УДК 517.97

Сергій Бак,
докт. фіз.-мат. наук, професор
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Галина Ковтонюк,
канд. пед. наук, доцент
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Богдан Лисак,
студент факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ВІДОКРЕМЛЕНІ БІЖУЧІ ХВИЛІ В СИСТЕМАХ ТИПУ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА ІЗ НАСИЧУВАНИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Анотація. *У статті встановлено умови існування відокремлених біжучих хвиль в системі типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійностями на двовимірній ґратці.*

Ключові слова: *система Фермі-Пасти-Улама, двовимірна ґратка, відокремлені біжучі хвилі, критичні точки, насичувані нелінійності.*

Abstract. *The article establishes the conditions for the existence of solitary traveling waves in a system of the Fermi-Pasta-Ulam type with saturable nonlinearities on a two-dimensional lattice.*

Keywords: *Fermi-Pasta-Ulam system, two-dimensional lattice, solitary traveling waves, critical points, saturable nonlinearities.*

Розглянемо систему типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n,m}(t) &= W_1'(q_{n+1,m}(t)-q_{n,m}(t)) - W_1'(q_{n,m}(t)-q_{n-1,m}(t)) + \\ &+ W_2'(q_{n,m+1}(t)-q_{n,m}(t)) - W_2'(q_{n,m}(t)-q_{n,m-1}(t)), (n,m)\in\mathbb{Z}^2,\end{aligned} \tag{1}$$

де $q_{n,m}(t)$ – координата (n,m)- ї частинки в момент часу t, $W_1, W_2 \in C^1(\mathbb{R})$ – потенціали взаємодії сусідніх частинок. Подібні системи є цікавими з огляду на численні фізичні застосування (див. [1; 6; 7; 8]).

Будемо вивчати такі системи із так званими *насичуваними нелінійностями.* Це означає, що на нескінченності $W_i'(r)$ ростуть як $const \cdot r$, тобто потенціали $W_i(r)$ є асимптотично квадратичними на нескінченності $(i = 1,2)$.

Будемо шукати розв’язки системи (1) у вигляді біжучих хвиль:

$$q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct), \tag{2}$$

де $\vec{l}(\cos\varphi, \sin\varphi)$ – *фіксований хвильовий вектор*, який задає напрям поширення хвилі. Нагадаємо, що функція $u(s)$ неперервного аргументу $s \in \mathbb{R}$ називається *профілем* біжучої хвилі. Стала c представляє собою *швидкість* хвилі. Підставляючи біжучу хвилю (2) в систему (1), для профілю $u(s)$ біжучої хвилі одержуємо рівняння

$$\begin{gathered} c^2u''(s) = W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) + \\ +W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) + W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi)), \end{gathered} \tag{3}$$

де $s = n\cos\varphi + n\sin\varphi - ct.$

Всюди далі під розв’язком рівняння (3) будемо розуміти функцію $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}),$ яка задовольняє це рівняння.

Профіль відокремленої хвилі задовольняє умову:

$$\lim_{s\to\pm\infty} u'(s) = u'(\pm\infty) = 0\,. \tag{4}$$

Зауважимо, що огляд відомих результатів про існування біжучих хвиль для систем типу Фермі-Пасти-Улама на одновимірній ґратці зроблено в монографії О. Панкова [10]. Періодичні і відокремлені біжучі хвилі для систем типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці вивчалися в працях [3; 4; 12; 13]. Тоді як статті [2] і [5] присвячені питанню існування відокремлених біжучих хвиль в системах осциляторів та подібних до них – дискретних рівняннях типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці. Огляд відомих результатів про існування біжучих хвиль, а також нові результати для таких систем можна знайти в [11].

Всюди далі припускається, що виконуються такі умови:

(i) $W_i(r) = \frac{c_i^2}{2} r^2 + f_i(r),$ *де* $c_i \in\in \mathbb{R},\ f_i \in C^1(\mathbb{R}),$ *причому* $f_i(0) = f_i'(0) = 0$ *і*

$f_i'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0,\ i = 1,2;$

(ii) *існує скінченна границя* $\lim\limits_{r\to\pm\infty} \frac{f_i'(r)}{r} = l$ *та функції* $g_i(r) = f_i'(r) - l$ *обмежені* $(i = 1,2);$

(iii) $f_i(r) \ge 0$ *для всіх* $r \in \mathbb{R}$ *і для будь-якого* $r_0 > 0$ *існує* $\delta_0 = \delta_0(r_0) > 0$ *таке, що* $\frac{1}{2} r f_i'(r) - f_i(r) \ge \delta_0$ *для* $|r| \ge r_0\ (i = 1,2).$

Зауваження 1. *Зроблені припущення зокрема означають, що функції* $f_i(r)$ *зростаючі при* $r \ge 0$ *і спадні при* $r \le 0$, *а* $G_i(r) < 0$ *для всіх* $r \ne 0,\ i = 1,2.$

Позначимо через E гільбертів простір

$$E = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}),\ u(0) = 0\}$$

зі скалярним добутком

$$(u,v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'(s)v'(s)ds$$

і відповідною нормою $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$. Фактично E є 1-ковимірним підпростором гільбертового простору

$$\tilde{E} = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Зі скларяним добутком

$$(u,v)_{\tilde{E}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'(s)v'(s)ds + u(0)v(0).$$

На просторі E розглянемо функціонал

$$J(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2-\frac{c_1^2}{2}(Au(s))^2-\frac{c_2^2}{2}(Bu(s))^2-f_1(Au(s))-f_2Bu(s))\right]ds.$$

де

$$(Au)(s):=u(s+\cos\varphi)-u(s)=\int_{s}^{s+\cos\varphi}u'(\tau)d\tau,$$

$$(Bu)(s):=u(s+\sin\varphi)-u(s)=\int_{s}^{s+\sin\varphi}u'(\tau)d\tau.$$

Зауваження 2. *За зроблених припущень неважко переконатися, що* $J-$ *функціонал класу* C^1 *на* E, *а його похідна визначається формулою*

$$\left\langle J'(u),h\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[c^2u'(s)h'(s)-c_1^2Au(s)Ah(s)-c_2^2Bu(s)Bh(s)-\right.$$

$$\left.-f_1'(Au(s))Ah(s)-f_2'(Bu(s))Bh(s)\right]ds$$

для $u,h\in E$. *Більше того, критичні точки функціоналу* J *є розв'язками рівняння (3), що задовольняють умову (4).*

Таким чином, для встановлення існування розв'язків рівняння (3), що задовольняють умову (4), достатньо довести існування нетривіальних критичних точок функціоналу J.

Далі нам знадобиться така величина:

$$c_0=c_0(\varphi):=\sqrt{c_1^2\cos^2\varphi+c_2^2\sin^2\varphi}.$$

Основним результатом цієї статті є така теорема:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$. *Тоді, якщо* $\varphi\in\left[\pi n,\frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$, *і* $c_0^2<c^2<c_0^2+l$, *то рівняння (3) має несталі як неспадні, так і незростаючі розв'язки, які задовольняють умову (4).*

Для доведення теореми використано метод періодичних апрокимацій і принцип концентрованої компактності Ліонса (див. [8]).

Таким чином, у статті встановлено умови існування відокремлених біжучих хвиль з неспадними і незростаючими профілями в системі типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійностями на двовимірній ґратці.

Література:

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D*. 1997. Vol. 103. P. 201–250.
2. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 69, № 4. P.509-520.
3. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75–87.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, № 5 (January). P. 453-462.
5. Bak S. N., Pankov A. A. Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *Journal of Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 174, № 4 (April). P. 437-452.
6. Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel-Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.
7. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen*. 2006. Vol. 39. P. 4955–4984.
8. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonliniear problems. *Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-1940*. 1955. Reprinted in Lect. Appl. Math. 1974. Vol. 15. 156 p.
9. Lions P. L. The concentration–compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case, part II. Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire. 1984. Vol. 1, № 2. P. 223–283.
10. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices. London–Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
11. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці: дис....докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
12. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірпній ґратці. *Математичні студії.* 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.
13. Бак С., Ковтонюк Г., Лисак Б. Періодичні біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійністями на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики, комп'ютерних наук і технологій* : зб. наук. пр. / С. В. Подолянчук (голова) [та ін.] ; Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [Електронне мережне наукове видання]. Вінниця, 2021. Вип. 18. С. 12-15.