УДК 517.97

С. М. Бак

IСНУВАННЯ ПЕРIОДИЧНИХ БIЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМI ФЕРМI-ПАСТИ-УЛАМА НА ДВОВИМIРНIЙ ГРАТЦI

S. M. Bak. *Existence of periodic travelling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D–lattice*, Mat. Stud. **37** (2012), 76–88.

It is considered the system of differential equations that describes the dynamics of an infinite system of atoms on 2D–lattice. Results on existence of the periodic travelling waves are obtained.

С. Н. Бак. *Существование периодических бегущих волн в системе Ферми-Пасты-Улама на двухмерной решетке* // Мат. Студiї. – 2012. – Т.37, №1. – С.76–88.

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая динамику бесконечной системы атомов на двухмерной решетке. Получен результат о существовании периодических бегущих волн.

1. Вступ. У цiй статтi дослiджуються рiвняння, що описують динамiку нескiнченної системи атомiв, розмiщених на плоскiй цiлочисловiй гратцi. Нехай $q_{n,m}(t)$ — координата (n,m)-го атому в момент часу t. Припускається, що кожний атом нелiнiйно взаємодiє з чотирма своїми найближчими сусiдами. Рiвняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,m} = U'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + \\ + U'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n,m-1}),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \end{aligned} \tag{1}$$

де U — потенцiал взаємодiї мiж сусiднiми атомами. Рiвняння (1) є нескiнченною системою звичайних диференцiальних рiвнянь.

Подiбнi системи є цiкавими з огляду на численнi застосування у фiзицi ([7], [10]–[12]). У статтях [1], [3], [13] та [14] дослiджувались бiжучi хвилi в системах лiнiйно зв'язаних нелiнiйних осциляторiв, розмiщених на двовимiрних гратках, у статтi [17] — перiодичнi розв'язки, а у статтi [2] — питання коректностi задачi Кошi для таких систем. Вiдмiтимо, що в статтi [12] вивчались бризери для нескiнченної системи Фермi-Пасти-Улама на двовимiрнiй гратцi, а у статтi [18] — перiодичнi розв'язки для системи Фермi-Пасти-Улама на гратцi розмiру $n \times m$. Огляд вiдомих результатiв про системи Фермi-Пасти-Улама на одновимiрнiй гратцi зроблено в [15].

У цiй статтi отримано умови iснування перiодичних бiжучих хвиль для нескiнченної системи Фермi-Пасти-Улама на двовимiрнiй гратцi. Дана робота узагальнює результати, отриманi в [15].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35Q51, 35Q55, 39A12.
Keywords: system of differential equation, periodic travelling waves, 2D–lattice.

2. Постановка задачі. Біжуча хвиля має вигляд

$$q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct)$$

і для її профілю $u(s)$, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} c^2 u''(s) = U'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) +\\ + U'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s-\sin\varphi)). \end{aligned} \tag{2}$$

Відмітимо, що функція $u = u(s)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається профілем хвилі. Стала $c \neq 0$ є сталою швидкістю хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля зміщується праворуч, а якщо $c < 0$, то ліворуч. Цікавими є нетривіальні хвилі з профілем, який тотожно не дорівнює нулю.

Зауважимо, що профіль періодичної біжучої хвилі задовольняє умову

$$u'(s + 2k) = u'(s), \;\; s \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Відмітимо, що у випадку, коли $\varphi \equiv 0, \pi/2 \pmod \pi$, хвиля поширюється вздовж відповідної координатної осі. Такі хвилі зводяться до хвиль на одновимірній гратці, що досліджені в [15]. Зазначимо, що в рівняння (2) швидкість c входить в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(t)$ задовольняє рівняння (2), то існують дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$. Одна з них рухається направо, інша — наліво.

Скрізь далі під розв'язком рівняння (2) розуміємо функцію $u(s)$ з класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (2) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

3. Варіаційне формулювання задачі. Позначимо через E_k гільбертів простір

$$E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R})\colon u'(s+2k) = u'(s), u(0) = 0\}$$

зі скалярним добутком $(u, v)_k = \displaystyle\int_{-k}^{k} u'(s)v'(s)ds$ і відповідною нормою $\|u\|_k = (u, u)^{\frac{1}{2}}$. Нагадаємо, що за теоремою вкладення $E_k \subset C([-k, k])$, де $C([-k, k])$ — простір неперервних функцій на $[-k, k]$. Через $\|\cdot\|_{k,*}$ позначимо норму на просторі E_k^*, який є спряженим (дуальним) до простору E_k.

Фактично, E_k є 1-ковимірним підпростором гільбертового простору

$$\widetilde{E}_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R})\colon u'(s+2k) = u'(s)\}$$

зі скалярним добутком $\displaystyle\int_{-k}^{k} u'(s)v'(s)ds + u(0)v(0)$.

На просторі $\widetilde{E}_k$ означимо оператори $\widetilde{E}_k \to \widetilde{E}_k$:

$$(Au)(s) := u(s+\cos\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau, \;\; (Bu)(s) := u(s+\sin\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau.$$

Тоді правильне таке твердження.

Лема 1. *Оператори A та $B\colon E_k \to L^2(-k,k) \cap L^\infty(-k,k)$ є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned} \|Au\|_{L^\infty(-k,k)} \leq |\cos\varphi| \|u\|_k, \|Au\|_{L^2(-k,k)} \leq |\cos\varphi| \|u\|_k,\\ \|Bu\|_{L^\infty(-k,k)} \leq |\sin\varphi| \|u\|_k, \|Bu\|_{L^2(-k,k)} \leq |\sin\varphi| \|u\|_k. \end{aligned}$$

Доведення. За нерівністю Шварца маємо

$$|Au(s)|^2 = \left| \int\limits_s^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau \right|^2 \le \left(\left(\int\limits_s^{s+\cos\varphi} |u'(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(\left(\int\limits_s^{s+\cos\varphi} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = |\cos\varphi| \|u\|_k^2.$$

Інтегруючи останню нерівність, отримуємо

$$\int\limits_{-k}^{k} |Au(s)|^2 ds \le |\cos\varphi| \int\limits_{-k}^{k} \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} |u'(\tau)|^2 d\tau ds = |\cos\varphi| \iint\limits_D |u'(t)|^2 d\tau ds,$$

де $D = \{(s,\tau)\colon -k \le s \le k, s \le \tau \le s + \cos\varphi\}$.

Змінюючи порядок інтегрування, неважко побачити, що подвійний інтеграл в правій частині збігається з інтегралом

$$|\cos\varphi| \iint\limits_{D_1} |u'(t)|^2 d\tau ds,$$

де $D_1 = \{(s,\tau)\colon -k+\cos\varphi \le \tau \le k+\cos\varphi, \tau-\cos\varphi \le s \le \tau\}$. Переходячи в останньому інтегралі до повторного і використовуючи періодичність $u'(\tau)$, отримуємо

$$\int\limits_{-k}^{k} |Au(s)|^2 ds \le |\cos\varphi| \int\limits_{-k+\cos\varphi}^{k+\cos\varphi} \int\limits_{\tau-\cos\varphi}^{\tau} |u'(\tau)|^2 d\tau ds =$$

$$= |\cos\varphi| \int\limits_{-k}^{k} \int\limits_{\tau-\cos\varphi}^{\tau} |u'(\tau)|^2 d\tau ds = \cos^2\varphi \int\limits_{-k}^{k} |u'(\tau)|^2 d\tau ds = \cos^2\varphi \|u\|_k^2.$$

Добуваючи корінь квадратний від обох частин нерівності, остаточно маємо

$$\|Au\|_{L^2(-k,k)} \le |\cos\varphi| \|u\|_k.$$

Всі інші нерівності доводяться подібно. □

Скрізь надалі передбачається, що потенціал $U(r)$ задовольняє умову:

(i) *функція $U(r)$ неперервно диференційовна, причому $U(0) = U'(0) = 0$.*

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) := \int\limits_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - U(Au(s)) - U(Bu(s)) \right\} ds.$$

Лема 2. *Нехай виконується умова (i), тоді J_k — функціонал з класу C^1 на E_k, а його похідна виражається формулою*

$$\langle J_k'(u), h \rangle = \int\limits_{-k}^{k} \{c^2 u'(s) h'(s) - U'(Au(s)) Ah(s) - U'(Bu(s)) Bh(s)\} ds \tag{4}$$

для $u, h \in E_k$.

Доведення. Подамо функціонал J_k у вигляді

$$J_k(u) = \frac{c^2}{2}(u,u)_k - \Phi_k(u),\ \ \Phi_k(u) := \int\limits_{-k}^{k} \{U(Au(s)) + U(Bu(s))\} ds.$$

Отже, достатньо розглянути тільки функціонал Φ_k, оскільки для квадратичної частини твердження очевидне.

Оскільки для будь-якого $u \in E_k$ функції Au і Bu неперервні, то $\Phi_k < \infty$. Безпосереднім обчисленням неважко показати, що похідна функціоналу Φ_k існує і обчислюється за формулою

$$\langle \Phi_k'(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} \{U'(Au(s))Ah(s) + U'(Bu(s))Bh(s)\} ds.$$

І, нарешті, перевіримо неперервність цієї похідної.

Нехай $\|h\|_k \le 1$ і $u_n \to u$ $(n \to +\infty)$ в E_k. Тоді $Au_n \to Au$ $(n \to +\infty)$ рівномірно на $[-k,k]$ і

$$\begin{gathered} |\langle \Phi_k'(u_n) - \Phi_k'(u), h\rangle| \le \\ \le \|Ah\|_{L^1} \cdot \|U'(Au_n) - U(Au)\|_{L^\infty} + \|Bh\|_{L^1} \cdot \|U'(Bu_n) - U(Bu)\|_{L^\infty} \le \\ \le (2k)^{1/2} [\|Ah\|_{L^1} \cdot \|U'(Au_n) - U(Au)\|_{L^\infty} + \|Bh\|_{L^1} \cdot \|U'(Bu_n) - U(Bu)\|_{L^\infty}] \le \\ \le (2k)^{1/2} [\|U'(Au_n) - U(Au)\|_{L^\infty} + \|U'(Bu_n) - U(Bu)\|_{L^\infty}], \end{gathered}$$

де всі L^p-норми беруться над відрізком $[-k,k]$. Оскільки $U'(Au_n) \to U'(Au)$ і $U'(Bu_n) \to U'(Bu)$ при $n \to +\infty$ рівномірно на $[-k,k]$, то лему доведено. □

Лема 3. *Критичні точки функціоналу J_k є C^2-розв'язками рівняння (2), що задовольняють умову (3).*

Доведення. Нехай $g(s)$ $2k$-періодична функція з класу C^∞. Тоді $h(s) = g(s) - g(0) \in E_k$. Якщо u є критичною точкою функціоналу J_k, то

$$\begin{gathered} 0 = \langle J_k'(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} \{c^2 u'(s)h'(s) - U'(Au(s))Ah(s) - U'(Bu(s))Bh(s)\} ds = \\ = \int\limits_{-k}^{k} \{c^2 u'(s)g'(s) - U'(u(s+\cos\varphi) - u(s))(g(s+\cos\varphi) - g(s)) - \\ - U'(u(s+\sin\varphi) - u(s))(g(s+\sin\varphi) - g(s))\} ds = \int\limits_{-k}^{k} \{c^2 u'(s)g'(s) - \\ -[U'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) - U'(u(s+\cos\varphi) - u(s))]g(s) - \\ -[U'(u(s) - u(s-\sin\varphi)) - U'(u(s+\sin\varphi) - u(s))]g(s)\} ds = \end{gathered}$$

$$= \int_{-k}^{k} \{-c^2u''(s)g(s) - [U'(u(s) - u(s - \cos\varphi)) - U'(u(s + \cos\varphi) - u(s))]g(s) -$$

$$-[U'(u(s) - u(s - \sin\varphi)) - U'(u(s + \sin\varphi) - u(s))]g(s)\}ds =$$

$$= \int_{-k}^{k} \{-c^2u''(s) + U'(u(s + \cos\varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \cos\varphi)) +$$

$$+U'(u(s + \sin\varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \sin\varphi))\}g(s)ds.$$

Це означає, що u задовольняє рівняння (2) в сенсі узагальнених функцій, тобто u — слабкий розв'язок рівняння (2). Оскільки $u(s)$ і $U'(r)$ неперервні функції, то права частина рівняння (2) є неперервною. Звідси отримуємо, що $u''(s)$ — неперервна, тобто $u \in C^2$ — розв'язок рівняння (2) у звичайному розумінні. □

4. Основні результати. Спочатку доведемо існування монотонних періодичних біжучих хвиль за таких умов:

(i') *$U(r) = \frac{c_0^2}{2} + V(r)$, де $c_0 \geq 0$, $V \in C^1(\mathbb{R})$, причому $V(0) = V'(0) = 0$ і $V'(r) = o(|r|)$ при $r \to 0$,*

і також

(ii^+) *існують $r_0 > 0$ і $\theta > 2$ такі, що $V(r_0) > 0$ і для $r \geq 0$*

$$0 \leq \theta V(r) \leq rV'(r),$$

або

(ii_-) *існують $r_0 < 0$ і $\theta > 2$ такі, що $V(r_0) > 0$ і для $r \leq 0$*

$$0 \leq \theta V(r) \leq rV'(r).$$

Зауважимо, що умову (ii^+) можна записати у вигляді диференціальної нерівності

$$r^{\theta+1}\frac{d}{dr}(r^{-\theta}V(r)) \geq 0,\ r > 0.$$

Безпосереднє інтегрування показує, що $V(r) \geq a_0r^\theta$, для $r > r_0$ з $a_0 = r_0^{-\theta}V(r_0)$. Разом з умовою ($i'$) це означає, що

$$V(r) \geq a_1(r^\theta - r^2),\ r \geq 0. \tag{5}$$

Аналогічно у випадку умови (ii_-) остання нерівність виконується для $r \leq 0$.

Нас цікавлять $2k$-періодичні біжучі хвилі, які мають неспадний або незростаючий профіль.

Теорема 1. *Нехай виконується умова (i') і $k \geq 1$. Тоді*

(a) *за умови (ii^+) для будь-якого $c > c_0$ існує нетривіальна неспадна $2k$-періодична біжуча хвиля $u_k \in E_k$, яка є розв'язком рівняння (2);*

(b) *за (ii^-) для будь-якого $c > c_0$ існує нетривіальна незростаюча $2k$-періодична біжуча хвиля $u_k \in E_k$, яка є розв'язком рівняння (2).*

Більше того, в обидвох випадках існують сталі $\delta > 0$ і $M > 0$, які не залежать від k такі, що критичне значення $J_k(u_k)$ задовольняє нерівності $0 < \delta \leq J_k(u_k) \leq M$.

Доведення цієї теореми грунтується на використанні теореми про гірський перевал. Сформулюємо теорему про гірський перевал у потрібному нам вигляді і перевіримо її умови для функціоналу J_k ([16], [19]).

Теорема 2 (про гірський перевал). *Нехай I — функціонал з класу C^1 на гільбертовому просторі H, який задовольняє умову Пале-Смейла:*

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $I'(u_n) \to 0$, $(n \to +\infty)$ і $I(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.

Нехай існують такі $e \in H$ і $r > 0$, що $\|e\| > r$ і

$$\beta := \inf_{\|v\|=r} I(v) > 0 = I(0) \geq I(e)\,.$$

І нехай

$$b := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) \colon \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. Тоді b — критичне значення функціоналу I, тобто існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I, що $I(u) = b$, причому $b \geq \beta$.

Далі нам ще знадобиться теорема, доведення якої можна знайти в статті [9].

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми про гірський перевал і $P \colon H \to H$ таке неперервне відображення, що $I(Pu) \leq I(u)$ для всіх $u \in H$, причому $P(0) = 0$ і $P(e) = e$. Тоді існує критична точка $u \in \overline{PH}$ (замикання PH) функціоналу I з критичним значенням $b = I(u)$.*

Покладемо

$$(Pu)(s) := \int\limits_0^s |u'(t)|dt.$$

Неважко перевірити, що P неперервно відображає простір E_k в себе і PE_k складається з неспадних функцій.

Оскільки ми шукаємо монотонні хвилі, то ми можемо припустити, що $V(r) \equiv 0$ для $r < 0$ у випадку (a) і $V(r) \equiv 0$ для $r > 0$ у випадку (b). (З таким же успіхом можна припустити, що в обидвох випадках $V(r)$ є парною функцією). Зокрема, це означає, що модифікований потенціал задовольняє нерівності $0 \leq \theta V(r) \leq rV'(r)$ для всіх $r \in \mathbb{R}$.

Надалі будемо розглядати тільки випадок (a), оскільки випадок (b) розглядається подібно.

Лема 4. *За умов теореми 1 існують $\delta > 0$ і $\varrho > 0$ такі, що $J_k(u) \geq \delta$ при $\|u\|_k = \varrho$. До того ж, існує $e_k \in PE_k$ таке, що $\|e_k\|_k > \varrho$ і $J_k(e_k) = J_1(e_1) \leq 0$.*

Доведення. Умова (i') означає, що для $\varepsilon > 0$ існує таке $\varrho > 0$, що $|V(r)| \le \varepsilon r^2$ при $|r| \le \varrho$. Якщо $\|u\|_k \le \varrho$, то за лемою 1 $\|Au\|_{L^\infty} \le |\cos\varphi|\varrho$, $\|Bu\|_{L^\infty} \le |\sin\varphi|\varrho$ і

$$J_k(u) \ge \int\limits_{-k}^{k} \Big\{ \frac{c^2}{2}|u'(s)|^2 - \frac{c_0^2}{2}|Au(s)|^2 - \varepsilon|Au(s)|^2 - \frac{c_0^2}{2}|Bu(s)|^2 - \varepsilon|Bu(s)|^2 \Big\} ds \ge$$

$$\ge \frac{c^2}{2}\|u\|_k^2 - \frac{c_0^2}{2}|\cos\varphi|^2\|u\|_k^2 - \varepsilon|\cos\varphi|^2\|u\|_k^2 - \frac{c_0^2}{2}|\sin\varphi|^2\|u\|_k^2 - \varepsilon|\sin\varphi|^2\|u\|_k^2 =$$

$$= \frac{c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon}{2}\|u\|_k^2.$$

Вибираючи ε достатньо малим, ми отримаємо перше твердження леми.

Для того, щоб побудувати функцію e_k, спочатку виберемо функцію $v \in PE_k$ таку, що $v(t) = 0$ при $0 \le t \le 1$, $v'(-1) = 0$ і $Av(t_0) > 0$, $Bv(t_0) > 0$ для деякого t_0. Зауважимо, що v' може бути відмінним від нуля тільки на інтервалі вигляду $(2l-1, 2l), l \in \mathbb{Z}$. Оскільки $Av \ge 0$ і $Bv \ge 0$, то за нерівністю (5) маємо

$$J_1(\tau v) \le \tau^2 \int\limits_{-1}^{1} \Big\{ \frac{c^2}{2}|v'(s)|^2 + (a_1 - \frac{c_0^2}{2})(|Av(s)|^2 + |Bv(s)|^2) \Big\} ds -$$

$$-\tau^\theta a_1 \int\limits_{-1}^{1} (|Av(s)|^\theta + |Bv(s)|^\theta) ds \le$$

$$\le \tau^2 \Big\{ \frac{c^2}{2}\|v(s)\|_1^2 + a_1(\|Av(s)\|_{L^2}^2 + \|Bv(s)\|_{L^2}^2) \Big\} - \tau^\theta a_1 \{ \|Av(s)\|_{L^\theta}^\theta + \|Bv(s)\|_{L^\theta}^\theta \}.$$

Оскільки $\theta > 2$, то $J_1(\tau v) \to -\infty$ при $\tau \to +\infty$. Отже, ми можемо зафіксувати $e_1 = \tau_0 v$, яке задовольняє умови $J_1(e_1) \le 0$ і $\|e_1\|_1 > \varrho$.

Означимо тепер $e_k \in E_k$ так: $e_k(s) = e_1(s)$ при $|s| \le 1$ і $e_k'(s) = 0$ при $1 \le s \le k$ (Продовжуючи e_k' на $\mathbb{R}$ завдяки $2k$-періодичності, ми означаємо e_k однозначно). Очевидно, що e_k' може бути відмінною від нуля тільки на інтервалах $(2kl - 1, 2kl), l \in \mathbb{Z}$. Звідси негайно слідує, що $\|e_k\|_k = \|e_1\|_1$. Більше того,

$$(Ae_k)(s) = e_k(s + \cos\varphi) - e_k(s) =$$

$$= \begin{cases} e_1(s + \cos\varphi) - e_1(s), & s \in [-1 - \cos\varphi, 1 - \cos\varphi], \\ 0, & s \in [-k, k] \setminus [-1 - \cos\varphi, 1 - \cos\varphi], \end{cases}$$

$$(Be_k)(s) = e_k(s + \sin\varphi) - e_k(s) =$$

$$= \begin{cases} e_1(s + \sin\varphi) - e_1(s), & s \in [-1 - \sin\varphi, 1 - \sin\varphi], \\ 0, & s \in [-k, k] \setminus [-1 - \sin\varphi, 1 - \sin\varphi]. \end{cases}$$

Отже,

$$\int\limits_{-k}^{k} V(Ae_k(s)) ds = \int\limits_{-1-\cos\varphi}^{1-\cos\varphi} V(Ae_k(s)) ds = \int\limits_{-1-\cos\varphi}^{1-\cos\varphi} V(e_1(s + \cos\varphi) - e_1(s)) ds =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} V(e_1(s) - e_1(s - \cos\varphi)) ds = \int\limits_{-1}^{1} V(Ae_1(s)) ds,$$

оскільки різниця $e_1(s+\cos\varphi) - e_1(s)$ 2-періодична. Аналогічно

$$\int_{-k}^{k} V(Be_k(s))ds = \int_{-1-\sin\varphi}^{1-\sin\varphi} V(Be_k(s))ds = \int_{-1}^{1} V(Be_1(s))ds.$$

Зокрема, ми отримуємо, що $J_k(e_k) = J_1(e_1) \leq 0$. □

Слід відмітити, що $J_k(te_k) = J_1(te_1)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Лема 5. *Нехай виконується умова* (i') *і* $c > c_0$. *Якщо потенціал* V *задовольняє нерівність* $\theta V(r) \leq rV'(r)$, $r \in \mathbb{R}$, *з* $\theta > 2$, *то функціонал* J_k *задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доведення. Нехай $u_n \in E_k$ послідовність Пале-Смейла рівня b (тобто b критичне значення функціоналу J_k). Тоді, для достатньо великого n, $\|J_k'(u_n)\|_{k,*} \leq 1$ і $|J_k(u_n)| \leq b+1$. Тому,

$$b + 1 + \frac{1}{\theta}\|u_n\|_k \geq J_k(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle J_k'(u_n), u_n\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \int_{-k}^{k} (c^2|u_n'(s)|^2 - c_0^2|Au_n(s)|^2 - c_0^2|Bu_n(s)|^2)ds +$$

$$+ \int_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\theta}(V'(Au_n)Au_n + V'(Bu_n)Bu_n) - V(Au_n) - V(Bu_n)\right] ds.$$

Відповідно до умови леми (нерівності для V) другий інтеграл невід'ємний і тому, за лемою 1, маємо

$$b + 1 + \frac{1}{\theta}\|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)(c^2 - c_0^2)\|u_n\|_k^2.$$

Отже, послідовність (u_n) є обмеженою у просторі E_k.

Обмеженість послідовності (u_n) означає, що переходячи до підпослідовності, $u_n \to u$ ($n \to +\infty$) слабко в E_k, а отже, $Au_n \to Au$ слабко в $\widetilde{E}_k$, і сильно в $L^2(-k;k)$ (за компактністю вкладення Соболєва).

Безпосередніми обчисленнями отримуємо, що

$$c^2\|u_n - u\|_k^2 = \int_{-k}^{k} c^2|u_n' - u'|^2 ds = \langle J_k'(u_n) - J_k'(u), u_n - u\rangle +$$

$$+ c_0^2\|Au_n - Au\|_{L^2}^2 + c_0^2\|Bu_n - Bu\|_{L^2}^2 + \int_{-k}^{k} (V'(Au_n(s)) - V'(Au(s)))(Au_n(s) - Au(s))ds +$$

$$+ \int_{-k}^{k} (V'(Bu_n(s)) - V'(Bu(s)))(Bu_n(s) - Bu(s))ds.$$

Очевидно, що всі доданки в правій частині збігаються до нуля. Перший через слабку збіжність, а наступні два згідно з сильною збіжністю в $L^2(-k;k)$. За лемою 1, (Au_n)

є обмеженою в $L^\infty(-k,k)$. А оскільки $Au_n \to Au$ сильно в $L^2(-k,k)$ при $n \to +\infty$, то останні два інтеграли також збігаються до нуля. Отже, $\|u_n - u\|_k \to 0$ $(n \to +\infty)$, що й доводить лему. □

Доведення теореми 1. Розглянемо випадок (a). Леми 4 та 5 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал, а отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 3, u — C^2-розв'язок задачі (2), (3). Залишається тільки перевірити виконання нерівності $J_k(Pu) \le J(u)$ для всіх $u \in E_k$.

Оскільки

$$(APu)(s) = \int\limits_s^{s+\cos\varphi} (Pu)'(t)dt = \int\limits_s^{s+\cos\varphi} |u'(t)|dt \ge \left| \int\limits_s^{s+\cos\varphi} u'(t)dt \right|,$$

$$(BPu)(s) = \int\limits_s^{s+\sin\varphi} (Pu)'(t)dt = \int\limits_s^{s+\sin\varphi} |u'(t)|dt \ge \left| \int\limits_s^{s+\sin\varphi} u'(t)dt \right|,$$

то

$$((APu)(s)) \ge |(Au(s)| \ge (Au)(s), \; ((BPu)(s)) \ge |(Bu(s)| \ge (Bu)(s).$$

Модифікований потенціал $V(r)$ є неспадним на $\mathbb{R}$, тому

$$J_k(Pu) = \int\limits_{-k}^{k} [c^2|(Pu)'(s)|^2 - c_0^2((APu(s))^2 + (BPu(s))^2) - V(APu(s)) - V(BPu(s))]ds =$$

$$= \int\limits_{-k}^{k} [c^2|u'(s)|^2 - c_0^2((APu(s))^2 + (BPu(s))^2) - V(APu(s)) - V(BPu(s))]ds \le$$

$$\le \int\limits_{-k}^{k} [c^2|u'(s)|^2 - c_0^2((Au(s))^2 + (Bu(s))^2) - V(Au(s)) - V(Bu(s))]ds = J_k(u).$$

За теоремою 3 існує нетривіальна критична точка $u_k \in PX_k$ функціоналу J_k така, що $J_k(u_k) \ge \delta$ з $\delta > 0$ з леми 4, і

$$J_k(u_k) \le \max_{t\in[0,1]} J_k(te_k).$$

До того ж, $J_k(te_k) = J_1(te_1)$ і

$$J_k(u_k) \le M := \max_{t\in[0,1]} J_1(te_1).$$

Випадок (b) розглядається подібно (із заміною P на $-P$). □

Подамо тепер версію теореми 1 для необов'язково монотонних хвиль.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови*

(i'') $U(r) = \frac{a}{2}r^2 + V(r)$, де $V \in C^1(\mathbb{R})$, $V(0) = V'(0) = 0$ і $V'(r) = o(|r|)$ при $r \to 0$;

(ii') існують такі $r_0 \in \mathbb{R}$ і $\theta > 2$, що $V(r_0) > 0$ і $\theta V(r) \le rV'(r),\ r \in \mathbb{R}$.

І нехай $c^2 > \max\{a, 0\}$. *Тоді для будь-якого* $k \geq 1$ *рівняння (2) має розв'язок* u_k, *що задовольняє умову (3). Більше того, відповідне критичне значення* $J_k(u_k)$ *задовольняє нерівності* $0 < \delta \leq J_k(u_k) \leq M$, *з* $\delta > 0$ *і* $M > 0$, *не залежать від* k.

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 1. Достатньо використати теорему про гірський перевал і теорему 3.

За допомогою теореми про зачеплення встановимо існування нетривіальних періодичних біжучих хвиль з періодичним профілем. Для цього, за лемою 3, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Відмітимо, що $u = 0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожно дорівнює нулю.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* $(i'), (ii^+)$ *та* (ii^-). *Тоді для будь-яких* $k \geq 1$ *і* $c \in (0, c_0]$ *рівняння (2) має розв'язок* $u_k \in E_k$.

Сформулюємо теорему про зачеплення ([15], [16], [19]).

Нехай H — гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z\colon \|z\| = r$. Позначимо

$$M{:=}\{u = y + \lambda z\colon y \in Y, \|u\| \leq \rho, \lambda \geq 0\},$$
$$M_0{:=}\{u = y + \lambda z\colon y \in Y, \|u\| = \rho \text{ і } \lambda \geq 0, \text{ або } \|u\| \leq \rho \text{ і } \lambda = 0\},$$

тобто M_0 — межа M (∂M). Нехай $N{:=}\{u \in Z\colon \|u\| = r\}$.

Розглянемо функціонал φ на H і припустимо, що

$$\beta{:=} \inf_{u \in N} \varphi(u) > \alpha{:=} \sup_{u \in M_0} \varphi(u).$$

У такому випадку говорять, що функціонал φ задовольняє геометрію зачеплення.

Теорема 6 (про зачеплення). *Нехай* φ — *функціонал класу* C^1 *на гільбертовому просторі* H, *що задовольняє геометрію зачеплення та умову Пале–Смейла:*

(PS) *якщо послідовність* $u_n \in H$ *така, що* $\varphi'(u_n) \to 0$ $(n \to +\infty)$ *і* $(\varphi(u_n))$ *обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.*

Нехай

$$b{:=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)),$$

де $\Gamma{:=}\{\gamma \in C(M; H)\colon \gamma = \mathrm{id}$ *на* $M_0\}$. *Тоді* b — *критичне значення* φ *і* $\beta \leq b \leq \sup\limits_{u \in M} \varphi(u)$.

Почнемо з умови Пале-Смейла.

Лема 6. *За умов теореми 5 функціонал* J_k *задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доведення. Нехай $u_n \in E_k$ — послідовність Пале-Смейла на деякому рівні b (b — критичне значення функціоналу J_k). Виберемо $\beta \in (\theta^{-1}; 2^{-1})$. Тоді для достатньо великих n маємо

$$b + 1 + \beta\|u_n\|_k \geq J_k(u_n) - \beta\langle J_k'(u_n), u_n\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\int\limits_{-k}^{k}(c^2|u_n'(s)|^2 - c_0^2|Au_n(s)|^2 - c_0^2|Bu_n(s)|^2)ds+$$

$$+\int\limits_{-k}^{k}(\beta(V'(Au_n(s))Au_n(s)+V'(Bu_n(s))Bu_n(s)) - V(Au_n(s)) - V(Bu_n(s)))ds \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2}-\beta\right)c^2\|u_n\|_k^2 - \left(\frac{1}{2}-\beta\right)c_0^2\left(\|Au_n\|_{L^2}^2+\|Bu_n\|_{L^2}^2\right)+$$

$$+(\beta\theta-1)\int\limits_{-k}^{k}(V(Au_n(s))+V(Bu_n(s)))ds \geq \left(\frac{1}{2}-\beta\right)c^2\|u_n\|_k^2-$$

$$-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)c_0^2\left(\|Au_n\|_{L^2}^2+\|Bu_n\|_{L^2}^2\right)+C(\beta\theta-1)\left(\|Au_n\|_{L^\theta}^\theta+\|Bu_n\|_{L^\theta}^\theta\right)-C_0.$$

Оскільки для $\theta>2$ маємо

$$\|Au_n\|_{L^2}^2+\|Bu_n\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|Au_n\|_{L^\theta}^2+\|Bu_n\|_{L^\theta}^2\right) \leq K(\varepsilon)+\varepsilon\left(\|Au_n\|_{L^\theta}^\theta+\|Bu_n\|_{L^\theta}^\theta\right),$$

де $K(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, то

$$b+1+\beta\|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2}-\beta\right)c^2\|u_n\|_k^2 - \left(\frac{1}{2}-\beta\right)c_0^2K(\varepsilon)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)c_0^2\varepsilon\left(\|Au_n\|_{L^\theta}^\theta+\|Bu_n\|_{L^\theta}^\theta\right)+C(\beta\theta-1)\left(\|Au_n\|_{L^\theta}^\theta+\|Bu_n\|_{L^\theta}^\theta\right)-C_0.$$

Вибираючи ε достатньо малим, отримаємо

$$b+1+\beta\|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2}-\beta\right)c^2\|u_n\|_k^2+C(\beta\theta-1)\left(\|Au_n\|_{L^\theta}^\theta+\|Bu_n\|_{L^\theta}^\theta\right)-C_0.$$

Оскільки $\beta\theta-1>0$, то

$$b+1+\beta\|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2}-\beta\right)c^2\|u_n\|_k^2-C_0.$$

Остання нерівність і доводить обмеженість (u_n). Аналогічно як і в доведенні леми 5, $\|u_n-u\|_k\to 0$ $(n\to+\infty)$, що і доводить лему. □

Далі нам знадобиться така, доведена в [8], лема.

Лема 7. *Якщо V задовольняє $(i'),(ii^+),(ii^-)$, то існують такі сталі $d>0$ та $d_0\geq 0$, що*

$$V(r)\geq d|r|^\theta-d_0. \tag{6}$$

Лема 8. *За умов теореми 5 функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення.*

Доведення. Відзначимо спочатку, що простір E_k розпадається на ортогональну суму одновимірного підпростору, породженого функцією $h_0(t)=t$, і простору $H_{k,0}^1$ всіх 2k-періодичних функцій з E_k з нульовим власним значенням.

Розглянемо оператор $(Lu)(s) := -c^2u''(s) + c_0^2(Au(s) + Bu(s))$ з $2k$-періодичними умовами. Оператор L є самоспряженим в $L^2(-k;k)$, обмеженим знизу та має дискретний спектр, який накопичується біля $+\infty$, тобто ліворуч від нуля власних чисел є скінченна кількість. Власні значення та власні функції можна обчислити. Нагадаємо, що всі власні значення λ_j з несталими власними функціями є подвійними. Позначимо через $h_j^{\pm} \in E_k$ лінійно незалежні пари власних функцій з власними значеннями λ_j.

Нехай Z — підпростір E_k, утворений функціями $h_j^{\pm}$ з $\lambda_j > 0$, і Y — підпростір E_k, утворений функціями $h_j^{\pm}$ з $\lambda_j \le 0$ та функцією h_0, тобто такі лінійні оболонки

$$Z = \mathrm{Span}\{h_j^{\pm} \colon \lambda_j > 0\},\ Y = \mathrm{Span}\{h_0, h_j^{\pm} \colon \lambda_j \le 0\}.$$

Відмітимо, що $\dim Y < \infty$. Легко перевірити, що $Y \perp Z$ і $E_k = Y \oplus Z$.

Позначимо через Q_k квадратичну частину функціоналу J_k

$$Q_k(u) = \frac{1}{2}\int_{-k}^{k}(c^2|u'|^2 - c_0^2|Au|^2 - c_0^2|Bu|^2)ds.$$

Легко бачити, що $Q_k(y+z) = Q_k(y) + Q_k(z)$, де $y \in Y, z \in Z$.

Зауважимо, що квадратична форма Q_k додатно визначена на Z, тобто $Q_k(u) \ge \alpha\|u\|_k^2$, з $\alpha > 0$. З умов $(i'), (ii^+), (ii^-)$ випливає, що для деякого $\varepsilon > 0$ існує таке $r_0 > 0$, що $|V(r)| \le \varepsilon r^2$, при $|r| \le r_0$. Тоді

$$J_k(u) \ge Q_k(u) - \varepsilon\int_{-k}^{k}|u|^2ds \ge Q_k(u) - \varepsilon\|u\|_k^2 \ge \delta\|u\|_k^2,$$

де $\delta > 0$. Отже, $J_k(u) > 0$ на $N = \{u \in Z \colon \|u\|_k = r\}$ з достатньо малим $r > 0$.

Зафіксуємо $z \in Z, \|z\|_k = 1$ та множину $M = \{u = y + \lambda z \colon y \in Y, \|u\|_k \le \rho, \lambda \le 0\}$. Доведемо, що $J_k(u) \le 0$ на $M_0 = \partial M$ за умови, що ρ достатньо велике.

Нагадаємо, що $M_0 = \{u = y + \lambda z \colon y \in Y, \|u\|_k = \rho$ і $\lambda \ge 0$, або $\|u\|_k \le \rho$ і $\lambda = 0\}$. Маємо

$$J_k(y+\lambda z) = Q_k(y) + \lambda^2 Q_k(z) - \int_{-k}^{k}\left[V(A(y+\lambda z)) + V(B(y+\lambda z))\right]ds.$$

За лемою 7 маємо, що існують такі сталі $d > 0$ і $d_0 \ge 0$, що правильна нерівність (6) $V(r) \ge d|r|^\theta - d_0$, де $\theta > 2$. Тоді, враховуючи, що $Q_k(y) \le 0$

$$J_k(y+\lambda z) \le \lambda^2\gamma_0 + 4kd_0 - d(\|A(y+\lambda z)\|_{L^\theta}^\theta + \|B(y+\lambda z)\|_{L^\theta}^\theta) \le \lambda^2\gamma_0 + 4kd_0 - C\|y+\lambda z\|_{L^\theta}^\theta,$$

де $\gamma_0 = Q_k(z), C > 0$. Оскільки $\rho^2 = \|y+\lambda z\|_k^2 = \|y\|_k^2 + \lambda^2$, то $\lambda^2 \le \rho^2$. До того ж, у скінченновимірних просторах всі норми еквівалентні. Отже,

$$\|y+\lambda z\|_{L^\mu} \ge c\|y+\lambda z\|_k = c\rho,\ J_k(y+\lambda z) \le \gamma_0\rho^2 + 4kd_0 - C\rho^\theta.$$

Оскільки $\theta > 2$, то права частина від'ємна, якщо ρ — достатньо велике. Тому, $J_k(y + \lambda z) \le 0$. Якщо $u \in M_0, \|u\|_k \le \rho$ і $\lambda = 0$, то $u = y \in Y$ і, очевидно, що $J_k(u) \le 0$. Отже, функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення. □

Доведення теореми 5. Лема 6 та лема 8 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 3, u — C^2-розв'язок задачі (2), (3). □

ЛІТЕРАТУРА

1. Bak S.M. *Existence of periodic travelling waves in systems of nonlinear oscillators on 2D-lattice*// Mat. Stud. – 2011. – V.35, №1. – P. 60–65. (in Ukrainian)
2. Бак С.М., Баранова О.О., Білик Ю.П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. – Вип. 4. – С. 18–24.
3. Bak S.M., Pankov A.A. *The travelling waves in systems of oscillators on 2Dlattice*// Ukr. Mat. Visn. – 2010. – V.7, №2. – P. 154–175. (in Ukrainian)
4. Вайнберг М.М., Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
5. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.
6. Reed M., Simon B., Methods of modern mathematical physics. Academic press, New York–San Fransisco, London, 1975.
7. Aubry S. *Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization*// Physica D. – 1997. – V.103. – P. 201–250.
8. Bak S.M. *Peridoc traveling waves in chains of oscillators*// Communications in Mathematical Analysis. – 2007. – V.3, №1. – P. 19–26.
9. Berestycki H., Capuzzo-Dolcetta I., Nirenberg L. *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems*// Nonlin. Diff. Equat. Appl. – 1995. – V.2. – P. 553—572.
10. Braun O.M., Kivshar Y.S. *Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model*// Physics Repts. – 1998. – V.306. – P. 1–108.
11. Braun O.M., Kivshar Y.S., The Frenkel–Kontorova model. – Berlin: Springer, 2004. – 427 p.
12. Butt I., Wattis J. *Discrete breathers in a two-dimensional Fermi-Pasta-Ulam lattice*// J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – V.39. – P. 4955–4984.
13. Feckan M., Rothos V. *Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions*// Nonlinearity. – 2007. – V.20. – P. 319–341.
14. Friesecke G., Matthies K. *Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice*// Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – V.3, №1. – P. 105–114.
15. Pankov A., Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 p.
16. Rabinowitz P., Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. – Providence, R. I.: American Math. Soc. – 1986. – 100 p.
17. Srikanth P. *On periodic motions of two-dimentional lattices*// Functional analysis with current applications in science, technology and industry. – 1998. – V.377. – P. 118–122.
18. Tang C., Guo B. *Multiple periodic solutions for two-dimensional lattice dynamic systems*// Nonlin. Analysis. – 2006. – V.65. – P. 1306–1317.
19. Willem M., Minimax theorems. – Boston, Birkhäuser, 1996. – 162 p.

Вінницький державний педагогічний
університет ім. М. Коцюбинського
Sergiy.Bak@gmail.com

Надійшло 29.09.2011
Після переробки 27.12.2011