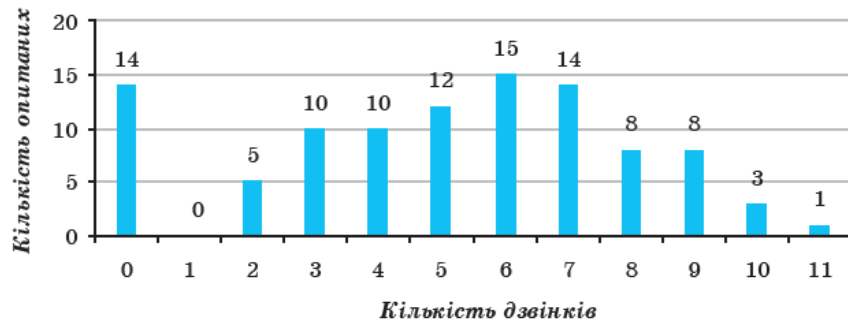
1) є ручкою, дорівнює $\frac{5}{8}$; 2) є олівцем, дорівнює $\frac{1}{6}$?

137. Подарунковий комплект містить 12 зелених і кілька червоних надувних куль. Скільки червоних куль у комплекті, якщо ймовірність того, що вибрана навмання куля: 1) виявиться зеленою, дорівнює $\frac{3}{7}$; 2) виявиться червоною, дорівнює $\frac{2}{5}$?

138. У чемпіонаті України з футболу 2017–2018 рр. команда «Шахтар», що стала чемпіоном України, зіграла 32 матчі, у яких двічі забила 5 голів, 3 рази — 4 голи, 9 разів — 3 голи, 8 разів — 2 голи, 6 разів — один гол і в 4 матчах не забила жодного гола. Обчисліть середню кількість м'ячів, яку команда «Шахтар» забивала в одному матчі.

139. Студентка протягом семестру отримала 45 оцінок, серед яких 7 п'ятірок, 22 четвірки та 16 трійок. Обчисліть середній бал студентки.

Телефонна компанія хоче дізнатися про кількість телефонних дзвінків, які робить людина протягом доби. Дані щодо 100 людей подано на діаграмі. Обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду цієї вибірки.



140. У секції легкої атлетики займаються 30 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна скласти команду із 7 осіб так, щоб до неї входило п'ять хлопців і дві дівчини?

141. Є 6 різних квіток. Скільки існує способів скласти з них букет із 3 квіток або з 5 квіток?

142. У коробці лежать 15 куль: 10 синіх та 5 зелених. Яка ймовірність того, що навмання взята з коробки куля виявиться жовтою?

143. У коробці лежать 10 білих і 5 червоних куль. Яку найменшу кількість куль треба вийняти навмання з коробки, щоб ймовірність того, що серед них обов'язково будуть 2 білі кулі, дорівнювала 1?

144. Ймовірність купити браковану пару чобіт деякої відомої фірми складає 0,023. Скільки бракованих пар взуття гарантовано містить партія з 1000 пар чобіт цієї фірми?

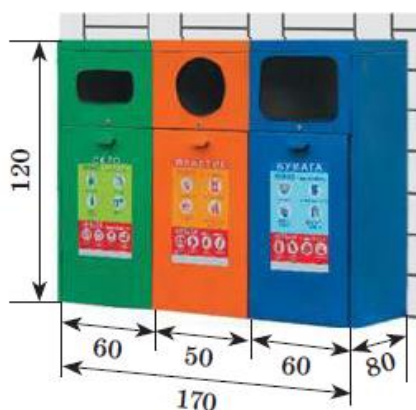
145. Набираючи номер телефону, абонент забув другу цифру номера. Яка ймовірність того, що він з першої спроби набере правильний номер?

146. У класі навчаються 18 дівчат і 12 хлопців. Навмання вибирають одну особу для участі в шкільних зборах. Яка ймовірність того, що буде вибрано хлопця?

147. При підкиданні монети 20 разів поспіль випав герб. Яка ймовірність того, що при наступному підкиданні знову випаде герб?

МНОГОГРАННИКИ

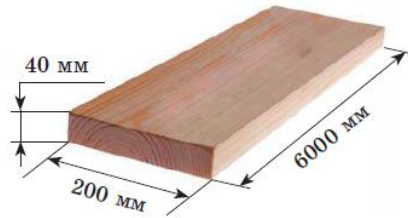
1. На малюнку зображено контейнер для роздільного збору сміття, який встановлюють біля технічної будівлі. Його розміри: 170 x 80 x 120 см. Видимі частини контейнера фарбують відповідними кольорами, а невидимі — чорною фарбою. Скільки фарби кожного кольору потрібно, щоб перефарбувати 100 таких контейнерів один раз, якщо на 1 м² поверхні йде 120 г фарби? Відходи та втрати покриваються отворами.



2. Розміри цеглини — 250 x 120 x 65 мм. Знайдіть відстань між її найвіддаленішими точками.

3.(ЗНО, 2010). Дерев'яний брусок має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 10 см, 20 см, 80 см. Скільки лаку потрібно для того, щоб один раз покрити ним усю поверхню цього бруска, якщо на 1 м² витрачається 100 г лаку?

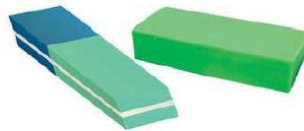
4. Для проведення змагань з настільних ігор у таборі відпочинку вирішили виготовити довгий дерев'яний стіл. Для стільниці придбали 5 обрізних дошок (розміри подано на малюнку). Скільки лаку знадобиться для того, щоб один раз покрити ним кожну дошку, якщо на 1 м² витрачається 100 г лаку?



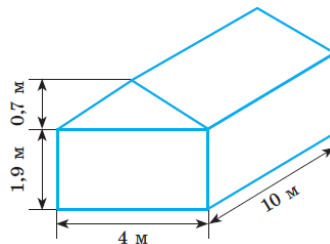
5. Підставка для канцелярського приладдя має форму правильної трикутної призми без верхньої основи. Периметр бічної грані цієї підставки дорівнює 40 см. Знайдіть площу бічної поверхні підставки, якщо сторона її основи дорівнює 10 см.



6. Гумки форми прямого і похилого паралелепіпедів мають однакові лінійні розміри (довжину, ширину і висоту). Установіть, яка з гумок має більшу площу поверхні.



7. На малюнку зображено теплицю для вирощування овочів. Установіть вартість плівки на цю теплицю, якщо вона продається погонними метрами у формі рукава, ширина якого дорівнює 1500 мм. Врахуйте, що плівку можна склеювати, але 5 % плівки йде у відходи. Ціна одного погонного метра становить 21 грн.



8. (ЗНО, 2009). Кімната має форму прямокутного паралелепіпеда (ширина кімнати — 4 м, довжина — 5 м, висота — 2,5 м). Площа стін кімнати дорівнює 0,8 площі бічної поверхні цього паралелепіпеда. Скільки фарби (у

кг) потрібно для того, щоб повністю пофарбувати стіни і стелю цієї кімнати, якщо на 1 м витрачається 0,25 кг фарби?

9. У кімнаті, що має форму прямокутного паралелепіпеда, є два вікна та одні двері. Скільки рулонів шпалер (без малюнка) потрібно придбати, щоб обклеїти стіни цієї кімнати, якщо відомі розміри (у м): кімнати — $4 \times 5 \times 2,8$; вікон — $1,2 \times 1,8$; дверей — $0,9 \times 2,1$; рулона — $0,5 \times 10$. Врахуйте, що відходи становлять 5%.

10. Відома піраміда Хеопса в Єгипті має форму правильної чотирикутної піраміди. Її висота — 147 м, а площа основи — 5,3 га. Знайдіть кут нахилу її бічного ребра до площини основи.

11. Дах має форму правильної чотирикутної піраміди, ребро основи якої дорівнює 5 м, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 45° . Скільки фарби потрібно, щоб пофарбувати цей дах двічі, якщо на одноразове покриття цією фарбою 1 м^2 витрачається 150 г?

12. Підприємець, який спеціалізується на заготовці екологічно чистих лікувальних трав, вирішив випускати набори трав для покращення стану шкіри обличчя. Кожна трава упаковується в одноразовий пакетик (виготовлений з екологічного матеріалу), що має форму тетраедра, кожне ребро якого дорівнює 4 см. В одній картонній упаковці мають міститися: череди — 10 пакетів, календули — 8 пакетів і мати-й-мачухи — 7 пакетів. У підприємця є 7 м^2 екологічного матеріалу для одноразових пакетиків і відповідно підготовлені трави. Скільки упаковок лікувальних трав він може підготувати до продажу?



13. У магазині для маленьких подарунків є упаковки двох видів: у формі куба і у формі правильного тетраедра. На яку упаковку йде більше матеріалу, якщо ребро тетраедра у 3 разів більше за ребро куба?



ТІЛА ОБЕРТАННЯ. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

1. Ви отримали замовлення зварити трубопровід з десятиметрових труб діаметром 102 мм завдовжки 1 км. Скільки метрів стикових швів доведеться зварити? На яку мінімальну оплату ви можете розраховувати, якщо вартість зварки одного такого шва дорівнює 400 грн?
2. Висота консервної банки циліндричної форми дорівнює 4 см, а радіус основи — 6 см. Скільки таких банок можна виготовити з 15 000 м², якщо 10 % матеріалу йде на відходи?
3. Діаметр циліндричного парового котла завдовжки 3,8 м дорівнює 0,8 м. Знайдіть тиск пари на повну поверхню котла, якщо на 1 см² пара давить із силою 10 кг.
4. Скільки квадратних метрів жерсті піде на виготовлення ринви завдовжки 5 м і діаметром 20 см, якщо на шви додають 3 % її площі?



5. Для зменшення енерговитрат і збереження довкілля важливо зменшити втрати тепла під час транспортування гарячої води наземними і підземними тепломережами. В Україні стало можливими звести ці втрати до 1,5–2 % завдяки сучасним технологіям виробництва попередньо ізольованих труб. Для наземного монтажу використовують труби в ізоляції пінополіуретаном з оболонкою з оцинкованої сталі. Розрахуйте площу сталеві бляхи для оболонки труби довжиною 9 м, якщо діаметр труби 114 мм, товщина пінополіуретану — 43 мм і 150 мм з кожного боку труби не вкрито ізоляцією.

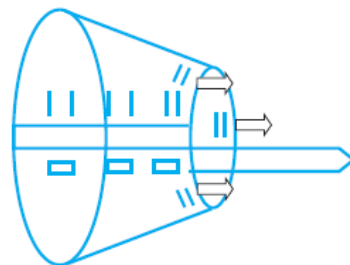


6. Відомо, що висота першої коробки дорівнює діаметру основи другої, а висота другої — діаметру основи першої. На виготовлення якої коробки (з кольоровим дном, але без кришки) буде витрачено більше декоративного матеріалу, якщо радіуси основ коробок відповідно дорівнюють 10 см і 20 см.



7. Скільки квадратних метрів тканини потрібно, щоб пошити конусоподібну палатку без дна заввишки 3 м і діаметром 4 м?

8. У ветеринарних аптеках продають готові захисні комірці для собак і кішок. Щоб зекономити кошти, ви можете виготовити такий комірць самостійно. Обчисліть площу поверхні такого комірця, якщо діаметр його меншого кола дорівнює 18 см, більшого — 36 см, а висота — 24 см.



9. Для фарбування круга радіуса 1 м потрібно 20 г фарби. Скільки такої фарби потрібно, щоб пофарбувати кулю діаметром 1 м?

10. Для фарбування кулі діаметром 2 дм потрібно 30 г фарби. Скільки фарби потрібно для фарбування кулі діаметром 6 дм?

11. Приміщення виставки має вигляд півкулі, площа сферичної поверхні якої — 392м^2 . Визначте діаметр підлоги.

12. У якому випадку витрачається більше матеріалу: на нікелювання однієї кулі діаметром 8 см чи на нікелювання 15 куль діаметром 2 см кожна?

13. На Маршаллових островах інколи випадають краплі дощу діаметром в 1 см. Знайдіть поверхню такої краплі, вважаючи, що вона має форму кулі.

14. Спортивна гра петанк полягає в тому, що, стоячи всередині кола (обомі ногами торкаючись землі), треба кинути порожнисті металеві кулі якомога ближче до маленької дерев'яної кулі — кошонета. Відомо, що діаметри цих куль мають відповідно розміри 30 мм і 75 мм. Установіть: а) у скільки разів поверхня металеві кулі більша за поверхню дерев'яної (кошонета); б) на скільки квадратних сантиметрів поверхня металеві кулі перевищує поверхню дерев'яної?



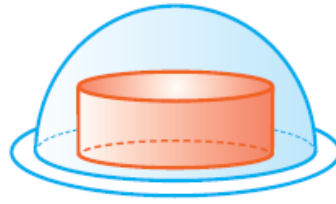
Радіус Землі — 6,4 тис. км. Який шлях проходять за добу внаслідок обертання Землі міста Одеса, Львів і Київ, широти яких становлять $46^{\circ}29'$, $49^{\circ}49'$ і $50^{\circ}27'$?

15. Радіус Землі дорівнює 6400 км. На яку висоту над горизонтом слід піднятися, щоб лінія горизонту проходила на відстані 100 км від спостерігача?

16. *Задача з несподіваною відповіддю.* Уявіть, що дві кулі — одна велика, як Земля, а друга, як м'яч, — по екваторах обтягнуті обручами. Якщо кожний із цих обручів подовжити на 1 м, вони відійдуть від поверхонь куль на деякі відстані. Де ця відстань буде більшою — у більшої чи меншої кулі?

17. (ЗНО, 2013). Для розігрівання в мікрохвильовій печі рідких страв використовують посудину у формі циліндра, радіус основи якого дорівнює 9 см. Посудина ставиться на горизонтальний диск у формі круга і накривається кришкою, що має форму півсфери (мал.). Радіус півсфери дорівнює 12 см і є

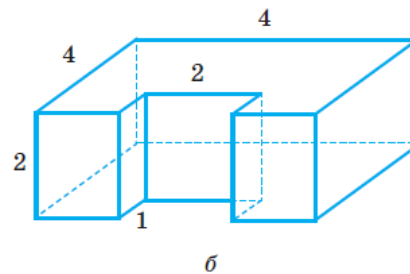
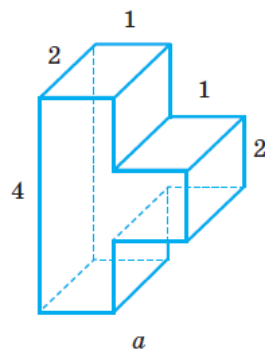
меншим за радіус круга. Укажіть найбільше з наведених значень, якому може дорівнювати висота посудини, якщо посудина не торкається кришки.



А	Б	В	Г	Д
3 см	5 см	6 см	7 см	8 см

13. Зі шматка пластиліну, який мав форму прямокутного паралелепіпеда розмірами 1 x 2 x 4, виліпили куб. Знайдіть довжину ребра цього куба.

14. Деталь складається з двох частин. Знайдіть об'єм кожної частини і загальний об'єм усієї деталі. Яку форму матиме деталь у складеному вигляді?



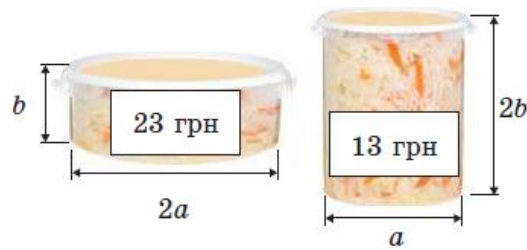
15. Три свинцеві куби з ребрами 1 см, 6 см і 8 см переплавили в один куб. Знайдіть довжину ребра утвореного куба.

16. На кожного учня класу має припадати не менш як 6 м^3 повітря. На скільки учнів розрахована класна кімната розмірами 10 x 6 x 3,5 м?

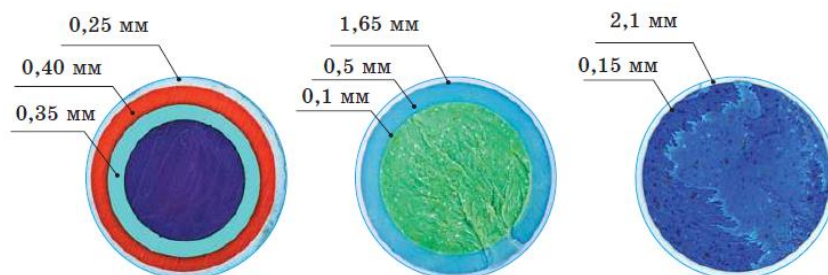
17. Кондитерський рулет має форму циліндра. Його довжина 18 см, а діаметр основи — 8 см. Калорійність усього рулету 960 ккал. Установіть, скільки калорій припадає на 1 см^3 рулету? Дізнайтеся, скільки часу потрібно бігати, щоб відпрацювати калорії двох шматочків такого рулету товщиною у 2 см.



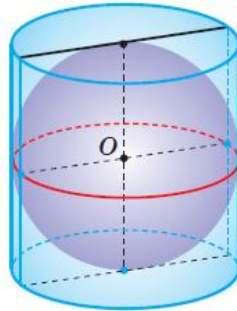
18. Переріз залізничного насипу має вигляд трапеції з основами 18 м і 8 м та висотою 3 м. Знайдіть об'єм 1 км такого насипу.
19. Довжини двох круглих колод рівні, а їх діаметри відносяться як 2 : 3. Як відносяться їх об'єми?
20. Нафта — екологічно небезпечна речовина. Потрапивши у ґрунт і воду, вона істотно впливає на всі життєві процеси, що проходять у них: розчинення і виділення кисню та вуглекислого газу, теплообмін та відбивну здатність морської води тощо. При потраплянні на водну поверхню, наприклад, 10 літрів нафти, формується пляма, що може розтікатися на площу до 500 м^2 , утворюючи суцільну нафтову плівку, що стає перешкодою для нормального газообміну у водному середовищі. Термін розкладання такого забруднення може досягати 10–12 років. Установіть, якою може бути товщина такої плівки.
21. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної 1 м^3 нафти, якщо товщина її плівки дорівнює 1 мм.
22. Цистерна для зберігання нафтопродуктів має форму циліндра, довжина якого 7 м, а діаметр 3 м. У цистерну вилили 100 барелей нафти. Скільки ще нафти можна залити в цю цистерну?
23. У циліндричну посудину, внутрішній діаметр якої 20 см, опущено деталь. Рівень рідини, яка була в посудині, піднявся на 12 см. Знайдіть об'єм деталі.
24. Зробіть правильний вибір. Обґрунтуйте, капусту у якій ємності вигідніше придбати.



25. Скільки квадратних метрів паперу в рулоні, висота якого — 85 см, а радіуси — 45 см і 2 см? Товщина паперу — 0,1 мм.
26. Знайдіть об'єм піраміди Хеопса, якщо площа її основи дорівнює 5,3 га, а висота — 147 м.
27. Свинцевий конус, висота якого дорівнює 18 см, переплавили в циліндр з такою самою основою. Знайдіть висоту циліндра.
28. Купа щебеню має форму конуса, твірна якого — 4 м. Знайдіть її об'єм, якщо кут природного укосу для щебеню — 30° .
29. Скільки кульок діаметра 0,6 см можна відлити зі шматка свинцю масою 1 кг? Густина свинцю — $11,4 \text{ кг/дм}^3$.
30. Діаметр одного кавуна вдвічі більший за діаметр другого. У скільки разів перший кавун важчий за другий?
31. Пересипаючи пісок з порожнистої півкулі радіуса r у конус, радіус і висота якого дорівнюють r , учень дійшов висновку, що об'єм півкулі у 2 рази більший за об'єм конуса. Чи відповідає результат цього експерименту теорії?
32. Гольф — це одна з небагатьох спортивних ігор, яка ґрунтується на принципах чесності. Змагання з гольфу пройшли на трьох літніх Олімпійських іграх — у 1900, 1904 і 2016 роках. Для гри в гольф використовують м'ячі складної конструкції діаметром 4,5 см. Знайдіть об'єм м'яча та кожної його частини для кожного з малюнків.



33. Зі свинцевої кулі радіуса 10 см зробили циліндричний диск завтовшки 3 см. Знайдіть діаметр диска.
34. Із циліндра, висота якого дорівнює діаметру, виточили кулю найбільшого об'єму. Скільки відсотків матеріалу сточено?
35. Маса порожнистої чавунної кулі — 1,57 кг, її зовнішній діаметр — 10 см. Знайдіть внутрішній діаметр, якщо густина чавуну $7,3 \text{ кг/дм}^3$.
36. Якою має бути загальна маса космічного апарата, що має форму кулі радіуса 1 м, щоб він не тонує у воді?
37. З краплини мильного розчину діаметра 6 мм хлопчик видув бульбашку діаметра 30 см. Знайдіть товщину плівки цієї бульбашки.
38. (ЗНО, 2008). У склянку циліндричної форми, наповнену водою по самі в'язця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок. Визначте відношення об'єму води, яка залишилася у склянці, до об'єму води, яка вилася зі склянки.

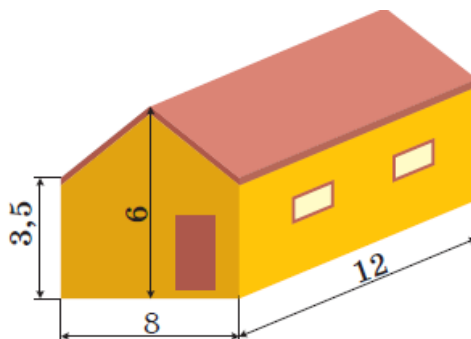


А	Б	В	Г	Д
1 : π	2 : π	1 : 2	2 : 3	1 : 3

39. Обчисліть об'єм циліндричної бляшанки, осьовим перерізом якої є квадрат зі стороною 12 см.
40. Переріз залізничного насипу має форму трапеції, нижня основа якої дорівнює 15 м, верхня основа — 8 м, а висота — 3,2 м. Скільки кубічних метрів землі знадобиться, щоб побудувати 1 км насипу?
41. Цех, у якому працюватимуть a робітників, має форму прямокутного паралелепіпеда. Щоби приміщення цеху відповідало санітарним нормам, на

кожного робітника цеху повинно припадати b м³ повітря. Якою має бути в цьому разі висота h цеху, якщо площа його підлоги становить S м²?

42. Знайдіть місткість сараю з двоскатним дахом, якщо довжина сараю дорівнює 12 м, ширина — 8 м, висота стін — 3,5 м, а висота гребеня даху — 6 м (товщиною стін знехтувати).

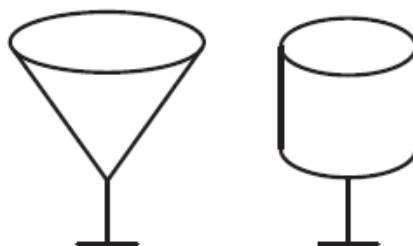


43. Куча щебінки має форму конуса, радіус основи якого 2,1 м, а твірна — 3,5 м. Скільки тонн становить маса щебінки, зібраної в цю кучу, якщо маса 1 м³ щебінки дорівнює 3 т? Відповідь округліть до одиниць.

44. Алюмінієвий дріт діаметром 10 мм має масу 16,3 кг. Густина алюмінію дорівнює 2600 кг/м³. Скільки метрів становить довжина дроту? Відповідь округліть до одиниць.

45. Свинцева труба, товщина стінки якої дорівнює 4 мм, має внутрішній діаметр 32 мм. Густина свинцю дорівнює 11 400 кг/м³. Скільки кілограмів становить маса труби, якщо її довжина дорівнює 15 м? Відповідь округліть до одиниць.

46. Із посудини, що має форму конуса з висотою 8 см і діаметром основи 12 см, наповненої до країв водою, перелили воду в посудину, що має форму циліндра.



47. Діаметр основи циліндра дорівнює 8 см. Якою має бути найменша висота циліндричної посудини, щоб вода з неї не вилілася?

48. Стіг сіна має форму циліндра з конічною верхівкою. Радіус його основи дорівнює 2,5 м, висота всього стогу — 4 м, а висота його циліндричної частини — 2,2 м. Густина сіна дорівнює 30 кг/м^3 . Скільки тонн становить маса стогу? Відповідь округліть до десятих.

49. Металеву кулю радіуса 15 см розплавляли та з отриманого металу відлили кілька куль, радіуси яких дорівнюють 3 см. Скільки відлили таких куль? Втратами металу під час переплавки знехтувати.

50. Три металеві кулі, радіуси яких дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см, розплавляли та з отриманого металу відлили одну кулю. Який радіус отриманої кулі? Втратами металу під час переплавки знехтувати.

Таблиця 5.

Анкета 1

1. Чи вважаєте ви потрібним знайомити учнів з сучасними підходами та методами математичного моделювання?

однозначно ні	7	1,4 %
скоріше ні ніж так	14	2,8 %
скоріше так ніж ні	236	47,2 %
однозначно так	243	48,6 %

2. Чи вважаєте ви необхідність у вдосконаленні вмінь математичного моделювання в учнів?

однозначно ні	5	1, %
скоріше ні ніж так	11	2,2 %
скоріше так ніж ні	224	44,8 %
однозначно так	260	52 %

3. Чи достатньою на вашу думку є кількість прикладних задач в шкільних підручниках?

однозначно ні	203	40,6 %
скоріше ні ніж так	251	50,2 %
скоріше так ніж ні	40	8 %
однозначно так	6	1,2 %

4. Чи потрібно урізноманітнювати системи прикладних задач відповідно до сучасних вимог, враховуючи профілі навчання?

однозначно ні	7	1,4 %
скоріше ні ніж так	8	1,6 %
скоріше так ніж ні	161	32,2 %
однозначно так	324	64,8 %

5. Чи згодні ви з тим, що для якісного оволодіння знаннями, методами, прийомами і вміннями математичного моделювання учнями є наявність високоосвічених вчителів математики?

однозначно ні	10	2, %
---------------	----	------

скоріше ні ніж так	54	10,8 %
скоріше так ніж ні	195	39 %
однозначно так	241	48,2 %

6. Чи вважаєте ви, що проблема формування вмінь математичного моделювання в учнів достатньо висвітлена в навчально-методичній літературі?

однозначно ні	91	18,2 %
скоріше ні ніж так	297	59,4 %
скоріше так ніж ні	96	19,2 %
однозначно так	16	3,2 %

Таблиця 6.

Анкета 2

показники	місце	чол	%	Всього чол, обрали цей показник
здатність працювати з інформацією (оперувати текстовою та числовою інформацією)	5	108	25,6	422
здатність аналізувати життєві ситуації	1	108	25,8	419
здатність аналізувати поставлене завдання, скласти алгоритм розв'язання завдання, або використовувати вже відомий	3	102	22,7	449
здатність встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо)	3	104	26	400
здатність розв'язувати математичні задачі побутового, практичного та прикладного спрямування	5	143	33	433
здатність скласти математичні задачі побутового, практичного та прикладного спрямування	3	97	26,6	364
здатність бачити у навколишній дійсності (побуті, природі, виробництві, техніці) прояви математичних законів, а також пояснити їх з точки зору математичних теорій	3	100	23,5	426
здатність будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ	4	104	26,9	387
здатність інтерпретувати, оцінювати та прогнозувати результати в контексті навчальних та практичних задач	3	100	26,2	381
здатність використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях	5	119	28,3	420

Таблиця 7.

Анкета 3

1. Я маю необхідність у відповідній навчально-методичній літературі по формуванню умінь математичного моделювання в учнів:

Так	198	39,6 %
Скоріше так	192	38,4 %
Вагаюся	58	11,6 %
Скоріше ні	34	6,8 %
Ні	18	3,6 %

2. Корисною була б система прикладних задач

Так	396	79,2 %
Скоріше так	90	18, %
Вагаюся	11	2,2 %
Скоріше ні	2	0,4 %
Ні	1	0,2 %

3. Я відчуваю необхідність у методиці розв'язування задач на основі математичного моделювання

Так	164	32,8 %
Скоріше так	168	33,6 %
Вагаюся	61	12,2 %
Скоріше ні	81	16,2 %
Ні	26	5,2 %

4. Доречними б були орієнтовані конспекти уроків по математичному моделюванню

Так	292	58,4 %
Скоріше так	154	30,8 %
Вагаюся	28	5,6 %
Скоріше ні	16	3,2 %
Ні	10	2 %

5. Корисним був би діагностичний інструментарій сформованості умінь математичного моделювання

Так	287	57,4 %
Скоріше так	165	33 %
Вагаюся	38	7,6 %

Скоріше ні	4	0,8 %
Ні	6	1,2 %

- 6. Цікаво було б познайомитися з публікаціями різних авторів, щодо формування умінь математичного моделювання**

Так	353	70,6 %
Скоріше так	125	25 %
Вагаюся	17	3,4 %
Скоріше ні	4	0,8 %
Ні	1	0,2 %

- 7. Хотілося б мати такий посібник в друкованому/електронному варіанті (потрібне підкреслити)**

Друкований варіант	158	58,6 %
Електронний варіант	206	68,3 %
Друкований та Електронний	134	

ВІДГУКИ

Відгук 1

НА ПОСІБНИК «МЕТОДИЧНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ ФОРМУВАННЯ ЗДАТНОСТІ УЧНІВ ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ»

Концепція шкільної математичної освіти орієнтована на перехід від знаннево освітньої парадигми до компетентнісної, що передбачає формування в учнів умінь та навичок, потрібних для успішної самореалізації в суспільстві; розвиток наукового світогляду та вміння застосувати отримані знання у практичній діяльності. Важлива роль для цього має відводиться ознайомленню у загальноосвітніх навчальних закладах з методом математичного моделювання. У даному посібнику подано методичний інструментарій формування в учнів вмінь математичного моделювання у процесі навчання математики.

Одним із основних завдань сучасної освіти є формування практично компетентної особистості. Тому пошук нових можливостей підсилення прикладної спрямованості шкільного курсу математики, засобів формування навичок математичного моделювання є перспективним напрямком досліджень у сфері теорії і методики навчання математики. Питання шкільної математичної освіти та проблеми формування математичних компетентностей учнів, що розглядаються у даному посібнику, є актуальним для вчителів математички та науковців.

Посібник складається з передмови, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі проаналізовано теоретичні аспекти формування здатності учнів до математичного моделювання, а саме: визначено місце математичного моделювання у системі компетентностей учнів та шкільній природничо-математичній освіті відповідно до навчальних програм з математики; обґрунтовано необхідність навчання математичному моделюванню на основі праць М.О. Філімонова, Г.М. Черкасової, В.В. Волошиної, С.У. Гончаренка та інших.

У другому розділі описано методичну основу формування в учнів умінь математичного моделювання: охарактеризовано основні етапи формування в учнів математичного моделювання, орієнтовно визначено мету завдання та очікувані результати кожного етапу; систематизовано прикладні задачі для формування умінь математичного моделювання; розглянуто методичні аспекти розв'язання задач, складанням математичних моделей; подано конспекти уроків математики середньої та старшої школи як орієнтовні зразки для вчителів, особливо вчителів-початківців, описано можливості використання математичних моделей в процесі розв'язання прикладних задач для формування цілісної системи знань учнів та усвідомлення їх значимості. У цьому розділі посібника також описано методику організації самостійної та проектної діяльності учнів з метою формування у них умінь математичного моделювання та подано діагностичний інструментарій визначення їх сформованості.

У третьому розділі роботи зібрано публікації для вчителів математики та власні публікації автора посібника щодо формування умінь математичного моделювання в учнів. Подані публікації систематизовано відповідно до розділів чинної програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, що може бути корисним для учителів під час підготовки та проведення уроків узагальнення, презентаційних уроків та організації самостійної роботи учнів.

Запропоновані у посібнику задачі органічно вписуються в курс алгебри та геометрії основної школи і є ефективним засобом показу прикладного спрямування шкільного курсу математики. Вміння і навички математичного моделювання, що формуються в учнів у процесі роботи над такими задачами, широко ілюструють можливості застосування математичних понять, теорем, правил, алгоритмів, у побуті, в суміжних навчальних дисциплінах. Зібрана добірка задач дозволяє доповнити матеріал окремих тем, поданий у шкільному підручнику з математики, здійснювати диференціацію навчального процесу, розвивати вміння учнів аналізувати

нестандартні умови задач, формувати стійке особистісне ставлення до навчання математики. До більшості запропонованих задач подано методичних коментар щодо складання раціональної математичної моделі та вказівки до її розв'язання.

Теоретичні та методичні аспекти формування здатності учнів до математичного моделювання, розглянуті у посібнику, можуть бути використані учителями-практиками під час підготовки та проведення уроків математики, вдосконалення професійної підготовки як майбутніх вчителів математики, так і фахівців з інших навчальних предметів.

Посібник написано на високому науково-методичному рівні, відрізняється оригінальністю викладу теоретичного матеріалу, відповідає стандартам наукової літератури.

Ольга Коломієць,
вчитель математики загальноосвітньої
школи І-ІІІ ступенів № 1 м. Калинівка
Вінницької області

Відгук 2

на посібник для вчителя О.І. Матяш та Г.Д. Катеринюк «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання»

У даному посібнику автори розглядають актуальну тему сучасної математики. Це цілком доречно у світлі нових тенденцій реформи освіти, адже уміння і здатність учнів створювати математичні моделі дає міцне підґрунтя професійному становленню особистості.

Посібник складається з передмови та трьох ємних розділів. Робота вирізняється значним фактичним матеріалом, оригінальним підходом до аналізу та вирішення поставлених завдань, високою інформативністю.

Дуже вдало автори в I розділі розкрили теоретичні аспекти теми, найбільш корисним (особливо для молодих вчителів) є П.1.3 – «Методи, прийоми і засоби формування здатності учнів до математичного моделювання».

У II розділі детально досліджено методична система формування в учнів умінь математичного моделювання. Особливо похвали заслуговує добірка прикладних задач та розгорнуті орієнтовні конспекти уроків. Належну увагу автори приділили і проектній діяльності. Думки сформульовані чітко і переконливо. Єдине, чого мені не вистачило – це авторських розв'язків задач з П.2.2., але зазначені недоліки не впливають на цілком позитивні враження від посібника.

На мою думку, III розділ стане довідником для будь-якого вчителя математики з питання формування вмінь математичного моделювання.

Висновки авторів достовірні й результативні. Вони ґрунтуються на аналізі значного фактичного матеріалу.

Загалом, це цікава й корисна робота і відповідає всім вимогам. Таким чином, розглянуте дослідження заслуговує високої оцінки.

Кривоконь Ольга Анатоліївна

Вчитель математики-інформатики вищої категорії Зеленодольської ЗШ І-ІІІ ступенів №1 Апостолівського району, Дніпропетровської обл.

Відгук 3

на навчальний посібник

«Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання»

авторів доктора п.н., професора університету, завідувача кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету ім. Михайла Коцюбинського Матяш О.І.,

викладача математики КЗ ВО «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж», аспіранта кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету ім. Михайла Коцюбинського Катеринюк Г.Д..

Навчальний посібник націлений на обґрунтування методичного інструментарію формування в учнів умінь математичного моделювання у процесі навчання математики.

Посібник складається з трьох розділів. У першому увагу зосереджено на теоретичних аспектах формування здатності учнів до математичного моделювання: розглянуто місце і роль умінь математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів (причому робиться акцент на розробки саме українських учених); авторами проаналізовані сучасні навчальні програми з математики, починаючи з програм початкової школи, з врахуванням психолого-педагогічних основ формування умінь математичного моделювання в учнів. Також виокремлено п'ять вимог до систем задач на урок математики.

Розробниками посібника узагальнена й систематизована методична система формування в учнів умінь математичного моделювання. Питання, що розкривають планування основних етапів (етап пропедевтики, базової і профільної шкіл), розглянуті детально, з формулюванням мети, завдань та результатів навчання.

Як прикладні задачі для формування умінь математичного моделювання розглянуті їх різні типи: на знаходження найменших (найбільших) величин,

задачі геометричного, фізичного, виробничого, професійного, побутового, стохастичного змістів відповідно до програми навчальної дисципліни. Позитивним є те, що серед підібраних задач зазначені ті, які використовувались при проведенні ЗНО з математики різних років.

У посібнику визначені основні методичні аспекти розв'язування задач на основі математичного моделювання, що є вдалим, оскільки в учнів виникають складності у правильній побудові математичних моделей. Доцільною є запропонована послідовність дій під час розв'язування задач прикладного змісту та методичні коментарі до розв'язаних задач.

Оскільки посібник містить теоретичний матеріал, приклади, задачі для самостійного розв'язання, принципи та інструментарій побудови математичних моделей, методів їх розв'язування, доречними є і наведені розгорнуті конспекти уроків.

У цілому навчальний посібник спрямований на вивчення найтипівіших математичних моделей, методик їх побудови; опанування проектною діяльністю та використанням діагностичного інструментарію сформованості умінь математичного моделювання.

Досить велика увага приділена публікаціям, які призначені учителям математики щодо формування умінь математичного моделювання при вивченні окремих тем математики або змістових ліній.

Щодо оформлення матеріалів у навчальному посібнику, хотілось би спостерігати дотримання єдиного орфографічного режиму в кожному розділі (в окремих випадках після підзаголовків розділовий знак «крапка» присутній, в окремих – ні). Очевидно, результатом неуважності коректора, є відсутність подвоєння у слові «вивченні» у назвах пунктів 3.2. – 3.7.

Даний посібник розглянуто на засіданні міського методичного об'єднання учителів математики м. Козятина.

Відгук 4
на навчальний посібник Матяш О.І., Катеринюк Г.Д.
«Методичний інструментарій формування здатності учнів до
математичного моделювання»

Посібник складається з трьох розділів, у яких висвітлено теоретичні та практичні аспекти формування здатності учнів до математичного моделювання та систематизовано методичні публікації з цієї теми.

Перший розділ, присвячений теоретичним аспектам, а також методам, прийомам і засобам формування здатності учнів до математичного моделювання, безумовно, знадобиться науковцям та вчителям математики, що досліджують проблеми математичної освіти.

Як практикуючого учителя, мою увагу найбільше привернув другий розділ, що присвячений практичному застосуванню формування навичок в учнів розв'язувати прикладні задачі. Також у другому розділі запропонована велика добірка задач на знаходження найменших та найбільших значень величин, прикладні задачі геометричного, фізичного, стохастичного, виробничого, побутового змісту, що зручно згруповані за темами. Дуже корисними є приклади розширених конспектів уроків, що супроводжуються детальними методичними коментарями, рекомендованими домашніми завданнями та зразками самостійних і контрольних робіт. Завдання для самостійних робіт, запропонованих в цьому розділі, направлені на виявлення того, чи створена база для формування в учнів навичок розв'язувати задачі прикладного змісту, дають відповідь на питання: «Чи розуміють учні суть математичних задач?»

Наведені у збірнику самостійні роботи були успішно апробовані з учнями 11 (фізико-математичного) класу для більш якісної підготовки їх до зовнішнього незалежного оцінювання. Також у другому розділі детально описаний метод проектів і, що найважливіше, наведені детальні приклади використання проектів у курсі вивчення математики.

Велику практичну цінність має також і третій розділ даного посібника, присвячений систематизації публікацій для подальшого детального вивчення матеріалів з даної теми.

У цілому навчально-методичний посібник відповідає завданням, які ставляться перед методикою формування здатності учнів до розв'язування прикладних математичних задач. Посібник стане в нагоді при підготовці до навчальних занять не лише молодим учителям, а навіть і досить досвідченим. Книга є достойною науково-методичною розробкою, що відповідає сучасним вимогам системи математичної освіти.

Учитель математики Тиврівського ліцею-
інтернату поглибленої підготовки в галузі
науки, учитель-методист

Сидорук В.А.

Відгук 5

на навчальний посібник «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання»

Представлений посібник містить інструментарій формування вмінь математичного моделювання в учнів. Тематика першого розділу посібника вміщує теоретичні аспекти формування здатності учнів до математичного моделювання. Також у першому розділі представлено методи, прийоми і засоби формування здатності учнів до математичного моделювання. Виокремлено вимоги до системи задач, наведено приклад сконструйованої конкретної системи задач, що сприяє формуванню здатності учнів до математичного моделювання.

Другий розділ посібника містить систему прикладних задач для формування в учнів умінь математичного моделювання, а також методичні аспекти розв'язування задач. Тут є необхідні поради для вчителів щодо формування для формування в учнів умінь математичного моделювання, проведення цікавих уроків. Описи технологій і рекомендації доступні для використання, так що ними може вміло скористатися не лише досвідчений вчитель, а й педагог-початківець.

Крім того, другий розділ посібника вміщує орієнтовані конспекти уроки, які є прикладом проведення занять для формування в учнів умінь математичного моделювання. Крім того, у кожному розробленому уроці представлено методичний коментар, який допомагає краще зрозуміти задумку авторів. Надзвичайно корисним є діагностичний інструментарій сформованості умінь математичного моделювання. Різного рівня завдання дають змогу якісно визначити рівень засвоєння знань учнів.

Не менш важливим та цікавим є третій розділ, у якому зібрані публікації щодо формування умінь математичного моделювання.

В цілому посібник містить цікавий, корисний матеріал, який вартий для використання вчителями у процесі вивчення математики.

Бачинський Степан Ярославович – вчитель математики Фахового коледжу економіки, права та інформаційних технологій Тернопільського національного економічного університету

Відгук 6

Відгук на посібник Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання»

Посібник є великою цінністю для вчителя математики. Адже, коли перед учителем постає завдання підібрати задачі певного типу і по певній темі, коли потрібно знайти методичні рекомендації щодо формування умінь в учнів математичного моделювання, коли є необхідність ознайомитися із публікаціями щодо математичного моделювання, то саме ця книга прийде на допомогу.

Спершу подано теоретичні основи формування в учнів здатності до математичного моделювання, висвітлено яке значення відводиться саме це уміння, розглянуто думки вітчизняних вчених щодо методу математичного моделювання як методу навчального пізнання навколишнього середовища, з'ясовано основні функції даного методу та обґрунтовано необхідність формування умінь та навичок методів математичного моделювання у викладанні різних профільних дисциплін, оцінено яке місце і яка роль математичного моделювання визначені в сучасних навчальних програмах з математики. Все це вкотре переконує у необхідності реалізовувати даний метод на уроках математики. Матеріал подано доступно та з виділенням головної думки, що сприяє приверненню уваги до певних важливих моментів. Дуже сподобалися подача матеріалу у вигляді маркованих списків, все по-етапно, з певною структурою.

Надзвичайно цінна в посібнику система прикладних задач для формування умінь математичного моделювання, які поділені на розділи за темами задач. Це значно полегшує роботу вчителя у підготовці до уроку. Причому, що є задачі, підібрані із ЗНО. Єдине, що, можливо, я б ще хотіла побачити у цьому розділі, вказівку на клас або вікову категорію учнів, з якими автори радять розглядати конкретну задачу. Дуже доцільно подані методичні рекомендації до розв'язування задач із математичним моделюванням. Показано основні труднощі, з яким зустрічаються учні при розв'язування таких задач та приклади розв'язання таких типових задач із схемами та таблиця для кращого сприйняття матеріалу та із методичним коментарем для учителя, який допомагає правильно розставити акценти при подачі цієї задачі учням.

Окрім того у посібнику подані орієнтовані конспекти уроків. Виділено на що саме потрібно звернути більше уваги, підібрано дуже гарні задачі прикладного змісту з ілюстраціями, чимало задач, що показують міжпредметний зв'язок, картки, самостійні роботи, математичні диктанти, інтерактивні вправи, продумано форми виконання завдань та методичний коментар до кожного уроку. Вчитель має змогу опиратися у підготовці до уроків на конспекти, що значно полегшує його роботу.

Часто вчителі мало уваги приділяють позакласній роботі з предмету. У посібнику показано для вчителя як можна організувати самостійну пізнавальну діяльність учнів з метою формування в них математичного моделювання на прикладі проектної діяльності. Описано переваги та особливості методу проектів та подано рекомендації для вчителя як зацікавити учнів. Та показано цікавий приклад реалізації даного методу, представлена гарна добірка задач, створена учнями. Показано приклад створення контрольних та самостійних робіт з методичними рекомендаціями щодо їх розв'язування.

Чимало літератури було опрацьовано авторами, щоб підібрати такий ґрунтовний список публікацій для вчителів щодо формування умінь математичного моделювання в учнів, які поділено за темами та розділами математики та представлено перелік авторських робіт з даних тем.

Посібник «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання» стане помічником кожного учителя та навчить чомусь новому або допоможе вдосконалити свої вміння.

Хочу подякувати авторам за такий хороший та корисний посібник. Бажаю натхнення для написання нових чудових книжок. Я впевнена, що моя бібліотека вчителя вже досить скоро поповниться черговим посібником під вашою редакцією.

Вчитель математики
фізико-математичної гімназії №17

Мельничук В.М.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації**

Статті у наукових фахових виданнях України

1. Катеринюк Г.Д. Педагогічні умови формування та розвитку здатності до математичного моделювання. «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». К.: Гнозис, 2016. С. 239-246
2. Катеринюк Г.Д. Розвиток математичних компетентностей учнів у процесі формування здатності до математичного моделювання *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 47/ редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016. С. 63-67
3. Катеринюк Г. Д. Аналіз програм з математики щодо місця і ролі математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 49 / редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2017. 186с. С.25-28
4. Катеринюк Г. Д. Психолого-педагогічні аспекти формування умінь математичного моделювання в учнів старої школи. *Фізико-математична освіта*. Суми, 2018. Випуск 1(15). С. 52-56
5. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Формування здатності учнів до математичного моделювання в умовах позакласної роботи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 52 / редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2018. 465 с. С.93-97

Статті в зарубіжних наукових періодичних виданнях

6. Михайленко Л. Ф., Катеринюк Г. Д. Развитие рефлексии учащихся в процессе формирования умений математического моделирования. *Evaluarea in sistemul educational: deziderate actuale*. Materialele conferinta stiintifica Internationala. 9-10 noiembrie 2017, Chisinau. P.215-218
7. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Методические особенности системы задач для развития умений математического моделирования в учащихся профильной школы. *Curriculumul școlar: provocări și oportunități de dezvoltare*. Materialele conferinței științifice Internaționale. 7–8 decembrie 2018, Chișinău P. 84-89
8. Катеринюк Г. Д. Место и значение методики решения задачи для формирования умений математического моделирования при обучении учащихся. *Science and Education a New Dimension*. Pedagogy and Psychology, VIII (90), Issue: 222, 2020 Feb. P. 15-19

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

9. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2019. 270 с.
10. Катеринюк Г. Д. Використання персонального web-сайту вчителя для формування умінь математичного моделювання. Збірник тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції з міжнародною участю «Сучасні інформаційні технології та інновації методики навчання: досвід, тенденції, перспективи», 9-10 листопада, 2017 р. Тернопіль: ФОП Осадца Ю. В. 2017. №1. С.91-94
11. Катеринюк Г. Д. Здатність до математичного моделювання як ознака математичної компетентності учнів. *Моделювання у навчальному процесі: матеріали Всеукр. наук.-практ. Інтернет-конф. (03-04 березня 2017 р.)* / укладач Н.А. Головіна Луцьк: Вежа-Друк, 2017. С. 70-73

12. Катеринюк Г. Д. Місце і роль математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи». Одеса, 15-16 вересня 2016. С. 82-84
13. Катеринюк Г. Д. Необхідність вдосконалення умінь математичного моделювання. Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя», 15-16 травня, 2017 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. Краматорськ : ДДМА, 2017. С. 232-234
14. Катеринюк Г. Д. Критерії та показники сформованості здатності до математичного моделювання в учнів профільної школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. наук. праць з матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., 30 травня – 1 червня 2018 р. Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. 334 с. С. 263-264
15. Катеринюк Г. Д. Методичні аспекти формування умінь математичного моделювання в учнів гуманітаріїв. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами II Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 18 жовтня 2018 р. Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2018. 221с. С. 89-92
16. Катеринюк Г. Д. Порівняльний аналіз шкільних навчальних програм щодо завдання формування в учнів умінь математичного моделювання. *Сучасна освіта в контексті нової української школи*: зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11-12 жовтня 2018 р. М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області [та ін.]. Чернівці, 2018. 276 с. С. 48-52

**Наукові праці, які додатково відображають наукові результати
дисертації**

17. Катеринюк Г. Д. Актуальні проблеми формування математичних компетентностей учнів. Матеріали IV Всеукраїнської конференції молодих учених і студентів «Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень». Вінниця, 21-22 листопада 2016. С. 229-231
18. Катеринюк Г. Д. Реалізація прикладної спрямованості навчання математики в спортивно-гуманітарному ліцеї. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики», 11-13 травня 2017 р., Київ: М. П. Драгоманова, 2017. С. 51-52
19. Катеринюк Г. Д. Система задач з математики прикладної спрямованості для учнів спортивно-гуманітарного профілю. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами I Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця, 2017. С. 150-153
20. Катеринюк Г. Д. Теоретичні аспекти формування умінь учнів у процесі навчання математики. *Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень*: зб. наук. пр. Вип. 7 (10) / редкол.: Р.С. Гуревич (голова) [та ін.] Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2017. С.243-245

**ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ
ДИСЕРТАЦІЙНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ**

Міжнародні конференції:

1. ІХ-а міжнародна науково-практична конференція «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору» м. Київ (24-26 листопада 2016 року).
2. Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» м. Київ (11-13 травня 2017 року).
3. Международная научная конференция «Оценивание в системе образования: текущие цели» Молдова (9-10 ноября 2017 года).
4. XIV Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми» м. Вінниця (15-17 травня 2018 року).
5. Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики» м. Вінниця (30 травня – 1 червня 2018 року).
6. Conferinței științifice Internaționale «Curriculumul școlar: provocări și oportunități de dezvoltare» Chișinău (7-8 decembrie 2018).
7. Scientific and Professional Conference: «Actual Problems of Science and Education, APSE – 2020» Held in Budapest on 2nd of February 2020.
8. Міжнародна науково-практична конференція: «Актуальні проблеми неперервної освіти в інформаційному суспільстві» м. Київ (29-30 травня 2020 року).
9. Міжнародна онлайн-конференція T4 conference for teachers «Освіта після COVID-19» (30 травня 2020 року).

Всеукраїнські конференції:

10. Всеукраїнська науково-практична конференція «Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи» м. Одеса (15-16 вересня 2016 року).
11. IV Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених та студентів «Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень» м. Вінниця (21-22 листопада 2016 року).
12. Всеукраїнська науково-практична Інтернет-конференція «Моделювання у навчальному процесі» м. Луцьк (02-04 березня 2017 року).
13. I Всеукраїнська дистанційна науково-практична конференція «Методичний пошук вчителя математики» м. Вінниця (16 березня 2017 року).
14. Дистанційна Всеукраїнська наукова конференція «Математика у технічному університеті XXI сторіччя» м. Краматорськ (15-16 травня 2017 року).
15. Всеукраїнська науково-практична Інтернет-конференція з міжнародною участю «Сучасні інформаційні технології та інновації методики навчання: досвід, тенденції, перспективи» м. Тернопіль (9-10 листопада 2017 року).
16. V Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених і студентів «Актуальні проблеми сучасної науки та наукових досліджень» м. Вінниця (21-22 листопада 2017 року).
17. Всеукраїнська науково-практична конференція з міжнародною участю «Сучасна освіта в контексті нової української школи» м. Чернівці (11-12 жовтня 2018 року).
18. II Всеукраїнська дистанційна науково-практична конференція «Методичний пошук вчителя математики» м. Вінниця (18 жовтня 2018 р.);

19. Всеукраїнський педагогічний онлайн-марафон «Навчальна діяльність старшокласників за сучасних умов: організація, мотивація, результат м. Харків (8 квітня 2019 року).
20. III Всеукраїнська науково-практична конференція «Методичний пошук вчителя математики» м. Вінниця (25 квітня 2019 року).
21. Всеукраїнська науково-практична онлайн-конференція «Проектування індивідуальної освітньої траєкторії професійного розвитку педагога» м. Біла Церква (13 червня 2019 року).
22. Всеукраїнський педагогічний онлайн-марафон «Навчальна діяльність старшокласників за сучасних умов: організація, мотивація, результат м. Харків (8 квітня 2019 року).
23. Всеукраїнська науково-практична онлайн конференція «Ключові тенденції шкільної освіти 2019/2020» м. Харків (7 грудня 2019 року).
24. Антикризовий національний онлайн-EdCamp 2020: школа зараз і у «світі після» м. Харків (13-17 квітня 2020 року).
25. Всеукраїнська науково-практична онлайн конференція «Педагогічні інновації та інструменти. Техніки для особистого та психологічного розвитку» (25-26 червня 2020 року).

ДОВІДКИ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ



Міністерство освіти і науки України Тернопільський національний економічний університет Коледж економіки, права та інформаційних технологій	Ministry of education and science of Ukraine Ternopil National Economic University College of Economics, Law and Information Technologies
Україна, 46009, Тернопіль, майдан Перемоги, 3 тел. (0352) 475076	Ukraine, 46009, Ternopil, maidan Peremohy, 3 tel. (0352) 475076

№ 46

« 18 » 12 2019р.

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження

Катеринюк Галини Дмитрівни

**з теми: «Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи» в
практиці роботи**

Коледжу економіки, права та інформаційних технологій Тернопільського національного
економічного університету

Цією довідкою засвідчується, що результати дисертаційного дослідження Катеринюк Г. Д. на тему «Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи» апробовані на базі Фахового коледжу економіки, права та інформаційних технологій. У навчальному закладі використовувався авторський посібник Г. Д. Катеринюк «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання», в якому відображені методичні розробки, що пройшли апробацію. Зокрема, використання сконструйованої Г. Д. Катеринюк системи задач для уроку систематизації та узагальнення знань з теми «Площі поверхонь многогранників» посприяло покращенню умов формування здатності студентів до математичного моделювання. Викладачі, які долучилися до апробації матеріалів дисертації, схвалюють виокремлені Г. Д. Катеринюк вимоги до систем задач для формування в студентів умінь математичного моделювання. Констатовано також практичну методичну цінність системи прикладних задач, яка чітко впорядкована та розподілена на відповідні рубрики. Доцільними виявилися виокремлені Г. Д. Катеринюк методичні аспекти процесу розв'язування задач.

Особливого схвалення заслугоує, за результатами апробації, запропонований авторкою діагностичний інструментарій сформованості умінь математичного моделювання. Різного рівня завдання дають змогу методично виважено підходити до визначення рівнів сформованості умінь математичного моделювання в студентів.

Директор
Коледжу економіки,
права та інформаційних технологій
Тернопільського національного
економічного університету



Мартинюк В. Ф.
кандидат економічних наук,
доцент



**НЕМИРІВСЬКА МІСЬКА РАДА
КОМУНАЛЬНА УСТАНОВА «НЕМИРІВСЬКИЙ МІСЬКИЙ
ЦЕНТР ПО ОБСЛУГОВУВАННЮ ЗАКЛАДІВ ОСВІТИ»
НЕМИРІВСЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ ВІННИЦЬКОЇ ОБЛАСТІ
м.Немирів**

вул. Соборна, 26, м. Немирів, 22800

КОД ЄДРПОУ 41345614

27.12.2019 р. № 01-19/383

Кафедра математики ВДПІ

ДОВІДКА

**про впровадження результатів дисертаційного дослідження
Катеринюк Галини Дмитрівни з теми: «Формування умінь математичного
моделювання в учнів профільної школи» в школах
м. Немирива**

Цією довідкою засвідчується, що результати дисертаційного дослідження Катеринюк Г. Д. на тему «Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи» апробовані учителями Немирівського ОТГ на базі шкіл міста Немирива. Зокрема, апробовані методичні розробки Г. Д. Катеринюк, які відображені в авторському посібнику «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання».

Вчителями математики в процесі роботи використовувалися запропоновані Г. Д. Катеринюк авторські задачі, діагностичний інструментарій сформованості умінь математичного моделювання в учнів, добірка задач на знаходження найменших та найбільших значень величин, прикладні задачі геометричного, фізичного, стохастичного, виробничого, побутового змісту, що зручно згруповані за темами. Корисними виявилися приклади розширених конспектів уроків, що супроводжуються детальними методичними коментарями, рекомендованими домашніми завданнями та зразками самостійних і контрольних робіт. Практичну цінність має систематизація публікацій для детального вивчення матеріалів з даної теми, що було використано в процесі підготовки до педагогічного експерименту.

Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання, запропонований Г. Д. Катеринюк, стане в нагоді при підготовці до навчальних занять і учителям-початківцям, і досвідченим учителям математики.

За результатами апробації, на засіданні науково-методичної ради відділу освіти Немирівської міської ради 26 грудня 2019 року, було прийняте рішення вважати за доцільне використання посібника «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання» в практичній діяльності.

Таким чином, запропонована технологія формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи, є практично цінною і може використовуватися в школі з метою підвищення якості математичної освіти.

Директор комунальної установи :

В. П. Коваленко





Орган місцевого самоврядування
 Зеленодольська міська об'єднана територіальна громада
ЗЕЛЕНОДОЛЬСЬКА МІСЬКА РАДА
Зеленодольська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 1

вул. Спортивна, 3, м. Зеленодольськ, Апостолівський район,
 Дніпропетровська область, 53860, тел. (05655) 62-1-74 e-mail: school-1zelenodolsk@ukr.net

«25» лютого 2020р.

№ 37

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження
 Катеринюк Галини Дмитрівни з теми: «Формування умінь математичного
 моделювання в учнів профільної школи»

Видана в тому, що впродовж 2018-2020 н.р. на базі Зеленодольської ЗШ І-ІІІ ступенів №1 Апостолівського району Дніпропетровської області проводився педагогічний експеримент вчителями математики на основі методичних рекомендацій Г.Д. Катеринюк, відображених у розробленому автором посібнику «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання».

Корисними для вчителів були методичні вказівки з реалізації технології формування та розвитку умінь математичного моделювання в учнів. Широкого застосування набули авторські задачі Г. Д. Катеринюк, а також добірка прикладних задач та розгорнуті орієнтовні конспекти уроків, основна мета яких полягала в забезпеченні умов формування умінь математичного моделювання.

З метою діагностики та контролю сформованості умінь математичного моделювання в учнів ефективним вважаємо використання запропонованого Галиною Дмитрівною діагностичного інструментарію. Аналіз використання запропонованої технології показав, що в учнів зріс рівень сформованості вмінь математичного моделювання, загальний рівень математичної підготовки. Було відмічено підвищення інтересу до математики як навчального предмету.

Запропонована Г. Д. Катеринюк методика була впроваджена в навчальний процес нашої школи та може бути рекомендована для використання в інших навчальних закладах.

Директор
 Зеленодольської ЗШ І-ІІІ ступенів № 1



Т.П. Захарова

Т.П.Захарова



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКА ОБЛАСНА РАДА
Комунальний заклад вищої освіти
«Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж»
вул. Нагірна, 13, м. Вінниця, 21019,
тел. (0432) 55-68-99, тел. (0432) 55-68-92
e-mail: vgpk@ua.fm, vgpk_nav@ua.fm
Код ЄДРПОУ 05486450

MINISTRY OF EDUCATION AND
SCIENCE OF UKRAINE
VINNYTSIA REGIONAL COUNCIL
Communal Higher Education
Institution "Vinnytsia Humanities
Pedagogical College"
Nagirna St. 13, Vinnytsia, 21019,
Tel. (0432) 55-68-99, (0432) 55-68-92
e-mail: vgpk@ua.fm, vgpk_nav@ua.fm
USREOU 05486450

« 08 » квітня 2020 р. № 39/20-03-28-03

На № _____ від « ____ » _____ 20__ р.

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження
Катеринюк Галини Дмитрівни
з теми: «Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи»
в практиці роботи Обласного наукового ліцею-інтернату
Комунального закладу вищої освіти
«Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж»

Видана в тому, що впродовж 2016-2020 навчальних років на базі Обласного наукового ліцею-інтернату м. Вінниці проводилася апробація технології формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи. Зокрема, в 2018 було організоване під керівництвом Галини Дмитрівни Катеринюк виконання учнями навчально-дослідницького проекту на тему «Геометрія і футбол», який одержав перемогу (третє місце) на Всеукраїнській Конференції-Олімпіаді геометричної творчості імені В. А. Ясінського.

Як засвідчили результати педагогічного експерименту, ефективність технології навчання учнів математичному моделюванню підтверджено, вагомою є практична значущість розробленого навчально-діагностичного інструментарію. Розроблена та апробована авторська технологія формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи суттєво підвищила рівень готовності учнів до практичної діяльності та рівень інтелектуального розвитку учнів у процесі навчання математики.

Позитивні відгуки вчителів, учнів та їхніх батьків засвідчують високий рівень роботи Галини Дмитрівни як вчителя-дослідника. Вважаємо доцільним використовувати результати дослідження Г.Д. Катеринюк вчителями математики в педагогічній практиці української школи. Результати даного дисертаційного дослідження мають важливу педагогічну, зокрема методичну, цінність.

Директор коледжу



К. Ф. Войцехівський



**УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ ТА СПОРТУ
КОЗЯТИНСЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ ВІННИЦЬКОЇ ОБЛАСТІ
КОЗЯТИНСЬКИЙ МІСЬКИЙ МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ**
вул. Незалежності, 57, м. Козятин, Вінницька область, 22100
тел. 2-17-70, e-mail: osvita@komr.gov.ua

25.06.2020 р. №547

ДОВІДКА

**про впровадження результатів дисертаційного дослідження
Катеринюк Галини Дмитрівни з теми: «Формування умінь математичного
моделювання в учнів профільної школи» в школах м. Козятин**

На сучасному етапі розвитку шкільної математичної освіти проблема формування здатності учнів до математичного моделювання набула особливої гостроти.

Упродовж 2019-2020 н.р. на базі методичного кабінету управління освіти та спорту Козятинської міської ради учителі математики закладів загальної середньої освіти м. Козятин ознайомлені із результатами дисертаційного дослідження Г. Д. Катеринюк, які відображені в авторському посібнику «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання». Електронна та друкована версія вказаного посібника передана для впровадження в навчальний процес шкіл.

Вчителями математики використовувалися різні типи прикладних задач для формування умінь математичного моделювання, які представлені у посібнику, зокрема, авторські задачі Г. Д. Катеринюк. Корисними були методичні коментарі автора до задач, наведені розгорнуті конспекти уроків, діагностичний інструментарій сформованості умінь математичного моделювання в учнів. Цікавою та корисною є добірка публікацій, які призначені учителям математики, щодо формування умінь математичного моделювання при вивченні окремих тем шкільної математики або змістових ліній. Особливої уваги заслуговує запропонована Г. Д. Катеринюк організація самостійної пізнавальної діяльності учнів з метою формування в них умінь математичного моделювання та приклад організації проектної діяльності учнів при навчанні математики.

Матеріали дисертаційної роботи є актуальними, мають вагомое теоретичне і практичне значення у процесі формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи.

Довідка видана для пред'явлення за місцем захисту дисертації.

Директор міського
методичного кабінету

М. Ясінська



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
 НАВЧАЛЬНО-ВИХОВНИЙ КОМПЛЕКС
 ЗАГАЛЬНООСВІТНЯ ШКОЛА І-ІІ СТУПЕНІВ –
 ДОШКІЛЬНИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД СЕЛА ЧЕРНЯТИН
 КАЛІНІВСЬКОГО РАЙОНУ ВІННИЦЬКОЇ ОБЛАСТІ
 вул. Миру, 16-А, с.Чернятин, Калніівський район, Вінницька область, 22444,
 тел. (0432) 3-56-42, E-mail: chernyatun@ukr.net

ДОВІДКА
 про впровадження результатів дисертаційного дослідження
 Катеринок Галини Дмитрівни
 з теми: «Формування умінь математичного моделювання
 в учнів профільної школи»
 в практиці роботи НВК ЗОШ І-ІІ ступенів – ДНЗ
 с. Чернятин Калніівського району Вінницької області

Видана в тому, що впродовж 2019-2020 н.р. на базі НВК ЗОШ І-ІІ ступенів – ДНЗ с. Чернятин проводився педагогічний експеримент вчителями математики на основі методичних рекомендацій Г.Д. Катеринок, відображених у розробленому автором посібнику «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання».

Грунтовно розкриті теоретичні аспекти формування здатності учнів до математичного моделювання та запропонована Галиною Дмитрівною технологія формування в учнів умінь математичного моделювання були корисними для вчителів, які апробували матеріали дослідження.

Впровадження розробок і рекомендацій дисертаційного дослідження Г. Д. Катеринок дало змогу урізноманітнити прийоми навчання учнів школи, сприяло поглибленню знань учнів з математики. Позитивні результати експерименту засвідчили педагогічну ефективність пропонованого автором інструментарію формування в учнів умінь математичного моделювання.

Запропонована Г. Д. Катеринок технологія формування в учнів умінь математичного моделювання може бути рекомендована для використання в сучасній українській школі.

Довідка видана для пред'явлення за місцем захисту дисертації.

Директор
 НВК ЗОШ І-ІІ ступенів – ДНЗ
 с. Чернятин Калніівського району
 Вінницької області



В.С. Середюк



УКРАЇНА
УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ
ТИВРІВСЬКОЇ РАЙОННОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
ТИВРІВСЬКИЙ ЛІЦЕЙ-ІНТЕРНАТ ПОГЛИБЛЕНОЇ ПІДГОТОВКИ В ГАЛУЗІ НАУКИ
ТИВРІВСЬКИЙ РАЙОН ВІННИЦЬКА ОБЛАСТЬ
 вул. Тиверська, 14 смт. Тиврів Тиврівського району Вінницької області, 23300,
 тел. (04355) 2-22-48, факс (04355) 2-13-73, e-mail: tivrovlicey@ukr.net
 р/р 35419001002086 МФО 802015 в УКД у Вінницькій області ідентифікаційний код 26030754

30.06.2020 № 01-21/93

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження
Катеринюк Галини Дмитрівни з теми: «Формування умінь математичного моделювання в
учнів профільної школи»
в практиці роботи Тиврівського ліцею-інтернату
поглибленої підготовки в галузі науки

Цією довідкою засвідчується, що результати дисертаційного дослідження Катеринюк Г. Д. на тему «Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи» апробовані учителем-методистом математики Сидоруком Володимиром Анатолійовичем на базі Тиврівського ліцею-інтернату. Друковані матеріали, які засвідчують впровадження результатів дисертаційного дослідження наявні у навчальному закладі. Зокрема, апробовані методичні розробки Г. Д. Катеринюк, які відображені в авторському посібнику «Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання».

Використовувалася запропонована добірка задач на знаходження найменших та найбільших значень величин, прикладні задачі геометричного, фізичного, стохастичного, виробничого, побутового змісту, що зручно згруповані за темами. Корисними виявилися приклади розширених конспектів уроків, що супроводжуються детальними методичними коментарями, рекомендованими домашніми завданнями та зразками самостійних і контрольних робіт. Практичну цінність має систематизація публікацій для детального вивчення матеріалів з даної теми, що було використано в процесі підготовки до педагогічного експерименту.

Наведені у посібнику задачі прикладного змісту були успішно апробовані з учнями 11 (фізико-математичного) класу для більш якісної підготовки їх до ЗНО з математики. Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання, запропонований Г. Д. Катеринюк, стане в нагоді при підготовці до навчальних занять і учителям-початківцям, і досвідченим учителям математики. Таким чином, запропонована технологія формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи, є науково та практично цінною і може використовуватися в школі з метою підвищення якості математичної освіти.

Директор
 Тиврівського ліцею-інтернату поглибленої
 підготовки в галузі науки



Подзигун А.М.