Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 3, с. 263–273

Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов

С.Н. Бак

Винницкий государственный педагогический университет им. М. Коцюбинского
ул. Острожского, 32, Винница, 21001, Украина
E-mail:Sergey.bak@online.com.ua

Статья поступила в редакцию 27 февраля 2004 г.
Представлена И.Д. Чуешовым

С помощью метода условной минимизации изучаются периодические колебания бесконечной цепочки нелинейных осцилляторов.

За допомогою методу умовної мінімізації вивчаються періодичні коливання нескінченного ланцюга нелінійних осциляторів.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается бесконечная цепочка нелинейных осцилляторов, каждый из которых в отсутствие взаимодействия описывается уравнением вида:

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

где q_n — обобщенная координата, отвечающая n-му осциллятору. Предполагается, что каждый осциллятор линейно взаимодействует с двумя своими ближайшими соседями. Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{q_n} = -U_n'(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - a_n(q_n - q_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

и представляют собой бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются решения системы (1), удовлетворяющие краевому условию на бесконечности:

$$\lim_{n \to \pm\infty} q_n(t) = 0. \tag{2}$$

Это означает, что осцилляторы находятся в состоянии покоя на бесконечности.

Mathematics Subject Classification 2000: 58E50, 58E30.

Интерес к ситемам подобного типа объясняется многочисленными физическими приложениями (см., напр., [1]). Однако в литературе практически отсутствуют строгие результаты о цепочках осцилляторов. Исключение составляет работа [2], в которой с помощью теории бифуркаций исследованы бегущие волны в однородных цепочках, и работа [3], посвященная изучению периодических по времени решений вариационными методами. Отметим, что периодические решения для близкого класса систем — цепочек Ферми–Паста–Улама — достаточно хорошо исследованы [4]–[8].

В [3] с помощью теоремы о горном перевале исследован случай достаточно общего потенциала U_n (при некотором условии положительности). В настоящей работе при том же условии положительности рассматриваются потенциалы специального вида. Однако предлагается более прямой и эффективный метод построения решений, основанный на задаче минимизации некоторого функционала с ограничениями.

2. Основные предположения и результаты

Рассматриваются потенциалы вида

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2}r^2 + \frac{d_n}{p}|r|^p,$$

где $d_n > 0$, $p > 2$. Предполагается, что рассматриваемая цепочка пространственно периодична, т.е. существует такое натуральное n_0, что $a_{n+n_0} = a_n$, $c_{n+n_0} = c_n$ и $d_{n+n_0} = d_n$. Положим

$$b_n = c_n - a_n - a_{n-1}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1}q_{n-1} + b_n q_n - d_n|q_n|^{p-2}q_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Естественным конфигурационным пространством данной системы, учитывающим краевые условия (2), является пространство l^2 двусторонних последовательностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Таким образом, система (3) может рассматриваться как дифференциальное уравнение в l^2 вида

$$\ddot{q} = Aq - B(q)$$

с ограниченным самосопряженным линейным оператором

$$(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1}q_{n-1} + b_n q_n.$$

Нетрудно также видеть, что B — ограниченный непрерывный оператор в l^2. Скалярное произведение и норма в l^2 обозначаются $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$, соответственно.

В дальнейшем используются также пространства l^p, $1 \le p \le \infty$, двусторонних последовательностей. Норма в l^p обозначается $\|\cdot\|_p$. Через l_0 обозначается пространство финитных последовательностей, равных нулю всюду, за исключением конечного числа номеров. Как обычно, $supp(V) = \{k \in \mathbb{Z} : v_k \neq 0\}$.

Всюду в этой работе предполагается выполненным следующее условие положительности.

(P) *Оператор A положительно определенный, т.е. существует такое $\alpha_0 > 0$, что*

$$(Aq, q) \ge \alpha_0 \|q\|^2.$$

Всюду далее решения задачи (1), (2) или уравнения (3) понимаются в слабом смысле. Именно, функция $q(t)$ со значением в l^2, $t \in (a, b)$, называется решением, если $q \in H^1(a, b; l^2)$ (т.е. $q \in L^2(a, b; l^2)$), имеет слабую производную $\dot{q} \in L^2(a, b; l^2)$, и выполняется интегральное тождество

$$\int_a^b [(\dot{q}, \dot{v}) + (Aq, v) - (Bq, v)]dt = 0 \tag{4}$$

для любой функции $v \in C_0^\infty(a, b; l^2)$ или эквивалентно для любой $v \in H_0^1(a, b; l^2)$, т.е. $v \in H^1(a, b; l^2)$ и $v(a) = v(b) = 0$. Напомним, что любая функция из $H^1(a, b; l^2)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$. Функция $q(t)$ является слабым решением на $\mathbb{R}$, если она является слабым решением на любом конечном интервале.

Теорема 1. *В приведенных предположениях существует такое $T_0 > 0$, что для любого $T \ge T_0$ задача (1), (2) имеет непостоянное T-периодическое решение.*

3. Вариационная постановка задачи

Пусть $T > 0$. Введем гильбертово пространство X, состоящее из функций $q : \mathbb{R} \to l^2$, $q \in H^1(0, T; l^2)$, $q(0) = q(T)$. Скалярное произведение в X задается формулой

$$(u, v)_X = \int_0^T [(\dot{u}, \dot{v}) + (u, v)]dt. \tag{5}$$

На пространстве X рассмотрим функционал

$$\phi(u) = \int_0^T [\frac{1}{2}\|\dot{u}\|^2 + \frac{1}{2}(Au, u) - \frac{1}{p}\sum d_n |u_n(t)|^p]dt. \tag{6}$$

Так как $p > 2$, то последовательность $\{d_n|u_n(t)|^p\}$ лежит в $C([0,T];l^2)$, и, следовательно, функционал ϕ корректно определен на X. Более того, ϕ непрерывно дифференцируем по Фреше и прямое вычисление дает для производной ϕ' формулу

$$(\phi'(u), v) = \int_0^T [(\dot{u}, \dot{v}) + (Au, v) - (Bu, v)]dt \tag{7}$$

для любого $v \in X$. Эта формула показывает, что критические точки ϕ являются в точности T-периодическими решениями задачи (1), (2). В работе [3] для построения критических точек ϕ использованы периодические по дискретной пространственной переменной аппроксимации вместе с теоремой о горном перевале [9, 10].

Здесь мы используем иной подход, основанный на задаче минимизации с ограничениями. Рассмотрим следующие два функционала на X:

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T [\|\dot{q}\|^2 + (Au, u)]dt,$$

$$S(u) = \frac{1}{p}\int_0^T (\sum_n d_n|u_n(t)|^p)dt.$$

Отметим, что $\phi(u) = \psi(u) - S(u)$. Для любого $\theta > 0$ рассмотрим задачу минимизации

$$I_\theta = \inf\{\psi(v) : v \in X, S(v) = \theta\}. \tag{8}$$

В дальнейшем будет показано, что эта задача имеет решение для любого $\theta > 0$.

Предположим, что для некоторого $\theta > 0$ задача (8) имеет решение, и пусть $u \in X$ — точка минимума. Так как фунционалы ψ и S непрерывно дифференцируемы, то существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$ (множитель Лагранжа), что

$$\psi'(u) = \lambda S'(u)$$

или, что то же самое,

$$\int_0^T [(\dot{u}, \dot{v}) + (Au, v)]dt = \lambda \int_0^T (\sum_n d_n|u_n(t)|^{p-2}u_n(t)v_n(t))dt \tag{9}$$

для любого $v \in X$. Подстановка $v = u$ показывает, что $\lambda > 0$. На самом деле из (9) вытекает, что

$$\lambda = \frac{2I_\theta}{p\theta}.$$

Положим $q = \lambda^{\frac{1}{p-2}} u$. Тогда уравнение (9) немедленно показывает, что q — решение задачи (1), (2). Таким образом, теорема 1 вытекает из следующего результата

Теорема 2. *Для любого $\theta > 0$ задача (8) имеет решение $u \in X$. Более того, существует такое $T_0 > 0$, что $u \neq const$ при $T \geq T_0$.*

4. Задача условной минимизации

Перейдем к доказательству теоремы 2. Вначале заметим, что $\psi(sv) = s^2\psi(v)$ и $S(sv) = s^p S(v)$ для любого $s > 0$. Отсюда немедленно следует

Лемма 1. *Задачи (8) при различных θ эквивалентны. При этом*

$$I_\theta = \theta^{2/p} I_1. \tag{10}$$

В дальнейшем нам понадобится следующий дискретный вариант принципа концентрированной компактности [11] (см. [12] в непрерывном случае).

Лемма 2. *Пусть $v^{(k)} = \{v_n^{(k)}\}$ — такая последовательность неотрицательных элементов l^1, что $\|v^{(k)}\|_1 = \lambda > 0$. Тогда существует такая подпоследовательность (по-прежнему обозначаемая $v^{(k)}$), что выполняется одна из следующих трех возможностей:*

(i) (жесткость) существует такое $m_k \in \mathbb{Z}$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $r > 0$, что

$$\sum_{|n-m_k|\leq r} v_n^{(k)} \geq \lambda - \varepsilon;$$

(ii) (расплывание) $\lim_{n\to\infty} \|v^{(k)}\|_{l^\infty} = 0$;

(iii) (дихотомия) найдется $\alpha \in (0, \lambda)$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие неотрицательные последовательности $v^{(k,1)}, v^{(k,2)} \in l_0$, что

$$\|v^{(k)} - (v^{(k,1)} + v^{(k,2)})\| \leq \varepsilon,$$
$$|\|v^{(k,1)}\|_1 - \alpha| \leq \varepsilon,$$
$$|\|v^{(k,2)}\|_1 - (\lambda - \alpha)| \leq \varepsilon$$

для всех достаточно больших k, и $dist[supp(v^{(k,1)}), supp(v^{(k,2)})] \to \infty$ при $k \to \infty$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим произвольную минимизирующую последовательность $w^{(k)}$ задачи (8), $w^{(k)} \in X$, $S(w^{(k)}) = \theta$ и $\psi(w^{(k)}) \to I_\theta$. Можно при этом считать, что $\psi(w^{(k)}) \leq 2I_\theta$. Из определения ψ и нормы в X немедленно следует существование такой константы $C > 0$, зависящей только от константы α_0 из условия (P), что

$$\|w^{(k)}\|_X \leq CI_\theta. \tag{11}$$

Пусть $w^{(k)} = w^{(k)}(t) = \{w_n^{(k)}(t)\}$. Положим

$$v_n^{(k)} = \frac{1}{p}\int\limits_0^T d_n |w_n^{(k)}(t)|^p dt,$$

$$v^{(k)} = \{v_n^{(k)}\}.$$

Так как $H^1(0,T)$ непрерывно вложено в $L^p(0,T)$ с константой, не зависящей от T, то из неравенства (11) вытекает, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (v_n^{(k)})^{2/p} \leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|w_n^{(k)}\|^2_{L^p(0,T)} \leq C\|w^{(k)}\|_X^2 \leq CI_\theta^2. \tag{12}$$

Кроме того,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n^{(k)} = \|v^{(k)}\|_1 = \theta > 0. \tag{13}$$

К последовательности $v^{(k)}$ применим лемму 2. После перехода к подпоследовательности для $v^{(k)}$ должно выполняться одно из утверждений (i)–(iii).

Утверждение (ii) не может выполняться. Действительно, если $\|v^{(k)}\|_\infty \to 0$, то из (12) следует, что

$$\|v^{(k)}\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} [v_n^{(k)}]^{1-2/p} [v_n^{(k)}]^{2/p} \leq \sup_n [v_n^{(k)}]^{1-2/p} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [v_n^{(k)}]^{2/p} \leq [\|v^{(k)}\|_\infty]^{1-2/p} CI_\theta^2.$$

Таким образом, $\|v^{(k)}\|_1 \to 0$, что противоречит (13).

Предположим, что выполняется (iii) (с заменой λ на θ). Определим $w^{(k,1)}, w^{(k,2)} \in X$ следующим образом. Пусть $u_n^{(k,i)} = w_n^{(k)}$ при $n \in supp(v^{(k,i)})$ и $u_n^{(k,i)} = 0$ в противном случае $(i = 1, 2)$. Нетрудно видеть, что

$$S(u^{(k,i)}) = \sum_{n\in supp\, v^{k,i}} v_n^{(k)}$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} S(u^{(k,1)}) = \alpha\,, \quad \lim_{k\to\infty} S(u^{(k,2)}) = \theta - \alpha\,.$$

Положим
$$s_1^k=(\frac{\alpha}{S(u^{(k,1)})})^{1/p}\,,\quad s_2^k=(\frac{\theta-\alpha}{S(u^{(k,2)})})^{1/p}$$
и $w^{(k,i)}=s_i^{(k)}u^{(k,i)}$. Тогда из (iii) вытекает, что
$$\lim_{k\to\infty}\|w^{(k)}-(w^{(k,1)}+w^{(k,2)})\|_X=0.$$
Из последнего соотношения следует, что
$$\lim_{k\to\infty}[\psi(w^{(k)})-\psi(w^{(k,1)}+w^{(k,2)})]=0. \tag{14}$$
Так как носители $w^{(k,1)}$ и $w^{(k,2)}$ не пересекаются, то
$$\psi(w^{(k,1)}+w^{(k,2)})=\psi(w^{(k,1)})+\psi(w^{(k,2)})\ge I_\alpha+I_{\theta-\alpha}.$$
С другой стороны, из (14) следует, что
$$\lim_{k\to\infty}\psi(w^{(k,1)}+w^{(k,2)})=I_\theta.$$
Таким образом,
$$I_\theta\ge I_\alpha+I_{\theta-\alpha}.$$
Однако $I_\theta=\theta^{2/p}I_2$ $(p>2)$— строго вогнутая функция $\theta>0$. Поэтому
$$I_\theta<I_\alpha+I_{\theta-\alpha}.$$
Полученное противоречие показывает, что утверждение (iii) не может иметь места.

Таким образом, для рассматриваемой последовательности $v^{(k)}$ имеет место (i) (жесткость). Заметим, что в силу условий периодичности $\psi(\{u_{n+n_0}(t)\})=\psi(\{u_n(t)\})$ и $S(\{u_{n+n_0}\})=S(\{u_n(t)\})$. Поэтому, заменяя $\{w_n^{(k)}(t)\}$ на $\{w_{n+b_kn_0}^{(k)}(t)\}$ с подходящим $b_k\in\mathbb{Z}$, можно считать, что в (i) $m_k=0$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $r>0$, что
$$\sum_{|n|>r}v_n^{(k)}\le\varepsilon.$$

Так как $d_n>0$ — периодическая последовательность, то последнее неравенство означает, что для любого ε найдется такое
$$\sum_{|n|>r}\int\limits_0^T|w_n^{(k)}(t)|^pdt\le C\varepsilon. \tag{15}$$

В силу (11), последовательность $w^{(k)}$ ограничена в X. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $w^{(k)} \to u = \{u_n\}$ слабо в X. Так как X непрерывно вложено в $l^p(L^p(0,T))$, то $w^{(k)} \to u$ слабо и в последнем пространстве. Кроме того, $H^1(0,T)$ компактно вложено в $L^p(0,T)$. Поэтому, переходя к подпоследовательности, с использованием диагонального процесса, можно считать, что $w_n^{(k)} \to u_n$ сильно в $L^p(0,T)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, из равенства $S(w^{(k)}) = \theta$ следует, что $w^{(k)}$ — ограниченная последовательность в $l^p(L^p(0,T))$. Вместе со сходимостью $w_n^{(k)} \to u_n$ и (15) это дает сильную сходимость $w_n^{(k)} \to u$ в $l^p(L^p(0,T))$. Вместе с непрерывностью S на $l^p(L^p(0,T))$ это показывает, что $S(u) = \theta$. Так как ψ — непрерывный квадратичный положительно определенный функционал, то он слабо полунепрерывен снизу. Отсюда следует, что

$$\psi(u) \le \lim \psi(w^{(k)}) = I_\theta.$$

Следовательно, $\psi(u) = I_\theta$ и u — решение задачи (8).

Докажем последнее утверждение теоремы. Предположим, что $u = \{u_n\}$ — постоянное решение задачи (8). Тогда

$$0 < \theta = S(u) = \frac{1}{p}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n |u_n|^p T.$$

Отсюда $\theta \le C\|u\|_p^p T$ или $\|u\|_p \ge C_0\theta/T^{1/p}$. Тогда

$$\psi(u) = \frac{1}{2}(Au,u)T \ge \frac{\alpha_0}{2}\|u\|_2^2 T \ge \frac{\alpha_0 (C_0\theta)^2}{2} T^{1-2/p}. \tag{16}$$

С другой стороны, пусть $v = \{v_n\}$ таково, что $v_n \equiv 0$ при $n \ne 0$, $v_0(t) = \lambda \sin(2\pi t/\eta T)$ при $0 \le t \le \eta T$, $v_0(t) = 0$ при $\eta T < t \le T$ и v_0 продолжена на всю ось как T-периодическая функция ($0 < q < 1$). Константу λ выберем из условия $S(v) = \theta$. Имеем

$$S(v) = \alpha_0 \int_0^T |\lambda \sin(2\pi t/\eta T)|^p dt = \alpha_0(\eta T)\lambda^p A_p,$$

где $A_p = \int_0^1 |\sin 2\pi t|^p dt$. Отсюда

$$\lambda = (\alpha_0 \eta T A_p)^{-1/p}.$$

Далее

$$2\psi(v) = \lambda^2 \int_0^{\eta T} [\frac{2\pi}{\eta T}\cos^2\frac{2\pi t}{\eta T} + b_0 \sin^2\frac{2\pi t}{\eta T}] dt$$

$$= \lambda^2 A_2(\frac{4\pi^2}{\eta T} + b_0\eta T) = A_2(d_0 A_p \eta T)^{-2/p}(\frac{4\pi^2}{\eta T} + b_0\eta T)$$
$$= A_2(d_0 A_p)^{-2/p}(\eta T)^{1-2/p}(4\pi^2(\eta T)^{-2} + b_0).$$

Заметим, что в силу условия (P) $b_0 \geq \alpha_0 > 0$. Выберем $\eta \in (0,1)$ таким образом, что

$$A_2 b_0 (d_0 A_p)\eta^{1-2/p} < \alpha_0 (C_0\theta)^2.$$

Прямое вычисление с учетом (16) показывает, что при достаточно больших T: $\psi(v) < \psi(u)$. Следовательно, u не может быть решением задачи (8). Теорема доказана.

5. Периодические аппроксимации

Покажем, что решения задачи (8) можно получить с помощью периодических аппроксимаций. Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Рассмотрим пространство l_k^2, состоящее из kn_0-периодических последовательностей с нормой

$$\|u\|_{2,k}^2 = \sum_{n=0}^{kn_0-1} |u_n|^2,$$

и введем пространство X_k, которое состоит из таких функций $u \in H^1(0,T;l_k^2)$, что $u(T) = u(0)$. Это — замкнутое подпространство гильбертова пространства $H^1(0,T;l_k^2)$. Отметим, что l_k^2 имеет размерность kn_0.

Оператор A корректно определен, ограничен и самосопряжен в l_k^2. Нетрудно видеть, что из (P) вытекает $(Au,u)_k \geq \alpha_0\|u\|_k^2$, где $(\cdot,\cdot)_k$ — скалярное произведение в l_k^2. На пространстве X_k рассмотрим функционалы

$$\psi_k(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (\|\dot{u}(t)\|_k^2 + (Au,u)_k)dt,$$

$$S_k(u) = \frac{1}{p}\int_0^T \sum_{n=0}^{kn_0-1} d_n |u_n(t)|^p dt.$$

Также рассмотрим задачу минимизации

$$I_\theta^{(k)} = \inf\{\psi_k(u) : u \in X_k, S_k(u) = \theta\}. \tag{17}$$

Используя компактность вложения $H^1(0,T;l_k^2) \subset L^p(0,T;l_k^2)$, можно показать, что задача (17) имеет решение $u^{(k)} \in X_k$. Как и в случае задачи (8), подходящая нормализация $u^{(k)}$ дает T-периодическое решение системы (3), которое kn_0-периодично по $n \in \mathbb{Z}$. Рассуждение, приведенное в конце доказательства теоремы 2, показывает, что $u^{(k)}$ непостоянно по t, если T достаточно велико.

Теорема 3. *Пусть $u^{(k)}$ — решение задачи (17). Тогда после перехода к подпоследовательности существуют такие $m_k \in \mathbb{Z}$ и решение $u \in X$ задачи (8), что*

$$\sum_{n=0}^{kn_0-1} \|u^{(k)}_{n+m_k n_0} - u_n\|^2_{H^1(0,T)} \to 0$$

при $k \to \infty$. При этом $I^{(k)}_\theta \to I_\theta$.

Доказательство проводится, следуя [3], и используется подход, развитый в [13]–[16]. Ключевыми моментами являются равномерные по k оценки норм $u^{(k)}$ и использование леммы 2.

Список литературы

[1] *O.M. Braun and Y.S. Kivshar*, Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model. — *Phys. Repts.* (1998), v. 306, p. 1–108.

[2] *G. Loos and K. Kirchgässner*, Travelling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. — *Comm. Math. Phys.* (2000), v. 211, p. 439–464.

[3] *С.Н. Бак, А.А. Панков*, О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов. — *Доп. НАН України* (2004) № 9.

[4] *G. Arioli and F. Gazzola*, Existence and approximation of periodic motions of an infinite lattice of particles. — *Z. Angew. Math. Phys.* (1995), v. 46, p. 898–912.

[5] *G. Arioli and F. Gazzola*, Periodic motion of an infinite lattice of particles with nearest neighbor interaction. — *Nonlinear Anal.* (1996), v. 26, № 6, p. 1103–1114.

[6] *G. Arioli, F. Gazzola, and S. Terracini*, Multibump periodic motion of an infinite lattice of particles. — *Math. Z.* (1996), v. 223, p. 627–642.

[7] *G. Arioli and J. Chabrowski*, Periodic motions of a dynamical systems consisting of an infinite lattice of particles. — *Dyn. Syst. Appl.* (1997), v. 6, p. 387–395.

[8] *G. Arioli and A. Szulkin*, Periodic motions of an infinite lattice of particles: the strongly indefinite case. — *Ann. Sci. Appl.* (1997), v. 22, p. 97–119.

[9] *M. Willem*, Minimax theorems. Birkhäuser, Boston (1996).

[10] *P. Rabinowitz*, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. AMS, Providence, RI (1986).

[11] *A. Pankov and N. Zakharchenko*, On some discrete variational problems. — *Acta Appl. Math.* (2001), v. 65, p. 295–303.

[12] *A. Lions*, The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II. Ann. Inst. H. Poincare. — *Anal. Nonlineaire* (1984), v. 1, p. 223–238.

[13] *A. Pankov and K. Pflüger*, On a semilinear Schrödinger equation with periodic potential. — *Nonlinear Anal.* (1998), v. 33, p. 593–609.

[14] *A. Pankov and K. Pflüger*, Periodic and solitary traveling wave solutions for the generalized Kadomtsev–Petviashvili equation. — *Math. Meth. Appl. Sci.* (1999), v. 22, p. 733–752.

[15] *A. Pankov and K. Pflüger*, On ground traveling waves for the generalized Kadomtsev–Petviashvili equations. — *Math. Phys., Anal., Geom.* (2000), v. 3, p. 33–47.

[16] *A. Pankov and K. Pflüger*, Travelling waves in lattice dynamical systems. — *Math. Meth. Appl. Sci.* (2000), v. 23, p. 1223–1235.

The method of constrained minimization in the problem on oscillation of a chain of nonlinear oscillators

S.N. Bak

By means of constrained minimization we study periodic oscillations of an infinite chains of nonlinear oscillators.