УДК 517.97

Катерина Сергієнко,
студентка факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ВІДОКРЕМЛЕНІ БІЖУЧІ ХВИЛІ В СИСТЕМІ ТИПУ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА З НЕЛОКАЛЬНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Анотація. *У статті встановлено умови існування відокремлених біжучих хвиль в системі типу Фермі-Пасти-Улама з нелокальною взаємодією.*

Ключові слова: *система Фермі-Пасти-Улама, нелокальна взаємодія, відокремлені біжучі хвилі, критичні точки.*

Abstract. *The article establishes the conditions for the existence of solitary traveling waves in a system of the Fermi-Pasta-Ulam with nonlocal interaction.*

Keywords: *Fermi-Pasta-Ulam system, nonlocal interaction, solitary traveling waves, critical points.*

Розглянемо нескінченний ланцюг ідентичних частинок на прямій такий, що кожна частинка взаємодіє з M сусідами з обох боків. Динаміка даного ланцюга описується рівнянням:

$$\ddot{q}_j = \sum_{m=1}^{M} [U'_m(q_{j+m} - q_j) - U'_m(q_j - q_{j-m})], \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $q_j(t)$ – координата j-ї частинки в момент часу t. Потенціали U_m, $m = 1, 2, \ldots, M$, являють собою взаємодію між частинкою та її сусідами таким чином, що U_1 відповідає взаємодії з найближчими сусідами, U_2 з наступними найближчими сусідами і т.д.

Якщо $M = 1$, то отримаємо відому ґратку Фермі-Пасти-Улама, яка вивчалася у працях [4–7, 9]. Такі системи на двовимірній ґратці вивчалися в працях [1–3, 10–12].

Розв’язок у вигляді біжучої хвилі (1) – це розв’язок вигляду $q_j(t) = u(j - ct)$, де $u(s)$ та $c > 0$ – це профільна функція (профіль) та швидкість хвилі відповідно.

Профільна функція біжучої хвилі є розв’язком такого диференціально-різницевого рівняння

$$c^2 u''(s) = \sum_{m=1}^{M} [U'_m(D_m^+ u(s)) - U'_m(D_m^- u(s))], \tag{2}$$

де

$$D_m^+ u(s) = u(s+m) - u(s)$$

і

$$D_m^- u(s) = u(s) - u(s-m).$$

Представимо потенціали взаємодії у вигляді

$$U_m(r) = \frac{a_m}{2} r^2 + V_m(r), m = 1, ..., M, \tag{3}$$

де $a_m \geq 0$ і V_m є C^1 з $V_m(0) = V'_m(0) = 0$ для всіх $m = 1, \ldots, M$.

В подальшому робиться припущення, що будуть справедливими такі умови:

(A_1) *Швидкість звуку* c_0*, яка визначається рівністю*

$$c_0^2 = \sum_{m=1}^{M} a_m m^2$$

є додатною і $c > c_0$.

(A_2) $V'_m(r) = o(r)$ *оскільки* $r \to 0$ *для всіх* $m = 1, \ldots, M$.

(A_3) *Усі функції* $V_m(r), m = 1, 2, \ldots, M$, *є невід’ємними і принаймні одна з них, наприклад,* V_{m_0}*, задовольняє умову*

$$\lim_{|r| \to \infty} r^{-2} V_{m_0}(r) = \infty.$$

(A_4) *Усі функції* $|r|^{-1} V_m'(r)$ *неспадні і принаймні одна з них строго зростаюча.*

Варто зазначити, що не всі функції V_m набувають значення 0.

Зауваження 1. *За припущенням* (A_4), *усі функції*

$$G_m(r) = \frac{1}{2} V_m'(r) r - V_m(r), \qquad m = 1, 2, ..., M,$$

неспадні (незростаючі) при $r > 0\,(r < 0)$. *Крім того,* $G_{m_0}(r) > 0$ *для всіх* $r \neq 0$.

Будемо шукати розв’язки рівняння (2) для біжучих хвиль за умови

$$u'(s) \to 0 \text{ при } |s| \to \infty \tag{4}$$

(відокремлені хвилі).

Введемо гільбертів простір

$$X = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}) \quad u(0) = 0\}$$

який наділений скалярним добутком

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u'(s) v'(s) ds.$$

Далі позначимо через X^+ конус неспадних функцій в X. Конус незростаючих функцій набуде вигляду $X^- = -X^+$. Всі представлені конуси є замкненими.

Із задачею (2), (4) пов’язується такий функціонал енергії

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{c^2}{2} (u')^2 - \sum_{m=1}^{M} U_m(D_m^+ u) \right) ds =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{c^2}{2} (u')^2 - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} a_m^2 D_m^+ u - \sum_{m=1}^{M} V_m(D_m^+ u) \right) ds,$$

визначений на X. Показано, що це C^1 функціонал, а його критичні точки – розв’язки задачі (2), (4). Простір X і функціонал J є інваріантними щодо модифікованих зміщень

$$(S_a v)(s) = v(s + a) - v(a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Варто підкреслити, що єдиним тривіальним розв'язком рівняння (2) у просторі X є $u = 0$.

Основний результат ілюструє така теорема:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(A_1)-(A_4)$ *і* $c > c_0$. *Тоді існує нетривіальний розв'язок* $u \in X^+$ $(u \in X^-)$ *задачі (2), (4).*

Для доведення теореми використано метод періодичних апроксимацій.

Таким чином, у статті встановлено умови існування відокремлених біжучих хвиль в системі типу Фермі-Пасти-Улама з нелокальною взаємодією.

Література:

1. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75–87.
2. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, № 5 (January). P. 453-462.
3. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen*. 2006. Vol. 39. P. 4955–4984.
4. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonliniear problems. *Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-1940*. 1955. Reprinted in Lect. Appl. Math. 1974. Vol. 15. 156 p.
5. Friesecke G., Wattis J.A.D. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Communications in Mathematical Physics.* 1994. Vol. 161. P. 391-418.
6. Friesecke G., Pego R. L. Solitary waves on FPU lattices, I. Qualitative properties, renormalization and continuum limit. *Nonlinearity.* 1999. Vol.12. P.1601-1627.
7. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices. London–Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
8. Pankov A. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam chains with nonlocal interaction. *Discrete & Continuous Dynamical Systems – S.* 2019. Vol.12, № 7. P.2097-2113.
9. Pankov A., Rothos V. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam lattices with saturable nonlinearities. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*. 2011. Vol. 30, № 3. P.835-849.
10. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці: дис....докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
11. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірпній ґратці. *Математичні студії.* 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.
12. Бак С., Ковтонюк Г., Лисак Б. Періодичні біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійностями на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики, комп'ютерних наук і технологій* : зб. наук. пр. / С. В. Подолянчук (голова) [та ін.] ; Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [Електронне мережне наукове видання]. Вінниця, 2021. Вип. 18. С. 12-15.

Науковий керівник: докт. фіз.-мат. наук, професор Бак Сергій Миколайович.