І. О. Рокіцький
О. Б. Панасенко

Застосування лінійної алгебри

Вінниця
2012

УДК 512.64:001(075.8)
ББК 22.14я73
Р 19

Рецензенти:

Сохацький Ф.М. — доктор фізико-математичних наук, проректор з науки та міжнародних зв'язків Вінницького соціально-економічного інституту університету «Україна»

Трохименко В.С. — кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри математики і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Р19 Рокіцький І. О. Застосування лінійної алгебри / І. О. Рокіцький, О. Б. Панасенко. — Вінниця : Вид. Главацька Р. В., 2012. — 240 с.

ISBN 978-966-2461-13-8

Рекомендовано до друку Вченою радою Інституту математики, фізики і технологічної освіти Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол №7 від 08.02.2012 р.)

Навчальний посібник містить різноманітні застосування лінійної алгебри, які мало відображені у вітчизняній спеціальній літературі з цієї дисципліни.

У першому розділі посібника описано застосування систем лінійних рівнянь в фізиці, хімії, економіці, демографії та ігрових задачах. Застосування матриць і детермінантів у різних галузях знань описані у другому розділі. У наступних розділах читач знайде застосування лінійної алгебри при захисті і передачі інформації, вивченні динаміки різних популяцій, соціології, біології та статистиці.

Посібник адресований в першу чергу викладачам і студентам різних спеціальностей, які вивчають лінійну алгебру. Багато прикладів і задач будуть корисними також для учнів старших класів, які цікавляться математикою та її застосуваннями.

Дизайн обкладинки: Смішний С.М.

ISBN 978-966-2461-13-8

Зміст

Передмова

Курс «Лінійна алгебра» є однією з найважливіших складових у математичній підготовці спеціалістів різних спеціальностей завдяки його широким і глибоким застосуванням. Засновником лінійної алгебри фактично є німецький математик Герман Гюнтер Грасман (1809–1877), який народився і прожив майже все своє життя у місті Щеціні (Німеччина). У своїх працях Г. Г. Грасман першим розглядав вектори без зв'язку їх з точками (як у геометрії) чи з силою, швидкістю або прискоренням (як у фізиці). Основним предметом вивчення у лінійній алгебрі є векторні простори та їх лінійні перетворення, які тісно пов'язані з матрицями. Рушійною силою всіх цих досліджень є розв'язування систем лінійних рівнянь. Лінійна алгебра знайшла свої застосування у фізиці, хімії, біології, економіці, статистиці, теорії кодування і криптографії, теорії графів, лінійному програмуванні та інших науках завдяки математичному моделюванню різних ситуацій за допомогою векторів і систем рівнянь.

Даний курс забезпечений кваліфікованою літературою на українській та російських мовах, в якій глибоко висвітлені питання теорії [1–7]. Проте у більшості з цих посібників мало приділяється уваги навіть найпростішим застосуванням лінійної алгебри в різних галузях знань. Тому випускники університетів мають слабку уяву про такі застосування, або представляють її однобоко (наприклад, тільки в інженерії чи економіці або іншій конкретній науці). У зарубіжній літературі питанню застосувань лінійної алгебри приділяється багато місця, що дозволяє випускникам бакалаврату мати досить широку уяву про місце лінійної алгебри у підготовці кваліфікованого спеціаліста.

Метою даного посібника є наблизити теоретичний курс лінійної алгебри до його застосувань та надати можливість студентам різних спеціальностей насолодитися можливостями лінійної алгебри. Тому тут досить мало теоретичних викладок, які можна знайти у посібниках [1–7, 10–12]. Проте автори вважали за необхідне на початку розділу або параграфа коротко викласти основні поняття теорії, які будуть застосовуватися у ньому. Це полегшить читання матеріалу і популяризує його.

Матеріал посібника поділено на 5 розділів. Кожний з них об'єднує ситуації, які математично моделюються подібним чином. Математичні моделі широко застосовуються у фізиці, хімії, інженерії, бізнесі, економіці, суспільних науках і навіть у дослідженні політичних процесів. Вони корисні для більш повного розуміння таких процесів та можуть бути використані для прогнозування їх поведінки у майбутньому. Математичні моделі, які ми будемо розглядати, у більшості випадків є *лінійними*, тобто кожна задача описується за допомогою лінійного рівняння, як правило, у векторній або матричній формі. Лінійні моделі важливі тому, що природні явища часто є лінійними або близькими до лінійних. Лінійні моделі також більш легко адаптовуються для комп'ютерних обчислень, ніж комплексні нелінійні моделі.

На написання цього посібника авторів надихнуло знайомство з книгою [10]. У процесі його підготовки були використані також інші доступні в літературі та Інтернеті джерела.

Розділ 1

Застосування систем лінійних рівнянь

Теоретичні відомості

Як відомо, систему m лінійних рівнянь з n невідомими можна записати у загальному вигляді так:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right.$$

де a_{ij} – коефіцієнти при невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а b_i – вільні члени.

Введемо позначення:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Тоді цю систему можна записати у матричній формі:

$$A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}.$$

Розширеною матрицею системи називають матрицю отриману дописуванням до головної матриці A стовпця вільних членів. Його прийнято відділяти вертикальною рискою.

Якщо у системі кількість рівнянь і невідомих однакові (тобто при $m = n$), то для її розв'язування можна застосувати такі методи.

1. Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих).

2. Правило Крамера у випадку, коли $|A| \neq 0$. В цьому випадку $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}$, де детермінант Δ_i отримано з $|A|$ шляхом заміни i-ого стовпця на стовпець вільних членів.

3. Обчислення оберненої матриці до A (якщо вона існує). В цьому випадку розв'язок системи знаходять за формулою $\vec{\mathbf{x}} = A^{-1}\vec{\mathbf{b}}$.

Детально ці способи розв'язування викладено у [1, 2, 4, 7, 10]. Відзначимо тільки, що ці способи не залежать від поля, з якого беруться коефіцієнти рівнянь системи. Це можуть бути довільні числа і навіть елементи скінченних полів виду $\mathbb{Z}_p$.

Якщо $m \neq n$, то систему розв'язують методом Гаусса.

1. Температурний розподіл на тонкій пластинці

Як відомо, однією з головних складових кожної гідроелектростанції є гребля, яка перегороджує річку. Межі такої греблі перебувають під дією таких трьох температурних факторів: температура води, температура землі, яка є основою греблі, та температурою повітря. Проектуальникам та інженерам потрібно знати температурний розподіл всередині греблі для того, щоб розуміти який температурний стрес діє на греблю у різні періоди часу. Якщо температури на поверхні дамби є стабільними протягом деякого часу, то температура всередині дамби досягає певної рівноваги протягом деякого часу. Знаходження врівноваженого температурного розподілу у різних точках дамби є бажаним, але надзвичайно важким. Діаграма на рис. 1.1 представляє цю ситуацію.

Для проектуальників літаків та космічних апаратів (супутників, кораблів, станцій, місяцеходів, марсоходів і т. ін.) дуже важливо знати, як розподіляється температура в обшивці таких

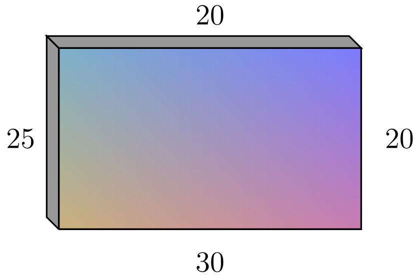
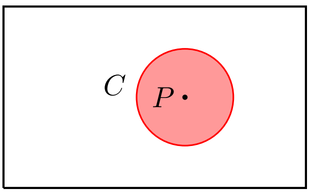


Рис. 1.1. Розподіл температур на межі пластини

апаратів для безпеки їхньої діяльності. Архітекторам різних промислових об'єктів слід знати температурний розподіл всередині стін доменних печей, реакторів, балок різноманітних перекриттів. Для вивчення такого розподілу допомагає розгляд перерізу поверхні, який можна уявити собі як тонку пластинку.

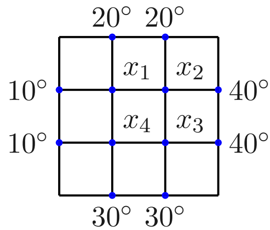


Важливим питанням при вивченні розподілу температур є визначення стаціонарного режиму температурного розподілу на тонкій пластинці в тих випадках, коли відома температура на її межі. Виявляється, що приблизна оцінка у різних точках такої пластинки ґрунтується на важливій фізичній властивості, яку називають *властивістю середнього значення*:

Якщо пластинка досягла температурної рівноваги, P — точка на пластинці, C — коло з центром у точці P, яке повністю міститься на пластинці, то температура у точці P є середнім значенням температур у точках цього кола.

Для спрощення обчислень пластинку покривають сіткою квадратиків і тоді точки P є вершинами квадратів, які лежать всередині тонкої пластинки.

Приклад 1. Припустимо, що пластинка, яка показана на рисунку нижче, представляє переріз секції металічної балки з незначним потоком нагріву у напрямі перпендикулярному до пластинки. Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 позначають температури в чотирьох вузлах однієї клітини в сітці на рисунку. Температура у вузлі приблизно рівна середній з чотирьох найближчих вузлів — лівого, верхнього, правого і нижнього[1].



Встановити, якими є температури у точках x_1, x_2, x_3, x_4.

Розв'язання. Для визначення температури у кожній точці складемо відповідні рівняння. Так, за згаданим принципом, для точки x_1 отримуємо рівняння

$$x_1 = \frac{10 + 20 + x_2 + x_4}{4},$$

тобто $4x_1 - x_2 - x_4 = 30$.

Аналогічні рівняння для інших точок будуть такими:

$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = 60, \quad -x_2 + 4x_3 - x_4 = 70 \quad \text{та} \quad -x_1 - x_3 + 4x_4 = 40.$$

Складаємо і розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_4 = 30, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 60, \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 70, \\ -x_1 - x_3 + 4x_4 = 40. \end{cases}$$

[1] Дивись Frank M. White, Heat and Mass Transfer (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing, 1991), pp. 145–149.

У матричній формі її можна записати так:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

При цьому вектор $\vec{\mathbf{x}}$ називають *вектором температурного розподілу* або *вектором врівноважених температур.*

Застосуємо метод Гаусса:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & 0 & -1 & 30 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & -60 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & 30 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ 0 & -1 & -4 & 15 & 190 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ 0 & -1 & -4 & 15 & 190 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 75 \\ 0 & 0 & -4 & 14 & 195 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 270 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22,5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 27,5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22,5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 27,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22,5 \end{array}\right].$$

Отже, $x_1 = 20°, x_2 = 27,5°, x_3 = 30°, x_4 = 22,5°$. ■

Вектор температурного розподілу може бути знайдений більш точно, якщо ми розглянемо сітку, яка має більше клітинок.

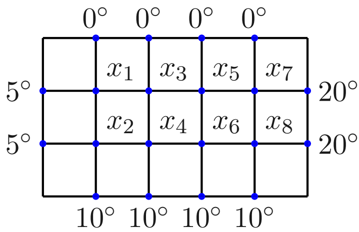
Вправи

1. Визначити вектор температурного розподілу у внутрішніх точках попередньої пластинки, якщо відома температура на її межі:

а) зліва – 25°, зверху – 20°, справа – 20°, знизу – 30°;

б) зліва – 15°, зверху – 10°, справа – 10°, знизу – 20°.

2. Розв'язок задачі стаціонарного розповсюдження нагрівання для пластинки на наступному рисунку



апроксимується через розв'язок рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, де

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & & & \\ & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & & \\ & & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & \\ & & & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ & & & & -1 & 0 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Пропущені елементи у A є нулями. Ненульові елементи A лежать у межах смуги вздовж головної діагоналі[1]. Знайти температури у відмічених точках.

3. Нехай у сітці з вправи 1(а) кожна сторона квадратної сітки розділена навпіл. Тоді ми отримаємо на тій же пластинці сітку, яка має 25 внутрішніх точок (рис. 1.2). Визначити вектор температурного розподілу у цих 25-и точках та порівняти x_7, x_9, x_{17}, x_{19} з температурами у цих точках, отриманими у вправі 1(а).

4. Вивчити, як зміни температури на межі стальної пластинки впливають на температури у внутрішніх точках пластинки.

[1] Такі смугові матриці з'являються у різних застосуваннях і часто є екстремально великими (з тисячами рядків і стовпців, але відносно вузькими смугами).

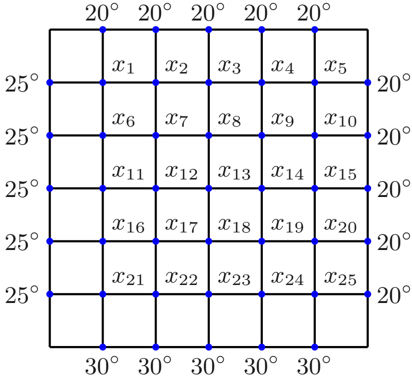
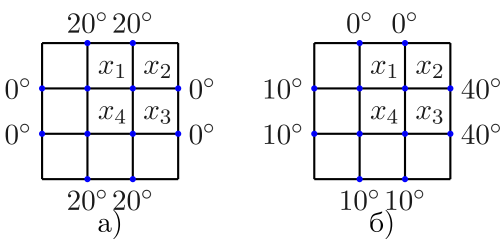


Рис. 1.2.

А. Почніть оцінювати температури x_1, x_2, x_3, x_4 у кожній з поставлених чотирьох точок на стальній пластинці по рисунку нижче. У кожному випадку, значення x_k приблизно дорівнює середній температурі чотирьох сусідніх точок. Дивись попередній приклад, де величини у вказаному порядку виявляється будуть (20; 27,5; 30; 22,5). Як цей список значень співвідноситься з вашими результатами для розставлених точок у (а) і (б)?

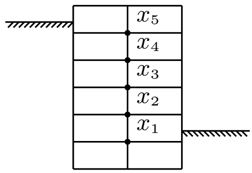
Б. Без проведення будь-яких обчислень здогадайтеся, які внутрішні температури у (а), коли всі температури на межі пластинки помножені на 3. Перевірте вашу здогадку.



5. Нехай гребля на річці має висоту 30 м та ширину 10 м. По верху греблі проходить автомобільна дорога. Переріз греблі має форму прямокутника і вода піднімається до відмітки 27 м у водосховищі та 7 м у нижньому б'єфі.

Знайти наближений розподіл температур в точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (через 5 м), якщо вектор температур (вода, земля, дорога, повітря) є таким:

а) взимку — $(5^\circ, 10^\circ, -5^\circ, -10^\circ)$;
б) навесні — $(10^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 10^\circ)$;
в) влітку — $(18^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 25^\circ)$;
г) восени — $(10^\circ, 10^\circ, 18^\circ, 12^\circ)$.



2. Застосування у хімії

Системи лінійних рівнянь знаходять застосування при розв'язуванні різних хімічних задач. Розглянемо два приклади, які ілюструють, як це відбувається.

Створення нових речовин.

Приклад 1. Для утворення певної нової хімічної речовини необхідні три різних інгредієнти: A, B та C. Перед реакцією взаємодії цих складових їх необхідно розчинити у воді кожну окремо. Нехай ми утворили розчини речовини A з концентрацією 1,5 г/см^3, речовини B з концентрацією 3,6 г/см^3 та речовини C з концентрацією 5,3 г/см^3. У процесі реакції взаємодії цих розчинів отримали 25,07 г нової хімічної речовини.

Якщо концентрації речовин A, B та C у розчинах будуть 2,5, 4,3 та 2,4 г/см^3 відповідно, то при взаємодії таких самих об'ємів цих розчинів отримаємо 22,36 г нової хімічної речовини.

Нарешті, якщо концентрації речовин A, B та C у розчинах будуть 2,7, 5,5 та 3,2 г/см^3 відповідно, то при взаємодії таких самих об'ємів цих розчинів отримаємо 28,14 г нової хімічної речовини.

Які об'єми (у кубічних сантиметрах) розчинів речовин A, B та C використовували у процесі цих реакцій?

Розв'язання. Нехай x, y, z — об'єми розчинів речовин відповідно A, B та C, які взаємодіяли у процесі згаданих в умові задачі реакцій. Тоді у першому випадку маса речовини A буде

1,5x, речовини B буде 3,6y та речовини C — 5,3z. Додаючи ці всі три маси ми отримали 25,07 г нової хімічної речовини. Тому маємо рівняння

$$1{,}5x + 3{,}6y + 5{,}3z = 25{,}07.$$

Проведемо аналогічні міркування у двох інших випадках та отримаємо ще два рівняння, які разом утворюють систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 1,5x & + & 3,6y & + & 5,3z & = & 25,07, \\ 2,5x & + & 4,3y & - & 2,4z & = & 22,36, \\ 2,7x & + & 5,5y & + & 3,2z & = & 28,14. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю цієї системи:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1,5 & 3,6 & 5,3 & 25,07 \\ 2,5 & 4,3 & 2,4 & 22,36 \\ 2,7 & 5,5 & 3,2 & 28,14 \end{array}\right].$$

Розв'язуючи дану систему одним з відомих способів (методом Гаусса, за правилом Крамера чи за допомогою обчислення оберненої матриці) ми отримаємо розв'язок системи:

$$x = 1{,}5, \quad y = 3{,}1, \quad z = 2{,}2.$$

■

Збалансування хімічних рівнянь.

Хімічні рівняння описують кількості субстанцій, які витрачаються і виробляються у хімічних реакціях.

Приклад 2. Коли згорає газ пропан, то пропан (C_3H_8) змішується з киснем (O_2), утворюючи двоокис вуглецю (CO_2) і воду (H_2O), у відповідності з рівнянням виду

$$(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \to (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O.$$

Для «балансу» цього рівняння хімік повинен знайти всі цілі числа x_1, x_2, x_3, x_4 такі, щоб загальне число атомів вуглецю (C), водню (H) і кисню (O) на лівій стороні узгоджувалося з відповідними числами атомів на правій (тому, що атоми не зникають і не виникають у реакції).

Розв'язання. Систематичний метод для збалансування хімічного рівняння полягає у складанні векторного рівняння, яке описує число атомів кожного типу, представлених у реакції. Оскільки дане рівняння залучає три типи атомів (вуглець, водень і кисень), то побудуємо вектор у $\mathbb{R}^3$ для кожного складника (реактанта) реакції і випишемо такі списки чисел «атомів на молекулу», як показано нижче:

$$\mathrm{C_3H_8}:\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix},\mathrm{O_2}:\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},\mathrm{CO_2}:\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\mathrm{H_2O}:\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow \text{Вуглець}\\ \leftarrow \text{Водень}\\ \leftarrow \text{Кисень}\end{matrix}$$

Для балансу даного хімічного рівняння коефіцієнти x_1, x_2, x_3, x_4 повинні задовольняти векторне рівняння

$$x_1\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Для розв'язання перенесемо всі члени в ліву частину (змінюючи знаки у третього і четвертого векторів):

$$x_1\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\-2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Рядкова редукція розширеної матриці для цього рівняння приводить до загального розв'язку

$$x_1=\frac{1}{4}x_4,\quad x_2=\frac{5}{4}x_4,\quad x_3=\frac{3}{4}x_4\quad \text{з вільною змінною } x_4.$$

Оскільки коефіцієнти у хімічних рівняннях повинні бути цілими, візьмемо $x_4 = 4$, і в такому випадку, $x_1 = 1, x_2 = 5$ і $x_3 = 3$. Збалансоване рівняння має вигляд

$$\mathrm{C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O}.$$

■

Рівняння залишається збалансованим, якщо, наприклад, кожний коефіцієнт подвоїти. У більшості випадків хіміки надають перевагу використанню балансового рівняння, коефіцієнти якого є найменш можливими цілими числами.

Вправи

1. Збалансувати хімічне рівняння

$$\mathrm{C_2H_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O.}$$

У наступних вправах 2 – 7 збалансувати хімічні рівняння, якщо це можливо.

2. Борний сульфід реагує з водою, утворюючи борну кислоту і газ сірчаний водень (запах тухлих яєць). Незбалансоване рівняння має вигляд

$$\mathrm{B_2S_3 + H_2O \quad \to \quad H_3BO_3 + H_2S.}$$

3. Коли фосфат натрію і нітрат барію змішані, то результатом є фосфат барію (як осад) і натрієва селітра. Незбалансоване рівняння має вигляд

$$\mathrm{Na_3PO_4 + Ba(NO_3)_2 \quad \to \quad Ba_3(PO_4)_2 + NaNO_3.}$$

4. Лікарський засіб «Алка-зельтцер» містить двовуглекислу соду ($\mathrm{NaHCO_3}$) і лимонну кислоту ($\mathrm{H_3C_6H_5O_7}$). Коли таблетку розчиняють у воді, наступна реакція виділяє содовий цитрат, воду і вуглекислий газ:

$$\mathrm{NaHCO_3 + H_3C_6H_5O_7 \;\to\; Na_3C_6H_5O_7 + H_2O + CO_2.}$$

5. Наступна реакція між перманганатом калію ($\mathrm{KMnO_4}$) і сульфатом марганцю у воді продукує двоокис марганцю, калійний сульфат і сірчану кислоту:

$$\mathrm{KMnO_4 + MnSO_4 + H_2O \;\to\; MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4.}$$

6. Якщо можливо, використайте точний арифметичний або раціональний формат для обчислень у збалансуванні наступної хімічної реакції:

$$\mathrm{PbN_6 + CrMn_2O_8 \;\to\; Pb_3O_4 + Cr_2O_3 + MnO_2 + NO.}$$

7. Наступна хімічна реакція може бути використана у деяких виробничих процесах, таких як виробництво миш'яку (арсену) ($\mathrm{AsH_3}$).

$$\mathrm{MnS + As_2Cr_{10}O_{35} + H_2SO_4 \;\to\; HMnO_4 + AsH_3 + CrS_3O_{12} + H_2O.}$$

3. Дослідження потокових мереж

Системи лінійних рівнянь природно виникають, коли вчені, інженери або економісти вивчають потоки певних величин через мережу. Наприклад, міські планувальники і дорожні інженери контролюють структуру транспортних потоків у мережі міських вулиць. Інженери водоканалу постійно здійснюють моніторинг мережі водопроводів міста. Інженери-електрики обчислюють струми, які протікають через електричні кола, а економісти аналізують розподіл продукції з виробництв до споживачів через мережу оптової і роздрібної торгівлі. Для багатьох мереж системи рівнянь залучають сотні і навіть тисячі змінних і рівнянь.

Мережа складається з точок, які називають *з'єднаннями* (або *вузлами*), та з прямих або дуг, які називають *гілками* (або *ланками*), що пов'язують деякі або всі вузли. При цьому вказується напрям потоку у кожній гілці і сумарний потік (або ступінь, швидкість) також показується або позначається через змінну.

Базисними припущеннями для потоків у мережі: 1) загальний потік у мережі дорівнює загальному потоку на виході з мережі; 2) загальний потік на вході у вузол дорівнює загальному потоку на виході з вузла. Наприклад, рис. 1.3 показує 30 одиниць речей, які течуть у вузол через одну гілку та, позначені через x_1 і x_2 потоки, які витікають з вузла через інші гілки.

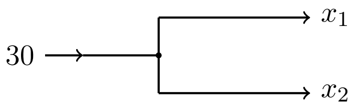


Рис. 1.3. З'єднання (вузол).

Оскільки потік зберігається у кожному з'єднанні, то виконується рівність $x_1 + x_2 = 30$. Подібним чином потік у кожному з'єднанні описується лінійним рівнянням. Проблемою аналізу мереж є визначення потоку у кожній гілці, коли відома певна часткова інформація (така як вхід у сітку).

Мережі транспортних потоків.

Приклад 1. Мережа на рис. 1.4 показує транспортний потік (у транспортних засобах за годину) через кілька вулиць з одностороннім рухом у центрі міста протягом другої половини дня. Визначити структуру загального потоку для мережі.

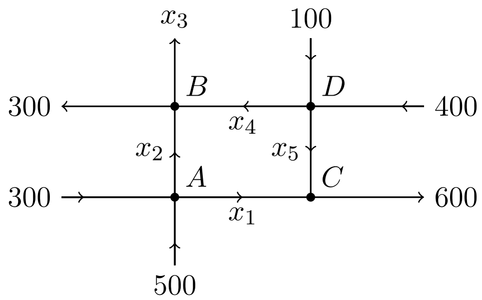


Рис. 1.4. Транспортний потік вулицями міста.

Розв'язання. Запишемо рівняння, які описують потік, і тоді знайдемо загальний розв'язок системи. Позначимо перехрестя вулиць і невідомі потоки у гілках так, як показано на рис. 1.4. На кожному перехресті, «потік у» і «потік з» однакові.

Перехрестя	**Потік в**		**Потік з**
A	$300 + 500$	$=$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_4$	$=$	$300 + x_3$
C	$100 + 400$	$=$	$x_4 + x_5$
D	$x_1 + x_5$	$=$	600

Також, загальний потік у сітці (500+300+100+400) дорівнює загальному потоку виходу з сітки $(300 + x_3 + 600)$, який спрощують до $x_3 = 400$. Комбінуючи це рівняння з перетвореними першими чотирма рівняннями, отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 800, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 300, \\ x_4 + x_5 = 500, \\ x_1 + x_5 = 600, \\ x_3 = 400. \end{cases}$$

Рядкова редукція асоційованої розширеної матриці веде до

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 600, \\ x_2 - x_5 = 200, \\ x_3 = 400, \\ x_4 + x_5 = 500. \end{cases}$$

Загальний потік моделі для сітки описано так

$$\begin{cases} x_1 = 600 - x_5, \\ x_2 = 200 + x_5, \\ x_3 = 400, \\ x_4 = 500 - x_5, \\ x_5 \text{ — вільна.} \end{cases}$$

Від'ємний потік у гілці сітки відповідає потокові у протилежному напрямі до того, який показано на моделі. Оскільки вулиці у цій задачі з одностороннім рухом, то жодна змінна тут не може приймати від'ємного значення. Цей факт веде до відомих обмежень на можливі значення змінних. Наприклад, $x_5 \leqslant 500$, оскільки x_4 не може бути від'ємним. Можуть накладатись і інші обмеження, пов'язані, наприклад, з ремонтом доріг та іншими непередбаченими обставинами. ■

Приклад 2. Діаграма на рис. 1.5 представляє транспортний потік через деякий відомий блок вулиць. Числа середніх потоків у транспортних засобах за годину «в» і «з» мережі показані у пікові години руху транспорту. Розрахувати загальний потік.

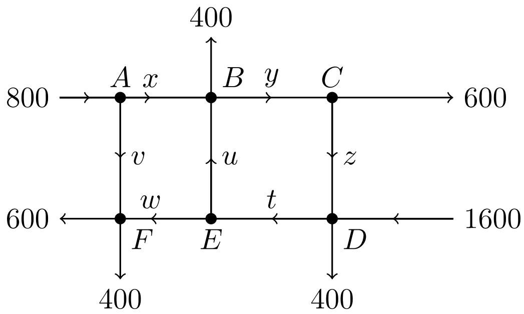


Рис. 1.5.

Розв'язання. Складаючи рівняння для кожного з перехресть, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + v = 800, \\ x - y + u = 400, \\ y - z = 600, \\ z - t = -1200, \\ t - u - w = 0, \\ v + w = 1000. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи можна записати так:

$$\begin{cases} x = w - 200, \\ y = t - 600, \\ z = t - 1200, \\ u = t - w, \\ v = 1000 - w \\ t \text{ — вільна}, \\ w \text{ — вільна}. \end{cases}$$

Якщо тепер, наприклад, $t = 1300$ та $w = 300$, то $x = 100$, $y = 700$, $z = 100$, $u = 1000$, $v = 700$.

Припустимо тепер, що вулиці від A до B і від B до C повинні бути закриті через ремонтні роботи, тобто $x = 0$, $y = 0$. Як можна реорганізувати рух транспорту?

Для відповіді на це запитання покладемо $x = 0$, $y = 0$ у розв'язок і отримаємо $t = 600$, $w = 200$, $z = -600$, $u = 400$, $v = 800$. Очевидно, що від'ємне значення для z є ненормальним. Для уникнення від'ємного потоку ми повинні змінити на протилежні напрями руху на вулицях, які зв'язують C і D. Ця зміна приведе до значення $z = 600$ замість $z = -600$. ■

Електричні мережі.

Струм у електричній мережі може бути описано системою лінійних рівнянь. Джерело струму таке, як сучасні силові батареї, викликає потік електронів через мережу. Коли струм проходить через резистор (такий як лампочка або мотор), деяка напруга струму «падає»; за законом Ома, це «падіння напруги» через резистор визначається рівнянням

$$U = RI,$$

де напруга U вимірюється у *вольтах*, опір R у *омах* (позначено через Ω), сила струму I у *амперах*.

Розглянемо електричну мережу на рис. 1.6, яка містить три замкнутих контури. Струми, які протікають у контурах 1, 2 і 3 позначені I_1, I_2 і I_3, відповідно. Вибрані напрями *контурних струмів* є довільними. Якщо напрям струму змінити на протилежний, то тоді дійсний напрям електричного струму є протилежним до вибраного на рисунку. Якщо напрям струму, показаного на рисунку від позитивної (довгої) сторони батареї до негативної (короткої) сторони, то напруга є додатною; у протилежному випадку вона є від'ємною.

Електричні мережі складаються з ланок (контурів) і вузлів аналогічно до вуличних мереж, де ланками є вулиці, а вузлами — перехрестя. Багато електричних проблем можуть бути змодельовані системами лінійних рівнянь. При цьому застосовуються відомі фізичні закони.

Базисними законами для електричних мереж є:

Закон Ома: Падіння напруги при проходженні струму через резистор дорівнює добутку струму на опір: $U = IR$**.**

Перший закон Кірхгофа: Сума струмів, які течуть у вузол, дорівнює сумі струмів, які витікають з вузла.

Другий закон Кірхгофа: Алгебраїчна сума падіння напруги RI у одному напрямі навкруги контура дорівнює алгебраїчній сумі напруги джерел у тому ж напрямі навкруги контура.

Приклад 3. Визначити сили струму контурів у мережі на рис. 1.6.

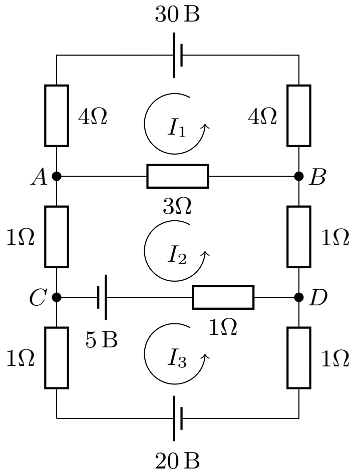


Рис. 1.6.

Розв'язання. У контурі 1, струм I_1 протікає через три резистори, і сума падіння напруги RI дорівнює

$$4I_1 + 4I_1 + 3I_1 = (4 + 4 + 3)I_1 = 11I_1.$$

Струм з контуру 2 також тече у частину контура 1, через коротку *ланку* між точками A і B. Відповідне падіння напруги RI є $3I_2$ вольт. Разом з тим, напрям струму для ланки AB у контурі 1 є протилежним до того, що вибраний для потоку у контурі 2, тому алгебраїчна сума всіх падінь напруги RI для контура 1 є $11I_1 - 3I_2$. Оскільки напруга у контурі 1 є $+30$ вольт, то за законом Кірхгофа маємо, що

$$11I_1 - 3I_2 = 30.$$

Рівняння для контуру 2 має вигляд

$$-3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5.$$

Доданок $-3I_1$ вказує на протікання струму у контурі 1 через ланку AB (від'ємне падіння напруги, тому що потік струму є протилежним до потоку у контурі 1). Доданок $6I_2$ є сумою всіх опорів у контурі 2, яку помножено на контурний струм. Доданок $-I_3 = (-1)I_3$ «приходить» з контуру 3 протікання струму через 1-омний резистор ланки CD у напрямі протилежному до потоку у контурі 2. Рівняння контуру 3 має вигляд

$$-I_2 + 3I_3 = -25.$$

Відзначимо, що 5-вольтна батарея у ланці CD підрахована як частина обох контурів 2 і 3, але вона для контуру 3 є -5 вольт, оскільки вибраний напрям для струму у контурі 3 від $-$ до $+$. 20-вольтова батарея є від'ємною з подібних міркувань.

Струми контуру знаходяться розв'язуванням системи

$$\begin{cases} 11I_1 & - & 3I_2 & & & = & 30, \\ -3I_1 & + & 6I_2 & - & I_3 & = & 5, \\ & - & I_2 & + & I_3 & = & -25. \end{cases}$$

Рядкові перетворення над розширеною матрицею приводять до розв'язку: $I_1 = 3$ A, $I_2 = 1$ A і $I_3 = -8$ A. Від'ємне значення для I_3 вказує, що дійсний струм у контурі 3 тече в протилежному напрямі до показаного на рис. 1.6. ■

Повчально бачити у попередній системі векторне рівняння:

$$I_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{\mathbf{r_1}}}}{\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}} + I_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{\mathbf{r_2}}}}{\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}} + I_3 \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{\mathbf{r_3}}}}{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{\mathbf{v}}}}{\begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ -25 \end{bmatrix}} \tag{1.1}$$

Перша координата кожного вектора відповідає першому контуру, друга — другому, а третя — третьому. Перший вектор $\vec{\mathbf{r_1}}$ перелічує опори у різних контурах, через які протікає струм I_1. Опори записані від'ємними, коли I_1 протікає проти напряму протікання у іншому контурі. Те ж саме стосується векторів $\vec{\mathbf{r_2}}$ і $\vec{\mathbf{r_3}}$. Матрична форма цієї системи має вигляд

$$R\vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{v}}, \quad \text{де} \quad R = [\vec{\mathbf{r}}_1 \quad \vec{\mathbf{r}}_2 \quad \vec{\mathbf{r}}_3] \quad \text{і} \quad \vec{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

і задає векторну форму закону Ома. Якщо всі контури струмів вибрані у однаковому напрямі (скажімо, проти годинникової стрілки), то всі координати поза головною діагоналлю матриці R будуть від'ємними.

Матричне рівняння робить лінійність цієї моделі легко видимою. Наприклад, якщо вектор напруги подвоєно, то вектор струму також повинен подвоїтися. Також, виконується *принцип суперпозиції*. Тому, розв'язок цього рівняння є сумою розв'язків рівнянь

$$R\vec{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R\vec{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad R\vec{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix}.$$

Кожне рівняння тут відповідає контуру тільки з одним джерелом струму (інші джерела будуть замінені на провід, що замикає контур). Модель для електричного струму є *лінійною* тому, що закони Ома і Кірхгофа є лінійними: напруга падає на резисторі *пропорційно* до струму, який протікає через нього (Ом) і *сума* падінь напруги у контурі дорівнює сумі напруг джерел у контурі (Кірхгоф).

Контурні струми у мережі можуть бути використані для визначення струму у кожній ланці мережі. Якщо тільки один контурний струм проходить через ланку (наприклад як від B до D на рис. 1.6), то струм ланки дорівнює струму контуру. Якщо більше ніж один контурний струм проходить через ланку, так як від A до B, то струм ланки є алгебраїчною сумою контурних струмів у ланці (*закон струмів Кірхгофа*). Наприклад, струм у ланці AB дорівнює $I_1 - I_2 = 3 - 1 = 2$ ампери, у напрямі для I_1. Струм у ланці CD дорівнює $I_2 + I_3 = 9$ ампер.

Прості електричні кола діляться на два типи: послідовні та паралельні. Для обох типів розбиваємо кола на частини послідовних і паралельних кіл, після чого обчислюємо значення для цих частин і використовуємо їх для обчислення опору вихідного кола. Тобто спочатку обчислюємо опір для кожної окремої частини послідовності. Далі, використовуючи знайдені значення, вважають, що кожна частина є окремим опором і обчислюють загальний опір кола.

Приклад 4. Знайти струми у електричному колі для кола на рисунку 1.7.

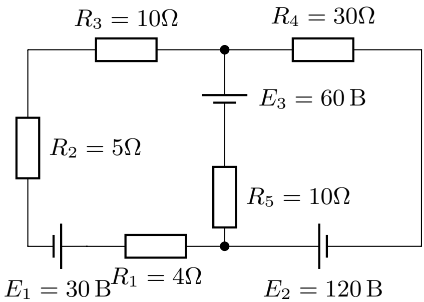


Рис. 1.7.

Розв'язання. Нехай струми протікають у кожній частині кола між вузловими точками. Ми маємо дві вузлові точки. Будемо вважати, що струми протікають за годинниковою стрілкою.

Нехай струм на ділянці $EFAB$ (рис. 1.8) дорівнює I_1, на ділянці $BCDE - I_3$, а на ділянці $EB - I_2$.

Використовуючи закон Кірхгофа для струму в вузлі B, отримаємо рівняння

$$I_1 + I_2 = I_3.$$

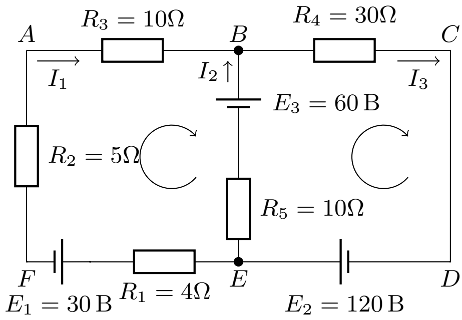


Рис. 1.8.

Для вузла E отримуємо аналогічне рівняння. Далі ми використаємо закон Кірхгофа для напруги

$$-4I_1 + (-30) - 5I_1 - 10I_1 + 60 + 10I_2 = 0.$$

Коли струм від батареї тече від (−) до (+) на ділянці EF, то різниця потенціалів дорівнює −30 і на ділянці FA, проходячи через резистор 5 Ом, напруга буде падати на $-5I_1$. Аналогічно ми можемо знайти падіння напруги на контурі $EFAB$.

На контурі $BCDE$ закон Кірхгофа для напруги дає рівняння

$$-30I_3 + 120 - 10I_2 + 60 = 0.$$

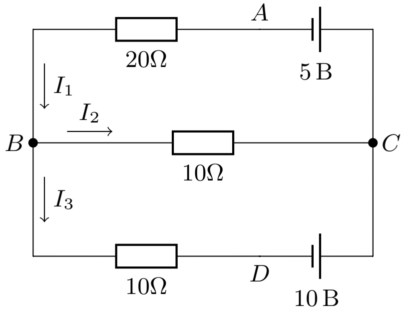
Тепер ми маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ -19I_1 + 10I_2 - = -30, \\ - 10I_2 - 30I_3 = -180. \end{cases}$$

Ця система може бути розв'язана методами лінійної алгебри. Вона має такий розв'язок: $I_1 = 2{,}8302, I_2 = 2{,}3774, I_3 = 5{,}2075.$ ■

Зауважимо, що методи лінійної алгебри є більш корисними, коли мережа є дуже складною і кількість невідомих велика.

Приклад 5. Визначити струми I_1, I_2 і I_3 для такої електричної сітки:



Розв'язання. Застосовуючи перший закон Кірхгофа до вузлів або отримаємо $I_1 = I_2 + I_3$, або

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Застосовуючи другий закон Кірхгофа до контурів $BDCB$ і $BCAB$ ми отримаємо рівняння $-10I_2 + 10I_3 = 10$ та $20I_1 + 10I_2 = 5$. Отже, маємо систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0, \\ -10I_2 + 10I_3 = 10, \\ 20I_1 + 10I_2 = 5. \end{cases}$$

Розширена матриця системи

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 10 \\ 20 & 10 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

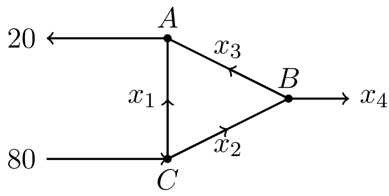
може бути приведена до зведеної східчастої форми

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 \end{array}\right].$$

Тому струми дорівнюють $I_1 = 0{,}4$, $I_2 = -0{,}3$ та $I_3 = 0{,}7$. Оскільки I_2 є від'ємним, то струм протікає від C до B, а не від B до C, як попередньо прогнозувалося на схемі. ■

Вправи

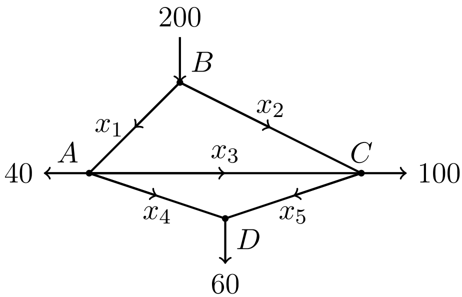
1. Знайти загальний потік схеми мережі, показаної на рисунку нижче. Припускаючи, що всі потоки є невід'ємними, знайти найбільше можливе значення для x_3.



2. А. Знайти загальний рух у схемі на мережі доріг, що показана на наступному рисунку (потік вимірюється у автомобілях за хвилину).

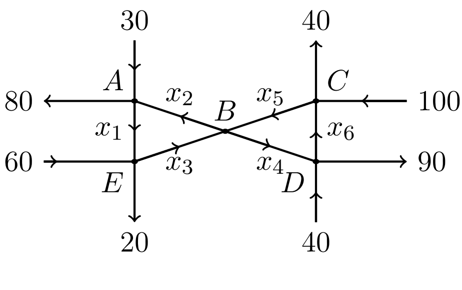
Б. Описати загальний рух у схемі, коли дорога з потоком x_4 є закритою.

В. Якщо $x_4 = 0$, то якого мінімального значення може набувати x_1?

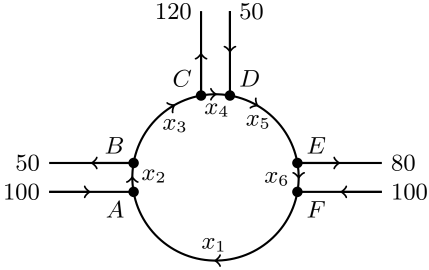


3. А. Знайти загальний потік транспорту схеми мережі, показаної на рисунку.

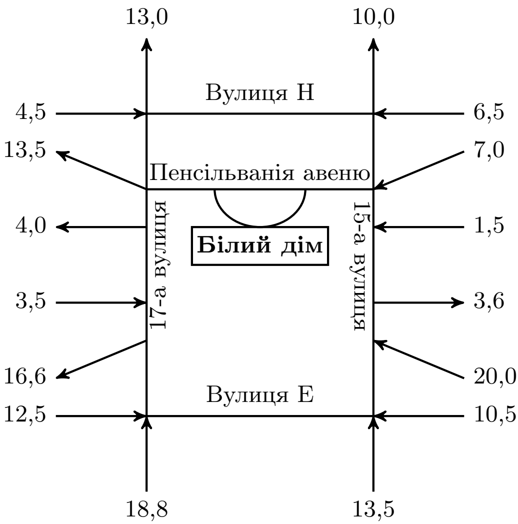
Б. Вважаючи, що потік повинен бути у вказаних напрямах, знайти мінімальні потоки у гілках позначених x_2, x_3, x_4 та x_5.



4. Перехрестя у Англії часто побудовані як односторонні «кругові» так, як показано на рисунку. Припустимо, що транспорт повинен рухатися у показаному напрямі. Знайти загальний розв'язок сітки потоку. Знайти найменше можливе значення для x_6.



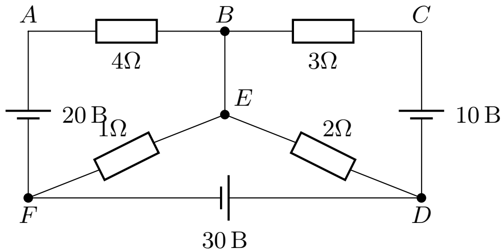
5. Наступна мережа вулиць існувала у столиці США Вашингтоні до 1995 року. Інтенсивність руху транспортних засобів у цій мережі вулиць протягом дня показана на наступному рисунку у тисячах одиниць.



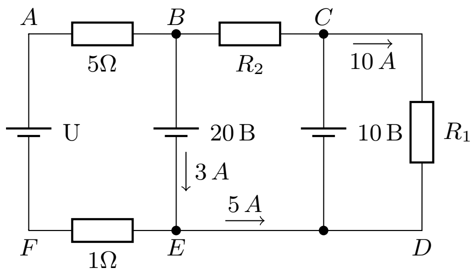
А. Знайдіть потік на кожній вулиці цієї мережі.

Б. У 1995 році уряд закрив рух транспортних засобів по вулиці Пенсільванія авеню перед Білим домом. Як це закриття вплинуло на інтенсивність руху транспортних засобів на інших вулицях?

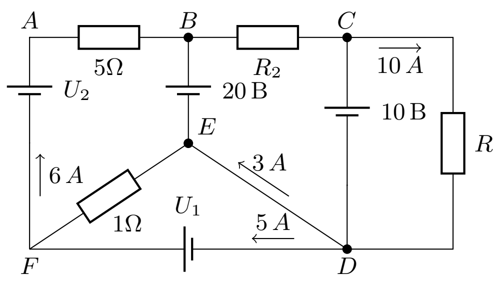
6. Знайти невідомі струми у електричному колі, зображеному на рисунку.



7. Знайти невідомі струми, напруги і опори для різних частин наступного електричного кола.

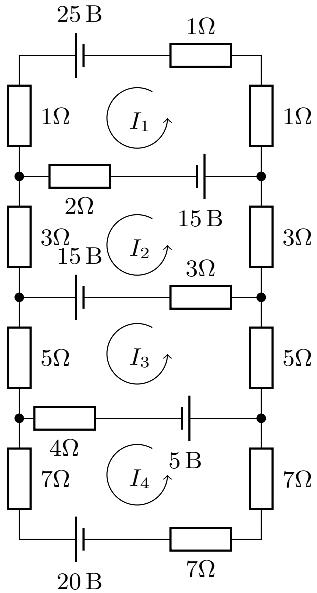


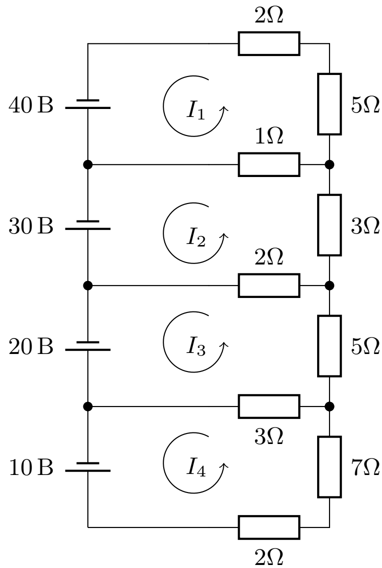
8. Знайти невідомі струми, напруги і опори для різних частин наступного електричного кола.



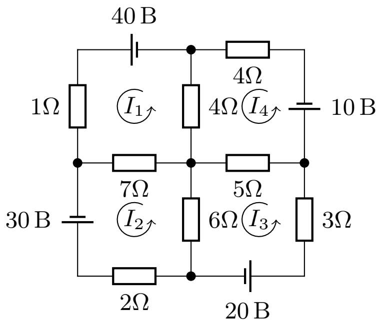
У вправах 9–12 записати матричне рівняння, яке визначає задані контури. Розв'язати систему для заданих контурів з допомогою комп'ютерних програм, призначених для складних математичних обчислень (MATLAB, Wolfram Mathematica і т. ін.).

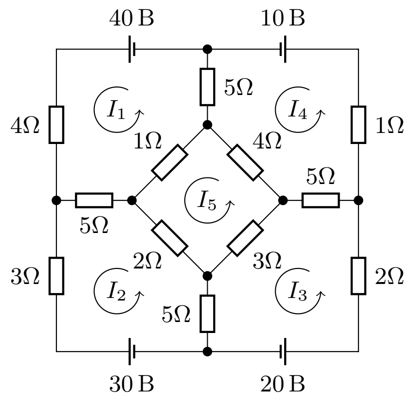
9, 10. Знайти струми у електричних колах:





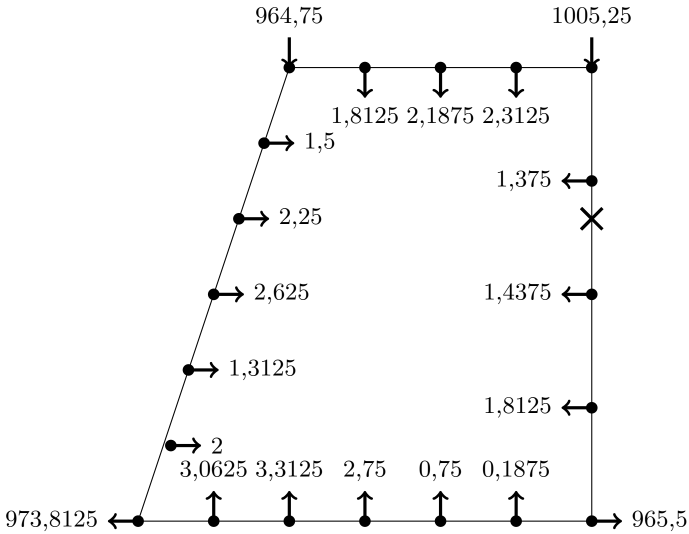
11, 12. Знайти струми у електричних колах:





13. Працівники водоканалу постійно проводять моніторинг водопровідної сітки міського мікрорайону, зображеного на наступному рисунку. Ця мережа підземних труб має перетини, де труби відходять до будинків, утворюючи сітку. Кожна секція водопроводу має свою інтенсивність потоку води, яка вимірюється у кубометрах за деякий часовий інтервал. Ця інтенсивність для деяких труб позначена на рисунку.

Будинки у цьому мікрорайоні споживають від 0,1875 до 3,3125 кубометра води за день.



А. Розгляньте задані потоки та знайдіть інтенсивність потоку у кожній секції водопроводу.

Б. Припустимо, що водопровід вийшов з ладу у точці, яка відмічена на рисунку знаком ×. Як ця подія вплине на інтенсивність потоку в інших трубах даної сітки?

4. Розрахунок харчових дієт

Формула для кембріджської дієти — популярної дієти у 80-х роках XX століття — ґрунтується на багатьох роках досліджень. Команда вчених у Кембріджському університеті, очолювана доктором Аланом Г. Говардом, запропонувала цю дієту після багаторічної клінічної роботи з пацієнтами з надмірною вагою. Дуже низькокалорійна формула дієти комбінує точний баланс вуглеводів, високоякісного протеїну і жиру разом з вітамінами, мінералами та відслідковуванням мікроелементів і електролітів. Мільйони людей використовували цю дієту, щоб досягти швидкої втрати ваги.

Для досягнення бажаних обсягів і пропорцій поживних речовин доктор Говард включав у дієту велике розмаїття продуктів харчування. Кожний продукт харчування забезпечував декілька потрібних складових, але не в коректній пропорції. Наприклад, обезжирене молоко було головним джерелом протеїну, але містило надто багато кальцію. Через це частину протеїну використовували з соєвого борошна, оскільки воно містить менше кальцію. Однак соєве борошно містить відносно багато жиру. Тому була додана сироватка, оскільки вона містила менше жиру у відношенні до кальцію. На жаль, сироватка містить багато вуглеводів... Тому задача точного підбору поживних речовин є достатньо складною.

Наступний приклад ілюструє цю задачу у маленькому масштабі. Запишемо у таблицю три складові, які потрібні у дієті, разом з сумами звичайних потреб поживних речовин на 100 грам кожної складової.

Поживні речовини	Обсяг (у грамах) на 100 г харчового продукту			Обсяг потреби по кембріджській дієті на один день (г)
	Нежирне молоко	Соєве борошно	Сироватка	
Протеїн	36	51	13	33
Вуглеводи	52	34	74	45
Жир	0	7	1,1	3

Приклад 1. Якщо можливо, знайти деяку комбінацію нежирного молока, соєвого борошна і сироватки для того, щоб забезпечити точну кількість протеїну, вуглеводів і жиру потрібних у дієту на один день відповідно з наведеною таблицею.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2 і x_3 позначають кількості одиниць (від 100 г) цих продуктів відповідно. Один з підходів до розв'язання цієї задачі полягає в наступному: одержати рівняння для кожної поживної речовини окремо. Наприклад, добуток

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 \quad \text{одиниць} \\ \text{нежирного молока} \end{array}\right\} \cdot \left\{\begin{array}{c} \text{протеїну на одиницю} \\ \text{нежирного молока} \end{array}\right\}$$

визначає кількість протеїну, що надходить до організму з x_1 одиницями нежирного молока. До цієї кількості ми могли б тоді додати подібні добутки для соєвого борошна і сироватки та встановити остаточну суму, що дорівнює обсягу протеїну, який нам потрібен. Аналогічні обчислення могли б бути зроблені для кожної поживної речовини.

На нашу думку більш ефективний і концептуально простіший метод полягає в тому, щоб розглянути «вектор поживних речовин» для кожного харчового продукту і побудувати тільки одне векторне рівняння. Обсяг речовин поставлених x_1 одиницями нежирного молока при цьому є добуток скаляра на вектор

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Скаляр} & & \textbf{Вектор} \\ \left\{\begin{array}{c} x_1\text{одиниць} \\ \text{молока} \end{array}\right\} & \cdot & \left\{\begin{array}{c} \text{поживних речовин на} \\ \text{одиницю молока} \end{array}\right\} = x_1\vec{\mathbf{a}}_1, \end{array} \tag{1.2}$$

де $\vec{\mathbf{a}}_1$ — перший стовпець у наведеній таблиці. Нехай $\vec{\mathbf{a}}_2$ і $\vec{\mathbf{a}}_3$ будуть відповідні вектори для соєвого борошна і сироватки, $\vec{\mathbf{b}}$ — вектор, координати якого перелічують загальні суми потрібних речовин (останній стовпець таблиці). Тоді $x_2\vec{\mathbf{a}}_2$ і $x_3\vec{\mathbf{a}}_3$ дають обсяги поживних речовин, що містяться в x_2 одиницях соєвого борошна і x_3 одиницях сироватки, відповідно. Тоді отримаємо векторне рівняння

$$x_1\vec{\mathbf{a}}_1 + x_2\vec{\mathbf{a}}_2 + x_3\vec{\mathbf{a}}_3 = \vec{\mathbf{b}}. \tag{1.3}$$

Рядкова редукція розширеної матриці для відповідної системи рівнянь показує, що

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 36 & 51 & 13 & 33 \\ 52 & 34 & 74 & 45 \\ 0 & 7 & 1{,}1 & 3 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}277 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}392 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}233 \end{array}\right]$$

Таким чином, до трьох значущих цифр дієта вимагає 0,277 порції нежирного молока, 0,392 порцій соєвого борошна і 0,233 порції сироватки для того, щоб отримати бажані обсяги протеїну, вуглеводів і жиру. ■

Важливим є те, що значення змінних x_1, x_2 і x_3, знайдені вище, є невід'ємними. Це необхідно для розв'язку, щоб бути фізично можливим. З великим числом поживних речовин, які потрібні в дієту, може бути необхідно використати велике число харчових продуктів, щоб отримати бажану систему рівнянь з «невід'ємним» розв'язком. Тому, багато різних комбінацій продуктів можуть потребувати перевірки для знаходження систем рівнянь з таким розв'язком. Фактично, виробник кембріджської дієти був спроможний постачати 31 поживну речовину в точному обсязі, використовуючи тільки 33 харчових продукти.

Задача побудови дієти веде до *лінійного* рівняння (1.3) тому, що обсяг речовин, поставлених кожним продуктом харчування, може бути записаний у вигляді добутку скаляра на вектор, як в (1.2). Тому, поживні речовини, поставлені через продукти харчування *пропорційні* до обсягу продукту харчування, доданого в дієту для змішування. Також, кожна речовина у суміші є *сумою* обсягів цієї речовини з кожного продукту харчування.

Задачі формулювання спеціалізованих дієт для людей і домашніх тварин трапляються часто. Як правило, вони обробляються технікою лінійного програмування. Наш метод побудови векторних рівнянь часто спрощує завдання формулювання таких задач.

Вправи

1. Вміст сніданку з харчових пластівців зазвичай перераховує число калорій і кількості протеїну, вуглеводів і жиру вміщеного в одну порцію пластівців. Кількості для двох з них дані нижче у таблиці.

Поживні речовини	Харчова інформація для порції пластівців (100 г)	
	1	2
Калорії	110	130
Протеїн (г)	4	3
Вуглеводи (г)	20	18
Жир (г)	2	5

Припустимо, що суміш цих двох пластівців було зроблено так, що вона містить точно 295 калорій, 9 г протеїну, 48 г вуглеводів і 8 г жиру.

А. Скласти векторне рівняння для цієї задачі та пояснити, що введені змінні представляють.

Б. Записати еквівалентне матричне рівняння і визначити, чи можна приготувати очікувану суміш пластівців, і у випадку позитивної відповіді вказати, як це слід зробити.

2. Одна порція (28 г) вівсяних пластівців «Краклін» постачає 110 калорій, 3 г протеїну, 21 г вуглеводів і 3 г жиру. Одна порція (28 г) вівсяних пластівців «Хрусткі» постачає 110 калорій, 2 г протеїну, 25 г вуглеводів і 0,4 г жиру.

А. Створити матрицю B і вектор $\vec{\mathbf{u}}$ такі, що $B\vec{\mathbf{u}}$ визначає кількість калорій, протеїну, вуглеводів і жиру, які містяться у суміші трьох порцій вівсяних пластівців «Краклін» і двох порцій «Хрустких».

Б. Припустимо, що ви хочете суміш з більшою кількістю протеїну, ніж у «Хрустких», але з меншою кількістю жиру, ніж у вівсяних пластівцях «Краклін». Чи можливо для такої суміші пластівців очікувати 110 калорій, 2,25 г протеїну, 24 г вуглеводів і 1 г жиру? Якщо так, то якою є суміш?

3. Одна порція (100 г) вівсяних пластівців «Екстра №1» Новоукраїнського комбінату хлібопродуктів постачає 305 калорій, 11,0 г білків, 6,2 г жирів і 51,0 г вуглеводів. Одна порція (100 г) кукурузних пластівців «Веселий Роджер» постачає 346,1 калорій, 6,3 г білків, 2,9 г жирів і 74,3 г вуглеводів. Чи можлива суміш двох видів таких пластівців, щоб вона забезпечила 975 калорій, 20 г білків, 8 г жирів і 200 г вуглеводів?

4. Кембріджська дієта постачає 0,8 г кальцію на день в додаток до поживних речовин, перелічених у таблиці до наведеного вище прикладу. Кількість кальцію, яка поставляється однією порцією (100 г) трьох складових у Кембріджській дієті є наступною: 1,26 г з нежирного молока, 0,19 г з соєвого борошна і 0,8 г з сироватки. Іншим складовим продуктом у дієтичній суміші є відокремлений соєвий протеїн, який поставляє наступні поживні речовини у одній порції: 80 г протеїну, 0 г вуглеводів, 3,4 г жиру і 0,18 г кальцію.

А. Скласти матричне рівняння, розв'язок якого визначає кількості нежирного молока, соєвого борошна, сироватки і відокремленого соєвого протеїну необхідних для того, щоб забезпечити точні кількості протеїну, вуглеводів, жиру і кальцію у кембріджській дієті.

Б. Розв'язати складене в п. А рівняння.

5. Дієтолог планує страву, яка постачає відомі кількості вітаміну C, кальцію і магнію. Використовуються три продукти; їх кількості вимірюються у певних одиницях. Поживні речовини, які поставляються цими продуктами, і дієтичні вимоги задані у таблиці.

Поживна речовина	Міліграми (мг) поживних речовин у одиниці продукту			Сума потрібних поживних речовин
	Прод. 1	Прод. 2	Прод. 3	
Вітамін C	10	20	20	100
Кальцій	50	40	10	300
Магній	30	10	40	200

Записати векторне рівняння для цієї задачі та розв'язати його.

5. Різницеві рівняння у демографії

У багатьох сферах діяльності, зокрема екології, економіці, інженерії, виникає потреба у математичних моделях динамічних систем, які змінюються з часом. Декілька властивостей системи, кожна з яких виміряна у дискретних часових інтервалах, утворюють послідовність векторів $\vec{\mathbf{x}}_0$, $\vec{\mathbf{x}}_1$, $\vec{\mathbf{x}}_2, \ldots$. Координати вектора $\vec{\mathbf{x}}_k$ дають інформацію про *стан* системи у час k-ого вимірювання.

Якщо існує матриця A така, що $\vec{\mathbf{x}}_1 = A\vec{\mathbf{x}}_0$, $\vec{\mathbf{x}}_2 = A\vec{\mathbf{x}}_1$ і, загалом,

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

то (1.4) називають **лінійним різницевим рівнянням** (або **рекурентним відношенням**). Для такого рівняння можна обчислити вектори $\vec{\mathbf{x}}_1$, $\vec{\mathbf{x}}_2$ і т. д. за умови, що $\vec{\mathbf{x}}_0$ відоме. При розгляді марківських ланцюгів у розділі 4 ми будемо описувати, що може трапитися з $\vec{\mathbf{x}}_k$, якщо k зростає нескінченно. Наступний приклад ілюструє як виникає різницеве рівняння при розв'язанні конкретної проблеми.

Приклад 1. Важливою проблемою демографії є дослідження міграцій населення — переміщення груп людей з одного регіону в інший. Розглянемо просту модель змін у чисельності населення сучасного міста і прилеглих до нього приміських районів упродовж декількох років. Зафіксуємо початковий рік — наприклад, 2010 — і позначимо населення міста і передмість у цей рік через r_0 і s_0 відповідно. Нехай $\vec{\mathbf{x}}_0$ — вектор населення

$$\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Міське населення у 2010 році} \\ \text{Приміське населення у 2010 році} \end{array}$$

Для 2011 і наступних років, позначимо населення міста і передмість векторами

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} r_2 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} r_3 \\ s_3 \end{bmatrix}, \ldots.$$

Наша мета описати математично, як ці вектори можуть бути пов'язані між собою.

Розв'язання. Припустимо в результаті дослідження було встановлено, що кожен рік близько 5% міського населення переїжджає у передмістя (95% залишається у місті), тоді як 3% приміського населення переїжджає у місто (і, отже, 97% залишається у передмісті, див. рис. 1.9).

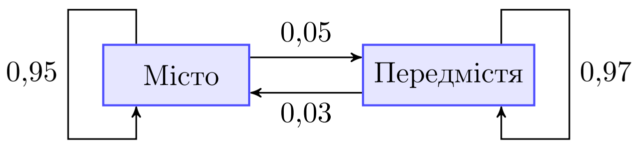


Рис. 1.9. Річна процентна міграція між містом і передмістям.

Через рік початкові r_0 людей у місті тепер розподілилися між містом і передмістям так

$$\begin{bmatrix} 0{,}95r_0 \\ 0{,}05r_0 \end{bmatrix} = r_0 \begin{bmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}05 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Залишилися у місті} \\ \text{Виїхали у передмістя.} \end{array} \tag{1.5}$$

s_0 людей з передмістя у 2010 році перерозподілилися після першого року так

$$s_0 \begin{bmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}97 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Виїхали у місто} \\ \text{Залишилися у передмісті.} \end{array} \tag{1.6}$$

Вектори з (1.5) і (1.6) додаються для обчислення всього населення у 2011 році.[1] Тому

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = r_0 \begin{bmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}05 \end{bmatrix} + s_0 \begin{bmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix}.$$

Останню рівність можна записати в такому вигляді

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = M\vec{\mathbf{x}}_0, \tag{1.7}$$

де матриця M (назвемо її **міграційною матрицею**) визначена з наступної таблиці:

Виїхали з:		**Переїхали у:**
міста	передмістя	
0,95	0,03	місто
0,05	0,97	передмістя

Рівняння (1.7) описує як чисельність населення змінюється з 2010 по 2011 р. Якщо міграційні відсотки залишаються постійними впродовж кількох років, то зміна населення з 2011 до 2012 буде задана рівністю

$$\vec{\mathbf{x}}_2 = M\vec{\mathbf{x}}_1,$$

і аналогічно з 2012 до 2013 і в наступні роки. Загалом,

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = M\vec{\mathbf{x}}_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

Послідовність векторів $\vec{\mathbf{x}}_0$, $\vec{\mathbf{x}}_1$, $\vec{\mathbf{x}}_2, \ldots$. описує населення регіону місто/передмістя періодично протягом років.

[1] Для спрощення нами не враховуються такі важливі складники руху населення як народжуваність, смертність і міграція «в» і «з» регіонів у досліджувані місто/передмістя.

Обчислимо населення описаного регіону для 2011 і 2012 років, якщо відомо, що на початку 2010 року 600 000 жителів жили у місті і 400 000 — у передмісті.

Вихідне населення у 2010 році є $\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 600\,000 \\ 400\,000 \end{bmatrix}$. Для 2011 року

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600\,000 \\ 400\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 582\,000 \\ 418\,000 \end{bmatrix}.$$

Для 2012 року

$$\vec{\mathbf{x}}_2 = M\vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 582\,000 \\ 418\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 565\,440 \\ 434\,560 \end{bmatrix}.$$

Як бачимо, міське населення з часом зменшується, а приміське — збільшується. Цікаво, що буде з цією тенденцією через багато років. ■

Модель для руху населення у (1.8) є *лінійною*, оскільки відповідність $\vec{\mathbf{x}}_k \mapsto \vec{\mathbf{x}}_{k+1}$ є лінійним перетворенням.

Вправи

1. У деякому регіоні кожного року близько 5% міського населення переїжджає в передмістя і близько 4% приміського населення переїжджає у місто. На початку 2000 року у місті проживало 800 000 жителів, а у передмісті — 200 000. Скласти різницеве рівняння, яке описує цю ситуацію, позначивши через $\vec{\mathbf{x}}_0$ вихідне населення у 2000 році. Спрогнозувати населення у місті та передмісті на початок 2002 року. (Інші фактори, що можуть впливати на чисельність населення, не враховувати).

2. У деякому регіоні кожного року близько 7% міського населення переїжджає в передмістя і близько 4% приміського населення переїжджає у місто. У 2000 році проживало 700 000 жителів у місті і 500 000 у передмісті. Скласти різницеве рівняння, яке описує цю ситуацію, позначивши через $\vec{\mathbf{x}}_0$ вихідне населення у 2000 році. Встановити населення у місті і в передмісті через два роки.

3. На 1.01.2010 р. населення України склало 45,963 млн. осіб, в т.ч. населення Вінницької області — 1,643 млн. осіб. Протягом року 10 216 осіб переїхали з Вінницької області до інших регіонів

України. Водночас до Вінницької області з інших областей прибуло 8879 осіб.

А. Встановіть міграційну матрицю для цієї ситуації, використавши 5 десяткових знаків після коми для міграційного руху «в» та «з» Вінницької області. Як Ви створюєте міграційну матрицю?

Б. Використовуючи математичні програмні засоби, спрогнозуйте чисельність населення Вінницької області станом на 2020 рік, припускаючи, що міграційні темпи не будуть змінюватись впродовж 10 років. Ці обчислення не враховують показники природного руху населення (народжуваності, смертності) та зовнішньої (міждержавної) міграції.

4. Парк прокату автомобілів однієї фірми у американському місті Канзас має у своєму розпорядженні 450 автомобілів у трьох місцях: аеропорту, східному та західному офісах. Арендований автомобіль в одному місці може бути повернений у будь-яке з трьох місць. Спостереження показують, що різна кількість автомобілів повертається у кожне місце так як показано у наступній таблиці.

Автомобілі орендовані з			**Повернені у**
Аеропорту	Східного офісу	Західого офісу	
0,97	0,05	0,10	Аеропорт
0,00	0,90	0,05	Східний офіс
0,03	0,05	0,85	Західний офіс

Припустимо, що в понеділок 304 автомобілі знаходяться у аеропорту (або орендовані з нього), 48 автомобілів — у східному офісі і 98 автомобілів — у західному офісі. Який буде орієнтовний розподіл автомобілів у середу?

5. Нехай матриця M і $\vec{\mathbf{x}}_0$ такі, як у наведеному прикладі.

А. Обчисліть вектори населення $\vec{\mathbf{x}}_k$ для $k = 1, \ldots, 20$. Які закономірності ви помітили?

Б. Повторіть завдання А з вихідною чисельністю населення 350 000 у місті і 650 000 у передмістях.

6. Однорідні системи і модель закритої економіки

Для того, щоб розуміти і здійснювати належне керівництво економікою країни або окремого регіону необхідно познайомитися з відомими моделями, які базуються на різних секторах економіки. Модель Леонтьєва є однією зі спроб у цьому напрямку. Вона ґрунтується на припущенні, що кожна індустрія у економіці має два типи попиту: зовнішній попит (з систем зовні) і внутрішній попит (попит однієї індустрії на інші у цій же системі). Модель Леонтьєва представляє економіку як систему лінійних рівнянь. Її запропонував у 30-х роках минулого століття професор Гарвардського університету В. Леонтьєв[1], який розробив математичну модель економіки Сполучених Штатів Америки, розділивши економіку країни на 500 економічних секторів. За свій успіх професор В. Леонтьєв був нагороджений Нобелівською премією в галузі економіки 18 жовтня 1973 року.

Закрита модель Леонтьєва. Розглянемо економіку, яка складається з n незалежних галузей (секторів) $S_1, \ldots, S_n$. Це означає, що кожна галузь витрачає деякі вироблені товари на інші галузі, включаючи себе (наприклад, енергогенеруюча компанія для виробництва електроенергії витрачає її на свої власні потреби). Така економіка є **закритою**, бо вона задовольняє свої власні потреби, тобто немає товарів, які входять або виходять з

[1]Василь Леонтьєв (05.08.1905–05.02.1999) виріс у сім'ї професора економіки Василя Васильовича Леонтьєва і Євгенії Борисівни (Злати Бенціонівни) Бекер. У 1925 році завершив вивчення філософії і соціології в Ленінградському університеті. Пізніше вивчав економічні науки у Берліні і за дисертацію «Кругообіг економіки» отримав докторську ступінь. У 1928–31 роках працював у Китаї радником міністра залізничного транспорту. У 1931 році переїхав у США та став співробітником Національного бюро економічних досліджень. Після одруження на американській громадянці у 1932 році через рік отримав американське громадянство. Пізніше працював викладачем Гарвадського та Нью-Йоркського університетів, створив і керував американським інститутом економічного аналізу. Після початку Другої світової війни працював консультантом з економічного планування для військово-повітряних сил США. Дослідження Леонтьєва стосуються процесів заміщення одних частин суспільного продукту іншими (за вартістю й натуральною формою). Автор методу економічного аналізу «витрати–випуск».

системи. Нехай m_{ij} — це число умовних одиниць продукції, що виробляється галуззю S_i, яка необхідна для виробництва однієї одиниці продукції галузі S_j. Якщо p_k — це рівень виробництва індустрії S_k, то $m_{ik}p_k$ представляє кількість одиниць продукції вироблених галуззю S_i, що витрачено на потреби галузі S_k. Тоді загальна кількість продукції, що виробляється галуззю S_i, дорівнює

$$p_1 m_{i1} + p_2 m_{i2} + \cdots + p_n m_{in}.$$

Загальне вартісне значення (у будь-яких грошових одиницях) валового (загального) випуску сектору є **ціною** цього випуску. Леонтьєв довів наступний результат.

Існує *рівновага цін*, яка може бути поставлена у відповідність до валових (загальних) випусків різних секторів таким шляхом, що прибуток кожного сектору точно балансує з його витратами.

Для того, щоб мати баланс закритої економіки (тобто, щоб існувала рівновага цін по Леонтьєву), загальна вартість продукції кожної галузі повинна дорівнювати загальним витратам. Це призводить до системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} m_{11}p_1 & + & m_{12}p_2 & + & \cdots & + & m_{1n}p_n & = & p_1, \\ m_{21}p_1 & + & m_{22}p_2 & + & \cdots & + & m_{2n}p_n & = & p_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1}p_1 & + & m_{n2}p_2 & + & \cdots & + & m_{nn}p_n & = & p_n. \end{cases}$$

Якщо позначити

$$C = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \vec{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix},$$

то остання система може бути записана у вигляді $C\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}$. При цьому C називається **матрицею «витрати-випуск» (споживчою матрицею або матрицею прямих витрат)**. Вектор $C\vec{\mathbf{p}}$ фактично є вектором витрат для виробництва продукції рівня $\vec{\mathbf{p}}$.

На вектор $\vec{\mathbf{p}}$, який задовольняє рівняння $C\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}$, накладається природна умова: він повинен мати невід'ємні координати, і принаймні одна з них повинна бути додатнім числом (інакше індустрія не працює). У такому випадку ми будемо писати $\vec{\mathbf{p}} \geqslant 0$.

Приклад 1. Припустимо, що економіка деякого регіону перебуває у залежності від трьох галузей: сфери обслуговування, енергетики і видобутку нафти. Вивчаючи діяльність цих трьох галузей за період у один рік, дослідники помітили наступне:

1. Для створення однієї одиниці належного обслуговування галузь сервісу повинна затратити 0,3 одиниці власного продукту, 0,4 одиниці енергетики і 0,3 одиниці нафти для проведення своєї діяльності.
2. Для створення однієї одиниці енергетики енергогенеруюча фабрика повинна купити 0,3 одиниці сервісу, 0,1 одиниці власного продукту і 0,6 одиниці нафти.
3. Нарешті, видобуток нафти вимагає 0,3 одиниці сервісу, 0,5 одиниці енергетики і 0,2 одиниці власного продукту для виробництва однієї одиниці нафти.

Знайти рівень виробництва кожної з цих галузей для задоволення внутрішніх і зовнішніх запитів, вважаючи, що модель є **закритою**, тобто ніякі товари не приходять і не виходять з системи.

Розв'язання. Дані задачі можна записати у наступну таблицю.

Галузі як виробники продуктів	Галузі як споживачі ресурсів		
	Сервіс	Енергетика	Видобуток нафти
Сервіс	0,3	0,3	0,3
Енергетика	0,4	0,1	0,5
Видобуток нафти	0,3	0,6	0,2

Введемо такі змінні:

p_1 — рівень виробництва для індустрії сервісу;

p_2 — рівень виробництва для енергогенеруючої фабрики (індустрії енергетики);

p_3 — рівень виробництва для індустрії видобутку нафти.

Оскільки модель є замкнутою, то загальні витрати кожної індустрії повинні дорівнювати загальному виробництву. Це призводить до такої лінійної системи:

$$\begin{cases} 0,3p_1 & + & 0,3p_2 & + & 0,3p_3 & = & p_1, \\ 0,4p_1 & + & 0,1p_2 & + & 0,5p_3 & = & p_2, \\ 0,3p_1 & + & 0,6p_2 & + & 0,2p_3 & = & p_3. \end{cases}$$

Матриця «витрати-випуск» має вигляд:

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

і система $C\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}$ може бути записана у вигляді $(C - I)\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{0}}$, де I – одинична матриця. Відзначимо, що ця однорідна система має безліч розв'язків (і, зокрема, нетривіальний розв'язок). Розширена матриця цієї однорідної системи

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}9 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \end{array}\right]$$

зводиться до матриці

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0,82 & 0 \\ 0 & 1 & -0,92 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Покладемо $p_3 = t$ і тоді загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} p_1 = 0,82t, \\ p_2 = 0,92t, \\ p_3 = t. \end{cases}$$

Як зазначалося вище, значення змінних у цій системі повинні бути невід'ємними для того, щоб модель мала зміст. Іншими словами, $t \geqslant 0$. Беручи для прикладу $t = 100$, будемо мати такий частинний розв'язок

$$\begin{cases} p_1 = 82 \quad (\text{од.}), \\ p_2 = 92 \quad (\text{од.}), \\ p_3 = 100 \quad (\text{од.}) \end{cases}$$

■

Лінійна модель міжнародної торгівлі.

Розглянемо n країн, які торгують між собою. Для кожного $i = 1, 2, \ldots, n$ позначимо через x_i торговий бюджет i-ої країни, тобто частину грошових ресурсів, які i-а країна витрачає на купівлю товарів у цих n країн.

Нехай a_{ij} – частина бюджету x_j, яку j-а країна витрачає на закупівлю товарів у i-ій країні. Розглянемо матрицю, утворену цими числами

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Якщо торговий бюджет витрачається тільки на закупівлю всередині країни та за її межами, то виконується рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Матриця, у якої сума елементів кожного стовпця дорівнює одиниці називається **структурною матрицею торгівлі.**

Для i-ої країни загальний дохід від внутрішньої і зовнішньої торгівлі виражається формулою

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n.$$

Торгівля n країн вважається **бездефіцитною (збалансованою)** для i-ої країни, якщо вона витрачає на закупівлю не більше, ніж отримує виручки від проданих товарів, тобто якщо $P_i \geqslant x_i$. Торгівля n країн називається **збалансованою** для всіх країн, якщо $P_i \geqslant x_i$ для будь-якого i. У розгорнутому вигляді ця умова є такою:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доведемо, що коли торгівля бездефіцитна для всіх країн, то всі ці нерівності можуть бути тільки рівностями.

Запишемо останню умову для кожної країни у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geqslant & x_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \geqslant & x_2, \\ \ldots\ \ldots & & \ldots\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & \geqslant & x_n. \end{cases}$$

Всі нерівності можна додати. Отримаємо:

$$(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{n1})x_1+\cdots+(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{nn})x_n \geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

Кожна сума в дужках останньої нерівності є стовпцевою сумою структурної матриці торгівлі і дорівнює 1. Тому

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

а це можливо тільки тоді, коли всі нерівності є рівностями. Таким чином, умова збалансованості торгівлі для всіх країн приймає вигляд системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & x_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & x_2, \\ \ldots\ \ldots & & \ldots\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & x_n. \end{cases}$$

У матричній формі її можна записати у вигляді

$$A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}} \quad \text{або} \quad (A - I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}},$$

де I – одинична матриця.

Приклад 2. Нехай A — структурна матриця торгівлі чотирьох країн:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Яким повинно бути співвідношення між бюджетами цих країн, щоб їх торгівля була бездефіцитною? Знайти ці бюджети, якщо сума всіх бюджетів дорівнює 58 140 грошових одиниць.

Розв'язання. Головна матриця системи рівнянь $(A-I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ дорівнює

$$A - I = \begin{bmatrix} -0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Застосуємо метод Гаусса.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -9 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim$$

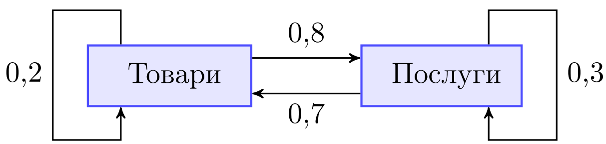
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -13 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & -11 & -5 & 16 & 0 \\ 0 & -9 & -17 & 26 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & -10 & 0 \\ 0 & -11 & -5 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 10 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -71 & 71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Повертаючись до системи, маємо: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, тобто бюджети цих країн однакові. Отже, $4x_4 = 58\,140$ і $x_4 = 14\,535$. ∎

Вправи

1. Припустимо, що економіка має тільки два сектори: Товари і Послуги. Щороку Товари продають 80% свого випуску в Послуги, а решту залишають собі. В свою чергу Послуги продають 70% свого виходу в Товари і решту залишають собі. Знайти рівновагу цін для річного виходу секторів Товари і Послуги так, щоб зробити кожному сектору прибуток рівний його витратам.



2. Розглянемо економіку, що складається з видобутку вугілля, електроенергетики і металургії, а валовий випуск кожного сектору розподілений серед різних секторів так, як у наступній таблиці (елементи в рядках таблиці є часткою від загального випуску секторів та їх розподіл між іншими секторами).

Галузі як виробники продуктів	Галузі як споживачі ресурсів		
	Видобуток вугілля	Електро-енергетика	Металургія
Видобуток вугілля	0	0,6	0,4
Електро-енергетика	0,4	0,1	0,5
Металургія	0,6	0,2	0,2

Якщо можливо, то знайдіть рівновагу цін так, щоб зробити прибуток кожного сектору узгодженим з його витратами.

3. Припустимо, що економіка має три сектори: сільське господарство, гірничо-видобувна галузь та обробна промисловість. Сільське господарство продає 5% своєї продукції гірничо-видобувному сектору і 30% — обробній промисловості та зберігає решту. Гірничо-видобувний сектор продає 20% своєї продукції сільському господарству, 30% — обробній промисловості і зберігає решту. Обробна промисловість продає 20% своєї продукції сільському господарству, 30% — гірничо-видобувному сектору і зберігає решту. Скласти обмінну таблицю для цієї економіки, де стовпці описують, як загальний випуск кожного сектора обмінюється серед трьох секторів та встановити рівновагу цін.

4. Розглянемо закриту економіку з трьома секторами: хіміко-металургійний, паливно-енергетичний та машинобудівний. Хімія і металургія продають 30% свого продукту у паливно-енергетичний і 50% — у машинобудівний сектор, решту залишають собі. Паливно-енергетичний сектор продає 80% своєї продукції у хіміко-металургійний і 10% у машинобудівний та решту залишає собі. Машинобудування продає 40% у хіміко-металургійний і 40% в паливно-енергетичний сектор та решту залишає собі.

А. Побудувати таблицю обміну для цієї економіки.

Б. Скласти систему рівнянь, які для кожного сектора прирівнюють прибуток з витратами.

В. Знайти рівновагу цін, коли ціна для продукції машинобудування дорівнює 100 у. о.

5. Припустимо, що закрита економіка має чотири сектори: сільське господарство (A), енергетика (E), легка промисловість (L) і транспорт (T). Сектор A продає 10% своєї продукції у E і 25% — у L та решту залишає собі. Сектор E продає 30% у A, 35% — у L, 25% — у T та решту залишає собі. Сектор L продає 30% своєї продукції у A, 15% — у E, 40% — у T та решту залишає собі. Сектор T продає 20% своєї продукції у A, 10% — у E, 30% — у L та решту залишає собі.

А. Побудувати таблицю обміну для цієї економіки.

Б. Знайти установлену рівновагу цін для цієї економіки.

6. Дано структурну матрицю торгівлі трьох країн:

$$A = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Яким повинно бути співвідношення між бюджетами цих країн, щоб їх торгівля була бездефіцитною?

7. Дано структурну матрицю торгівлі чотирьох країн:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Яким повинно бути співвідношення між бюджетами цих країн, щоб їх торгівля була бездефіцитною? Знайти ці бюджети, якщо сума всіх бюджетів дорівнює 6270 у. о.

7. Лінійна алгебра та ігрові задачі

Методи лінійної алгебри допомагають при розв'язанні ігрових задач. Розглянемо деякі приклади таких задач.

Магічним квадратом n-го порядку прийнято називати квадратну таблицю, у якій розміщені натуральні числа від 1 до

n^2 з такою властивістю: суми всіх чисел які стоять у кожному рядку, стовпці та обох діагоналях однакові.

Магічний квадрат розміру n фактично є матрицею n-го порядку. Легко встановити, що суми чисел у кожному рядку, стовпці та обох діагоналях магічного квадрата дорівнює $\frac{(n^2+1)n}{2}$. Простим перебором розміщень чисел 1, 2, 3 та 4 бачимо, що не існує магічного квадрата другого порядку. Виникає питання: чи існують магічні квадрати вищого порядку? Відповідь на це запитання дають методи лінійної алгебри!

Приклад 1. Побудувати магічний квадрат 3×3.

Розв'язання. Позначимо шукані числа з магічного квадрата третього порядку буквами латинського алфавіту:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

У цьому випадку суми чисел у кожному рядку, стовпці та обох діагоналях повинні дорівнювати 15. Тоді ми отримуємо таку систему, що містить 8 рівнянь та 9 невідомих:

$$\begin{cases} a + b + c = 15, \\ d + e + f = 15, \\ g + h + i = 15, \\ a + d + g = 15, \\ b + e + h = 15, \\ e + h + i = 15, \\ a + e + i = 15, \\ c + e + g = 15. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&15\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&15\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&15\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0&15\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&15\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&15\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&1&15\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&0&15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&15\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&15\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&15\\ 0&-1&-1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&15\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&15\\ 0&0&0&-1&1&0&-1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&0&15 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&15\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&15\\ 0&0&-1&1&1&0&1&1&0&15\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&15\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&0&15\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&15\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&15\\ 0&0&0&-1&1&0&-1&0&1&0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1&0&0&0&0&0&0&0&1&10\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&10\\ 0&0&1&0&0&0&0&-1&-1&-5\\ 0&0&0&1&0&0&0&-1&-2&-10\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&5\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&2&20\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&15 \end{array}\right].$$

Таким чином, розв'язком системи є

$$\begin{cases} a &= 10-i,\\ b &= 10-h,\\ c &= -5+h+i,\\ d &= -10+h+2i,\\ e &= 5,\\ f &= 20-h-2i,\\ g &= 15-h-i,\\ h,i &— \text{ вільні невідомі.} \end{cases}$$

Візьмемо, наприклад, $h=3$ та $i=4$. Тоді $a=6$, $b=7$, $c=2$, $d=1$, $e=5$, $f=9$ та $g=8$. При цьому квадрат є таким

6	7	2
1	5	9
8	3	4

■

Відзначимо, що складання магічних квадратів вищих порядків є досить кропіткою роботою. З публікацій відомий магічний квадрат 25×25, який склав Harm Derksen[1] (див. рис. 1.10).

Цей квадрат володіє такими властивостями:

- Елементами квадрата є числа від 1 до 625.
- Суми елементів кожного стовпця, рядка і обох діагоналей дорівнюють 7825.

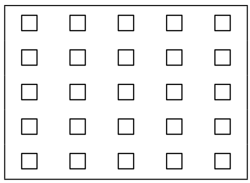
[1] `http://www.math.lsa.umich.edu/~hderksen/magic.html`

1	443	235	547	339	283	100	387	179	616	565	352	44	456	148	217	509	321	113	405	499	161	578	270	57
157	599	261	53	495	439	226	543	335	22	91	383	200	612	279	373	40	452	144	556	505	317	109	421	213
313	105	417	209	521	595	257	74	486	153	247	539	326	18	435	379	191	608	300	87	31	473	140	552	369
469	131	573	365	27	121	413	205	517	309	253	70	482	174	586	535	347	14	426	243	187	604	291	83	400
625	287	79	391	183	127	569	356	48	465	409	221	513	305	117	61	478	170	582	274	343	10	447	239	526
587	254	66	483	175	244	531	348	15	427	396	188	605	292	84	28	470	132	574	361	310	122	414	201	518
118	410	222	514	301	275	62	479	166	583	527	344	6	448	240	184	621	288	80	392	461	128	570	357	49
149	561	353	45	457	401	218	510	322	114	58	500	162	579	266	340	2	444	231	548	617	284	96	388	180
280	92	384	196	613	557	374	36	453	145	214	501	318	110	422	491	158	600	262	54	23	440	227	544	331
431	248	540	327	19	88	380	192	609	296	370	32	474	136	553	522	314	101	418	210	154	591	258	75	487
423	215	502	319	106	55	492	159	596	263	332	24	436	228	545	614	276	93	385	197	141	558	375	37	454
554	366	33	475	137	206	523	315	102	419	488	155	592	259	71	20	432	249	536	328	297	89	376	193	610
85	397	189	601	293	362	29	466	133	575	519	306	123	415	202	171	588	255	67	484	428	245	532	349	11
236	528	345	7	449	393	185	622	289	76	50	462	129	566	358	302	119	406	223	515	584	271	63	480	167
267	59	496	163	580	549	336	3	445	232	176	618	285	97	389	458	150	562	354	41	115	402	219	506	323
359	46	463	130	567	511	303	120	407	224	168	585	272	64	476	450	237	529	341	8	77	394	181	623	290
390	177	619	281	98	42	459	146	563	355	324	111	403	220	507	576	268	60	497	164	233	550	337	4	441
541	333	25	437	229	198	615	277	94	381	455	142	559	371	38	107	424	211	503	320	264	51	493	160	597
72	489	151	593	260	329	16	433	250	537	606	298	90	377	194	138	555	367	34	471	420	207	524	311	103
203	520	307	124	411	485	172	589	251	68	12	429	241	533	350	294	81	398	190	602	571	363	30	467	134
195	607	299	86	378	472	139	551	368	35	104	416	208	525	312	256	73	490	152	594	538	330	17	434	246
346	13	430	242	534	603	295	82	399	186	135	572	364	26	468	412	204	516	308	125	69	481	173	590	252
477	169	581	273	65	9	446	238	530	342	286	78	395	182	624	568	360	47	464	126	225	512	304	116	408
508	325	112	404	216	165	577	269	56	498	442	234	546	338	5	99	386	178	620	282	351	43	460	147	564
39	451	143	560	372	316	108	425	212	504	598	265	52	494	156	230	542	334	21	438	382	199	611	278	95

Рис. 1.10. Магічний квадрат 25×25.

- Якщо квадрат розділити на 25 квадратів п'ятого порядку, то усі вони також є магічними в тому розумінні, що суми всіх елементів стовпців, рядків і обох діагоналей кожного з них дорівнюють по 1565.
- Якщо всі елементи цього квадрата піднести до квадрату, то квадрат залишиться магічним: усі рядкові, стовпцеві та діагональні суми будуть дорівнювати 3 263 025.

Приклад 2. Є панель, що містить 25 кнопок, які розміщено у вигляді квадрата 5×5:



Кожна кнопка може перебувати у двох станах: ввімкненому (тоді вона підсвічується) або вимкненому. Натискання кожної кнопки призводить до того, що окрім неї переключаються (тобто змінюють свій стан) також і сусідні з нею кнопки (сусідніми назвемо кнопки, що знаходяться безпосередньо згори, знизу, ліворуч або праворуч від заданої).

Спочатку деякі кнопки панелі підсвічуються. Встановити, чи можна з допомогою певної комбінації натискань кнопок досягти того, щоб усі кнопки панелі стали вимкненими. У випадку позитивної відповіді виконати це, використовуючи найменше число натискань кнопок.

Розв'язання. Нашою метою буде знайти універсальний розв'язок для цієї задачі, тобто знайти загальний алгоритм, який буде говорити, які кнопки слід натискати на заданій початковій конфігурації. Загальними питаннями, які стосуються цього універсального розв'язку є:

1. Чи існує розв'язок для будь-якої початкової конфігурації? Якщо ні, то чому? Якщо так, то описати множину початкових конфігурацій, які мають розв'язок.
2. Допускаючи, що розв'язок існує для даної конфігурації описати як він може бути отриманий для цієї ситуації.

Побудуємо математичну модель для дослідження цієї задачі-гри. Знайдемо рівняння, яке описує як натискання кнопок буде впливати на стан кнопок. Зручно і корисно позначити кнопку, яка не світиться, числом 0, а кнопку, яка світиться, числом 1. Далі, пронумеруємо 25 кнопок зліва направо, починаючи з верхнього кута.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Тоді кожна конфігурація станів кнопок буде представлена упорядкованою n-кою з 25 нулів і одиниць, тобто буде елементом множини $\mathbb{Z}_2^{25}$. Будемо позначати таку n-ку як вектор.

Механізм натискання кнопки можна подати у вигляді суми двох векторів, де один доданок представляє стан панелі до натискання, а інший характеризує чи змінився стан кнопки після виконаної дії. Додавання у $\mathbb{Z}_2^{25}$ виконується покомпонентно за правилом додавання у $\mathbb{Z}_2$. Наприклад якщо була натиснута i-та кнопка, то другий доданок (позначимо його $\vec{\mathbf{a}}_i$) міститиме одиниці на $i-5$-му, $i-1$-му, i-му, $i+1$-му та $i+5$-му місцях, а на решті позиціях — нулі, зокрема

$$\vec{\mathbf{a}}_2 = (1,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),$$

$$\vec{\mathbf{a}}_{19} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,0).$$

Спробуємо скласти рівняння, яке характеризувало б вимкнення всіх кнопок. Нехай $\vec{\mathbf{y}}$ є елементом $\mathbb{Z}_2^{25}$, який відповідає початковій конфігурації панелі. Розпочнемо гру з кнопками, наприклад, натиснувши 23-ю кнопку. Цим самим ми трансформуємо світлову конфігурацію $\vec{\mathbf{y}}$ в $a_{23}+\vec{\mathbf{y}}$. Далі можна натиснути 15-ту кнопку і отримати результат $a_{15}+(a_{23}+\vec{\mathbf{y}}) = a_{15}+a_{23}+\vec{\mathbf{y}}$. І так далі. Нашою метою є знайти (скінченну!) послідовність $n(1), n(2), ..., n(N)$ таку, що

$$\vec{\mathbf{a}}_{n(N)} + \vec{\mathbf{a}}_{n(N-1)} + ... + \vec{\mathbf{a}}_{n(1)} + \vec{\mathbf{y}} = (0,0,...,0). \qquad (1.9)$$

Оскільки додавання в $\mathbb{Z}_2^{25}$ є комутативним, то без втрати загальності послідовність $n(1), n(2), \ldots, n(N)$ може бути обрана неспадною. Більше того, оскільки $\vec{\mathbf{a}}_i + \vec{\mathbf{a}}_i = \vec{0}$ для всіх $i = 1, \ldots, 25$, то послідовність навіть може бути вибраною так, щоб вона була строго зростаючою. Отже, немає кнопки, на яку потрібно натискати більше, ніж один раз. Це означає, що $N \leqslant 25$. З цього також слідує, що рівняння (1.9) можна переписати у вигляді

$$x_1\vec{\mathbf{a}}_1 + \ldots + x_{25}\vec{\mathbf{a}}_{25} + \vec{\mathbf{y}} = (0, 0, ..., 0)$$

для деякого $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, ..., x_{25})$ з $\mathbb{Z}_2^{25}$. Додаючи $\vec{\mathbf{y}}$ до обох частин рівняння отримуємо

$$x_1\vec{\mathbf{a}}_1 + \ldots + x_{25}\vec{\mathbf{a}}_{25} = \vec{\mathbf{y}}.$$

Тепер запишемо ліву частину останнього рівняння у виді матричного добутку. При цьому будемо мати на увазі, що усі вектори записано як стовпці, навіть якщо до цієї пори вони для зручності записувались у рядки. Якщо через M позначити матрицю

$$\begin{bmatrix}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1
\end{bmatrix},$$

i-им стовпцем якої є вектор-стовпець $\vec{\mathbf{a}}_i$, то рівняння прийме вигляд $M\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$, де $\vec{\mathbf{y}}$ визначає початкову конфігурацію панелі.

Легко бачити, що матриця M є блочною:

$$\begin{bmatrix} A & I & O & O & O \\ I & A & I & O & O \\ O & I & A & I & O \\ O & O & I & A & I \\ O & O & O & I & A \end{bmatrix}.$$

Таке подання матриці M спрощує розв'язання рівняння $M\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$ на комп'ютері.

Тепер ми можемо завершити завдання знаходження рівняння для вимкнення кнопок панелі. Послідовність натиску кнопок, яка описана вектором $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{25})$ з $\mathbb{Z}_2^{25}$, переводитиме конфігурацію $\vec{\mathbf{y}}$ з $\mathbb{Z}_2^{25}$ в «нульову» (тобто в стан, коли кнопки вимкнуті) тоді і тільки тоді, коли $M\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$.

Обчислення показують, що:

1. Ранг матриці M дорівнює 23.

   Це означає, що існують початкові конфігурації, які не можуть бути розв'язані. Ті, що можуть бути розв'язаними, мають 4 різних розв'язки, оскільки вільні змінні x_{24} та x_{25} можна вибрати довільно з $\mathbb{Z}_2^2$.
2. Розв'язність рівняння $M\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$ еквівалентна тому, що $\vec{\mathbf{y}}$ лінійно виражається через вектори-стовпці матриці M. Перевірка цього приводить до критерію існування розв'язку. З векторами

   $$\vec{\mathbf{k}}_1 = (1,0,1,0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,1),$$

   $$\vec{\mathbf{k}}_2 = (1,1,0,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,1,1)$$

   критерій може бути записаний як $\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{k}}_1 \rangle = \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{k}}_2 \rangle = 0$, де $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ позначає стандартний скалярний добуток у $\mathbb{Z}_2^{25}$. Справа в тому, що $\{\vec{\mathbf{k}}_1, \vec{\mathbf{k}}_2\}$ є базисом підпростору $\mathbb{Z}_2^{25}$, для якого рівняння $M\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$ не має розв'язків. Це у свою чергу (оскільки M симетрична) еквівалентно тому, що $\vec{\mathbf{y}}$ буде ортогональним до цього підпростору.

■

Вправи

1. Знайти всі магічні квадрати третього порядку.

2. Знайти всі магічні квадрати четвертого порядку.

3. Розв'язати задачу з прикладу 2 для панелі 2×2. Описати всі можливі початкові конфігурації кнопок, при яких можна виключити усі кнопки, та вказати послідовності їх натиску.

4. Розв'язати задачу, аналогічну до прикладу 2, для панелі з 3×3 кнопок.

4. Розв'язати задачу, аналогічну до прикладу 2, для панелі з 4×4 кнопок.

5. Показати, що для будь-якої початкової конфігурації у прикладі 2 існує послідовність натиску кнопок, які зменшують конфігурацію до першої лінії.

6. Допускаючи розв'язність рівняння $M\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$ у прикладі 2, показати, що існує 7 нетривіальних конфігурацій, які мають світло тільки у першій лінії.

Розділ 2

Застосування матриць і детермінантів

Теоретичні відомості

У попередньому розділі посібника ми вже працювали з поняттям $m \times n$ матриці A як числової таблиці, яка пов'язана з деякою системою рівнянь. Проте матриці є предметом самостійного вивчення. Детально з цим можна познайомитися по будь-якому посібнику з лінійної алгебри. Нагадаємо тільки, що додавати можна матриці з однаковим числом рядків і стовпців та виконується воно додаванням відповідних елементів. Для множення матриці на число слід кожен її елемент помножити на це число. Відносно цих операцій множина $M_{m\times n}(P)$ всіх $m \times n$ матриць над числовим полем P є векторним простором.

Операція множення матриць визначена лише для матриць специфічних розмірів. Добуток матриць A та B визначений тоді, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Множення здійснюється за правилом «рядок на стовпець»: кожний елемент вибраного i-го рядка матриці A множиться на відповідний елемент j-го стовпця матриці B і сума цих добутків є елементом c_{ij} результуючої матриці $C = AB$. Операція множення матриць у множині $M_n(P)$ всіх квадратних $n \times n$ матриць (коротко: матриць n-го порядку) над числовим полем P має властивість асоціативності та дистрибутивна зліва і справа відносно операції додавання.

По аналогії з поняттям оберненого числа для матриць з $M_n(P)$ визначається поняття оберненої матриці. Матриця $I \in M_n(P)$ називається *одиничною*, якщо усі елементи її головної діагоналі дорівнюють 1, а решта — нулі. Матриця $B \in M_n(P)$ називається *оберненою* до матриці $A \in M_n(P)$, якщо $AB = BA = I$ (тут потрібні обидві рівності, оскільки множення матриць не має властивості комутативності). Якщо обернена до A існує, то вона єдина і позначається через A^{-1}. Матрицю A^{-1} можна обчислювати шляхом елементарних перетворень рядків матриці A або за відомою формулою. Нагадаємо також, що рангом матриці називають максимальне число її лінійно незалежних рядків або стовпців.

Блочні матриці з'являються у більшості сучасних застосувань лінійної алгебри. Якщо матриці є достатньо великими, щоб поміститися у пам'ять високошвидкісного комп'ютера, розбивання на блоки дозволяє комп'ютеру працювати з двома або трьома підматрицями одночасно. Особливо це зручно, коли матриці містять багато нулів.

Одній команді програмістів у США довелося розв'язувати систему, яка мала 837 рівнянь і понад 12 750 000 невідомих[1]! Близько 100 мільйонів, з більше як 10 мільярдів елементів у матриці коефіцієнтів, були ненульовими. Їм вдалося спростити задачу розбиттям матриці на 837 рядків і 51 стовпець. Таке розбиття дозволило набагато швидше розв'язувати систему. Деякі високошвидкісні комп'ютери проводять матричні обчислення більш ефективно, коли алгоритми використовують блочні матриці. З принципами розбиття матриць на блоки і операціями над ними можна ознайомитися в монографії [7].

Нехай маємо арифметичний векторний простір $\mathbb{R}^n$ (тобто множину всіх n-вимірних векторів з відомими операціями додавання і множення на скаляр). Відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

[1]Bixby R. E. Very Large-Scale Linear Programming: A Case Study in Combining Interior Point and Simplex Methods / Bixby R. E., Gregory J. W., Lustig I. J., Marsten R. E. // Operations Research, **40**, No. 5 (1992). — P. 885–897.

називається **лінійним перетворенням** цього простору, якщо виконуються умови:

1. $T(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}) = T(\vec{\mathbf{u}})+T(\vec{\mathbf{v}})$ для всіх $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ з області визначення $\mathbb{R}^n$;

2. $T(c\vec{\mathbf{u}}) = cT(\vec{\mathbf{u}})$ для всіх $\vec{\mathbf{u}}$ з $\mathbb{R}^n$ і всіх скалярів c.

Має місце теорема, яка встановлює зв'язок між лінійними перетвореннями $\mathbb{R}^n$ і матрицями з $M_n(\mathbb{R})$:

Нехай $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ є лінійне перетворення. Тоді існує єдина матриця A така, що

$$T(\vec{\mathbf{x}}) = A\vec{\mathbf{x}} \quad \textbf{для всіх } \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n.$$

Фактично, A є $m \times n$ матриця, j-ий стовпець якої є вектор $T(\vec{\mathbf{e}}_j)$, де $\vec{\mathbf{e}}_j$ є j-ий стовпець одиничної матриці у $\mathbb{R}^n$:

$$A = [T(\vec{\mathbf{e}}_1) \quad \ldots \quad T(\vec{\mathbf{e}}_n)].$$

Матриця A називається **стандартною матрицею лінійного перетворення** T.

1. Відхилення еластичної балки

Проілюструємо застосування оберненої матриці при вивченні деформації еластичної балки.

Приклад 1. Горизонтальна еластична балка підтримується на кожному кінці і знаходиться під дією сил в точках 1, 2, 3, як показано на рис. 2.1. Нехай вектор $\vec{\mathbf{f}}$ з $\mathbb{R}^3$ перераховує сили у цих трьох точках і нехай $\vec{\mathbf{y}}$ з $\mathbb{R}^3$ перераховує величини відхилення (тобто переміщення) балки у цих трьох точках. Використовуючи закон Гука з фізики, можна показати, що

$$\vec{\mathbf{y}} = D\vec{\mathbf{f}},$$

де D є *матриця гнучкості(еластичності)*. Обернена до неї називається *матрицею жорсткості (пружності)*. Описати фізичний зміст стовпців матриць D і D^{-1}.

Розв'язання. Запишемо одиничну матрицю $I_3 = [\vec{\mathbf{e}}_1 \quad \vec{\mathbf{e}}_2 \quad \vec{\mathbf{e}}_3]$ і отримаємо, що

$$D = DI_3 = [D\vec{\mathbf{e}}_1 \quad D\vec{\mathbf{e}}_2 \quad D\vec{\mathbf{e}}_3].$$

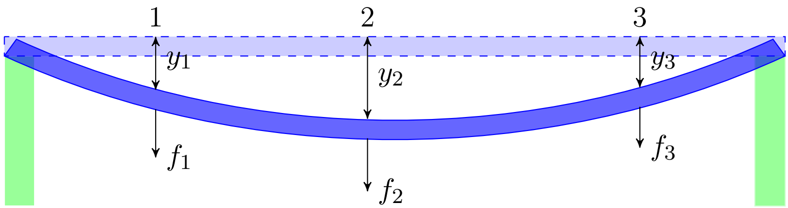


Рис. 2.1. Відхилення еластичної балки

Інтерпретуємо вектор $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 0)$ як одиницю сили прикладеної вниз у точці 1 на балку (з нульовою силою в інших двох точках). Тоді $D\vec{\mathbf{e}}_1$ — перший стовпець D — визначає відхилення балки внаслідок дії одиниці сили в точці 1. Аналогічно описуються застосування у другому і третьому стовпцях матриці D.

Для вивчення матриці жорсткості D^{-1} помітимо, що рівняння $\vec{\mathbf{f}} = D^{-1}\vec{\mathbf{y}}$ визначає вектор сили $\vec{\mathbf{f}}$ при заданому векторі відхилення $\vec{\mathbf{y}}$. Запишемо

$$D^{-1} = D^{-1}I_3 = [D^{-1}\vec{\mathbf{e}}_1 \quad D^{-1}\vec{\mathbf{e}}_2 \quad D^{-1}\vec{\mathbf{e}}_3].$$

Будемо інтерпретувати $\vec{\mathbf{e}}_1$ як вектор відхилення. Тоді $D^{-1}\vec{\mathbf{e}}_1$ перераховує сили, які створюють відхилення. Тому перший стовпець матриці D^{-1} перелічує сили, які повинні бути прикладені у трьох точках для створення одиниці відхилення у точці 1 і нульового відхилення у інших точках. Аналогічно другий і третій стовпці матриці D^{-1} перелічують сили необхідні для створення одиниці відхилення у точках 2 і 3 відповідно. У кожному стовпці одна або дві сили повинні бути від'ємними (сила спрямована вгору) для створення одиниці відхилення у потрібній точці і нульового відхилення у інших двох точках. Якщо жорсткість виміряна, наприклад, у сантиметрах відхилення на кілограм вантажу, то елементи матриці жорсткості задані у кілограмах вантажу на сантиметр відхилення. ■

Формула для обчислення оберненої матриці рідко використовується для розв'язування рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, оскільки рядкова редукція $[A \,|\, \vec{\mathbf{b}}]$ майже завжди є швидшою. Крім цього, рядкова редукція є більш точною, особливо, коли обчислення залучають округлені числа. Одним виключенням можливо є 2×2 випадок. У цьому випадку обчислення для розв'язування рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ простіші з використанням формули для A^{-1}.

Вправи

1. Нехай

$$D = \begin{bmatrix} 0{,}005 & 0{,}002 & 0{,}001 \\ 0{,}002 & 0{,}004 & 0{,}002 \\ 0{,}001 & 0{,}002 & 0{,}005 \end{bmatrix}$$

є матрицею гнучкості гнучкістю виміряною у сантиметрах на кілограм. Припустимо, що сили 30, 50 і 20 кілограм прикладені у точках 1, 2 і 3 відповідно, на рис. 2.1. Знайти відповідні відхилення.

2. Обчислити матрицю жорсткості D^{-1} для D з вправи 1. Перелічіть сили, які необхідні для створення відхилення 0,04 у точці 3, з нульовим відхиленням у інших точках.

3. Нехай

$$D = \begin{bmatrix} 0{,}0040 & 0{,}0030 & 0{,}0010 & 0{,}0005 \\ 0{,}0030 & 0{,}0050 & 0{,}0030 & 0{,}0010 \\ 0{,}0010 & 0{,}0030 & 0{,}0050 & 0{,}0030 \\ 0{,}0005 & 0{,}0010 & 0{,}0030 & 0{,}0040 \end{bmatrix}$$

є матрицею гнучкості для еластичної балки з чотирма точками прикладання сил. Одиницями вимірювання є сантиметри на ньютон сили. Вимірювання у чотирьох точках показують відхилення 0,08, 0,12, 0,16 і 0,12 (див. рис. 2.2). Визначити сили в чотирьох точках.

4. З матрицею D такою, як у вправі 3, визначити сили, які створюють відхилення 0,24 см у точці 2 на балці при нульових відхиленнях у інших трьох точках. Якою є відповідь відносно елементів у D^{-1}?

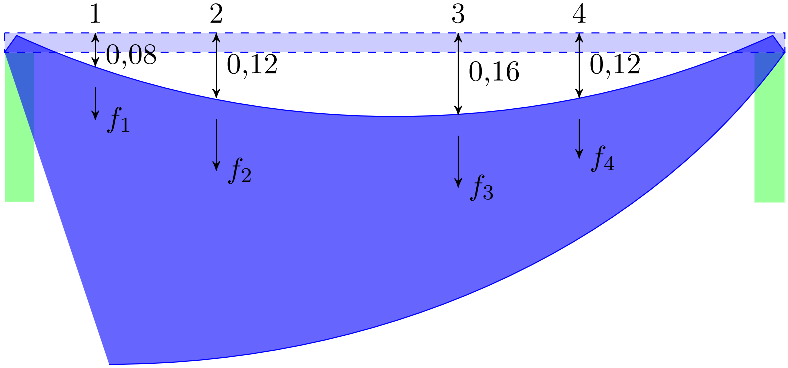


Рис. 2.2. Відхилення еластичної балки у вправах 3 і 4.

Вказівка. Спочатку відповісти на питання, коли відхилення у другій точці дорівнює 1 см.

2. Матрична факторизація в електричній інженерії

Під *факторизацією* матриці A розуміють рівність, яка подає матрицю A у вигляді добутку двох або більше матриць. Тоді як матричне множення залучає *синтез* даних (комбінуючи дію двох або більше лінійних перетворень у простій матриці), то матрична факторизація є *аналізом* даних. На мові комп'ютерної науки, подання матриці A у вигляді добутку зводиться до *оволодіння* даними у A шляхом організації цих даних в дві або більше частин, структури яких більш корисні в деяких випадках або, можливо, більш доступні для обчислень.

Подання $m \times n$ матриці A у вигляді $A = LU$, де L — $m \times m$ нижня трикутна матриця з одиницями на діагоналі і U — $m \times n$ східчаста форма матриці A називається **LU-факторизацією** матриці A. Ця факторизація лежить в серці декількох важливих комп'ютерних програм, які широко використовуються при розв'язуванні аеродинамічних задач, що виникають при конструюванні літаків і космічних апаратів. Вона дозволяє звести розв'язування матричного рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ до розв'язування двох значно простіших рівнянь.

Якщо $A = LU$, то рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ може бути записане як $L(U\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{b}}$. Позначивши $U\vec{\mathbf{x}}$ через $\vec{\mathbf{y}}$, ми можемо знайти $\vec{\mathbf{x}}$ шляхом розв'язування *пари* рівнянь

$$L\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{b}} \qquad \text{та} \qquad U\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}.$$

Спочатку розв'яжемо $L\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{b}}$ відносно $\vec{\mathbf{y}}$, а потім $U\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$ відносно $\vec{\mathbf{x}}$. Кожне рівняння легко розв'язувати, оскільки матриці L та U мають достатньо просту форму.

Алгоритм LU-факторизації матриці A
1. Звести A до ступінчатої форми U шляхом рядкових перетворень заміщення (тобто додавання до рядка матриці іншого рядка, помноженого на деяке число), якщо це можливо.
2. Помістити елементи у L такі, щоб *та сама послідовність рядкових перетворень* зводила L до I.

Обґрунтування для даного алгоритму можна знайти в [7, 10].

Приклад 1. Знайти LU-факторизацію матриці

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки A має 4 рядки, то L буде матрицею 4×4. Перший стовпець L є першим стовпцем A, поділеним на виділений елемент (тут 2):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Порівняємо перший стовпець A і L. *Рядкові перетворення, що створюють нулі у першому стовпці A, будуть також створювати нулі у першому стовпці L.* Ми хочемо цю однакову відповідність для рядкових перетворень підтримувати для решти L. Для цього ми проглянемо зведення A до східчастої форми U:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix} = U$$

Виділені елементи визначають зведення (рядкову редукцію) A до U. Елементи, які стоять під виділеним елементом проміжних матриць, діляться на виділені елементи, і результат записується у L:

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \\ \div 2 & \div 3 & \div 2 & \div 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -3 & 1 & \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{тобто } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Безпосереднім обчисленням легко перевірити, що знайдені матриці L і U задовольняють рівність $LU = A$. ■

Матрична факторизація тісно пов'язана з проблемою конструювання електричної мережі з спеціальними властивостями. Наступне обговорення дає тільки короткий погляд на зв'язок між факторизацією і дизайном електричного кола.

Припустимо, що коробка на рис. 2.3 представляє деякий тип електричного кола з входом і виходом. Позначимо вхід напруги і струму через вектор $\begin{bmatrix} \nu_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$ (з напругою ν у вольтах і струмом

Рис. 2.3. Електричне коло з вхідними та вихідними терміналами.

i у амперах), та вихід напруги і струму через вектор $\left[\begin{array}{c}\nu_2\\ i_2\end{array}\right]$. Часто, перетворення $\left[\begin{array}{c}\nu_1\\ i_1\end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{c}\nu_2\\ i_2\end{array}\right]$ є лінійним, тобто, існує матриця A, яка називається *трансферною матрицею* така, що

$$\left[\begin{array}{c}\nu_2\\ i_2\end{array}\right] = A\left[\begin{array}{c}\nu_1\\ i_1\end{array}\right].$$

На рисунку 2.4 зображена *ланцюгова сітка (мережа)*, де два кола (могло б бути більше) зв'язані в серію так, що вихід одного кола стає входом наступного кола. Ліве коло на рис. 2.4 називається *впускним (вхідним) колом* з опором R_1 (в омах).

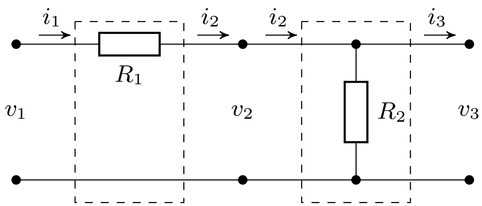


Рис. 2.4. Багатоланкова (ланцюгова) сітка.

Праве коло на рис. 2.4 є *відвідним (вихідним, шунтуючим) колом* з опором R_2. Використовуючи закон Ома і закони Кірхгофа можна показати, що трансферні матриці першого і другого кіл відповідно є

$$\begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Трансферна матриця впускного кола

Трансферна матриця шунтуючого (вихідного) кола

Приклад 2. а) Обчислити трансферну матрицю ланцюгової сітки на рис. 2.4.

б) Розрахувати ланцюгову сітку, трансферна матриця якої дорівнює

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -0{,}5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. а) Нехай A_1 і A_2 трансферні матриці впускного і відвідного кіл, відповідно. Тоді вхідний вектор $\vec{\mathbf{x}}$ спочатку перетворено у $A_1\vec{\mathbf{x}}$ і потім у $A_2(A_1\vec{\mathbf{x}})$. Ряду послідовно зв'язаних електричних кіл відповідає композиція лінійних перетворень і трансферна матриця ланцюгової лінії дорівнює (зверніть увагу на порядок)

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ -\frac{1}{R_2} & 1+\frac{R_1}{R_2} \end{bmatrix}$$

б) Ми шукаємо розклад матриці $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -0,5 & 5 \end{bmatrix}$ в добуток трансферних матриць, як в (а). Так, ми шукаємо R_1 і R_2 на рис. 2.4, які задовольняють

$$\begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ -\frac{1}{R_2} & 1+\frac{R_1}{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -0,5 & 5 \end{bmatrix}.$$

З рівності відповідних елементів цих матриць маємо $R_1 = 8$ Ом і $\frac{1}{R_2} = 0{,}5$ тобто, $R_2 = \frac{1}{0.5} = 2$ Ома. З цими значеннями, мережа на рис. 2.4 має описану трансферну матрицю. ■

Трансферна матриця мережі характеризує режим входу-виходу (описує специфікацію) мережі без посилання на внутрішню будову електричних кіл. Для фізичної побудови мережі з спеціальними властивостями інженер спочатку визначає, за яких умов така мережа може бути сконструйована (або *реалізована*). Після цього інженер намагається розкласти трансферну матрицю у добуток матриць, які відповідають найменшим колам, які можливо уже виготовлені і готові для зібрання. У загальному випадку змінного струму елементи у трансферній матриці зазвичай є раціональними функціями комплексної змінної. Стандартна проблема полягає у знаходженні *мінімальної реалізації*, яка використовує найменше число електричних компонентів.

Вправи

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ -4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 8x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 + 8x_5 = 1, \\ -6x_1 + 7x_3 - 3x_4 + x_5 = 2, \end{cases}$$

застосувавши знайдену у прикладі 1 LU-факторизацію головної матриці системи.

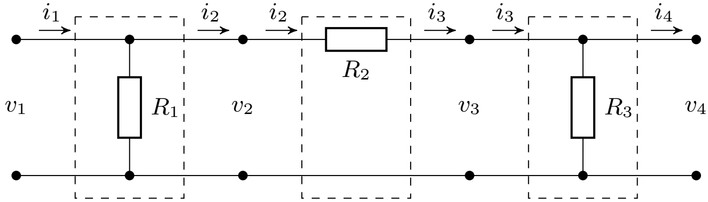
2. (*Сингулярний розклад матриці*). Нехай маємо факторизацію $A = UDV^T$, де U і V є матрицями n-го порядку з властивістю $U^TU = I$ і $V^TV = I$, D — діагональна матриця з додатними числами $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ на діагоналі. Показати, що A оборотна і знайти формулу для A^{-1}.

3. (*Спектральна факторизація*). Припустимо, що 3×3 матриця A допускає факторизацію $A = PDP^{-1}$, де P є деяка оборотна матриця третього порядку, D — діагональна матриця $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Показати, що цей розклад є корисним, коли обчислюються високі степені A. Знайти достатньо прості формули для A^2, A^3 і A^k (k додатне ціле), використавши P і елементи з D.

4. Описати дві різних ланцюгові сітки, у кожній з яких вихід є 9 вольт і 4 ампери, коли вхід є 12 вольт і 6 ампер.

5. Показати, що коли три вихідних (шунтуючих) кола (з опорами R_1, R_2, R_3) зв'язані у ряд, то підсумкова мережа має таку ж трансферну матрицю як одне вихідне (шунтуюче) коло. Знайти формулу для опору у такому колі.

6. А. Обчислити трансферну матрицю мережі на наступному рисунку.



Б. Нехай $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -12 \\ -\frac{1}{4} & 3 \end{bmatrix}$. Описати ланцюгову мережу, трансферна матриця якої є A, шляхом знаходження підходящої матричної факторизації для A.

7. Знайти різні розклади для A у вправі 6 і тоді описати різні ланцюгові мережі з трансферною матрицею A.

3. Матриці і контрольні системи космічних польотів

У цьому параграфі ми привідкриємо завісу на дизайн інженерних контрольних систем, одна з яких представлена на рис. 2.5[1]. Зверніть увагу на те, яку роль тут відіграють матриці та їх ранг.

На рис. 2.5 кожний квадрат зображає окремий пристрій, який представляє собою деякий процес (він може бути частиною обладнання, комп'ютерною програмою, вимірювальним пристроєм і т. д.). Цей пристрій приймає вхідний сигнал і створює вихідний сигнал. Ці сигнали представлені стрілками на діаграмі.

Перекреслені кола називаються узагальнюючими з'єднаннями; у цих точках сигнали комбінуються для доставки у деякий процес як вхід. Наприклад, командний модуль підсумовує дані одержані на вході з інерціального вимірювального пристрою та створює оцінку кута нахилу, яка використовується процесом K_1 як вхід. Відзначимо, що ця система використовує *зворотний зв'язок*, тобто кінцевий кут нахилу використовується як вхід до системи.

[1]Джерело: Nise Norman S. Control Systems Engineering, 4th ed. — John Wiley and Sons, 2004, P. 314.

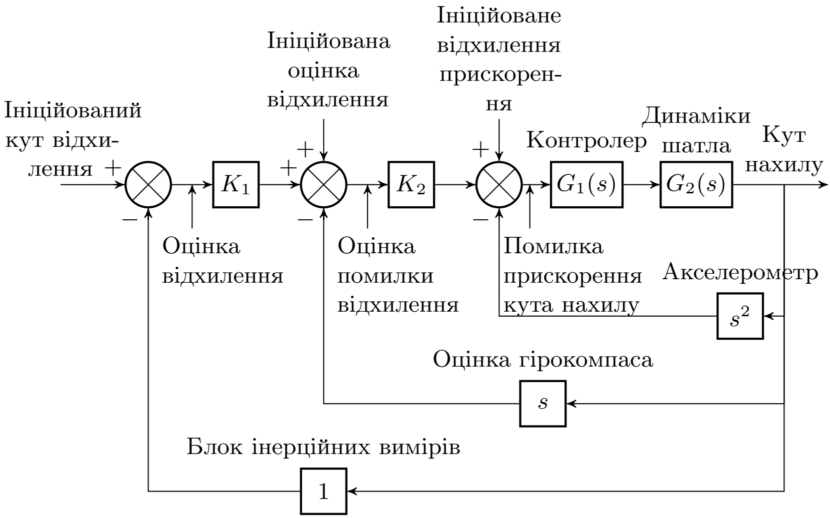


Рис. 2.5. Система контролю космічного шатла

На даному рисунку система слідкує за станом кута нахилу конічного носа шатла. Для того, щоб побудувати математичну модель для такої системи спочатку припускаємо, що вихід з системи є деякий вектор $\vec{\mathbf{x}}$. Також припускаємо (тимчасово), що система немає зовнішніх вхідних сигналів. Тому, якщо $\vec{\mathbf{x}}_0$ визначає початковий стан нахилу носа конуса, то система буде генерувати новий стан з входом $\vec{\mathbf{x}}_1$ з входу $\vec{\mathbf{x}}_0$ і тоді новий стан $\vec{\mathbf{x}}_2$ буде породжений з $\vec{\mathbf{x}}_1$ і так далі. З кожного вектора $\vec{\mathbf{x}}_k$ система утворює новий вектор $\vec{\mathbf{x}}_{k+1}$ для оцінки кута нахилу. Заключним припущенням є те, що процес, при якому $\vec{\mathbf{x}}_k$ стає $\vec{\mathbf{x}}_{k+1}$ є лінійним перетворенням, і що він є однаковим у будь-який час k. Тому система може бути змодельована рівнянням

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

для матриці цього перетворення A та даного $\vec{\mathbf{x}}_0$ як початкового стану системи.

Проілюструємо роботу такої моделі на двох прикладах.

Приклад 1. Якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

то

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = A\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{x}}_2 = A\vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{x}}_3 = A\vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}, \ldots .$$

Приклад 2. Якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

то

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = A\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}}_2 = A\vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ 44 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{x}}_3 = A\vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 98 \\ -54 \\ 196 \end{bmatrix}, \ldots .$$

Відмітимо, що у кожному прикладі виходи з системи уявляються як контроль крену корабля. Звичайно, такий тип поведінки є очікуваним оскільки система дозволяє тільки один вхід: не дозволено зовнішніх входів. На практиці, зовнішні входи звичайно дозволяються. Внутрішні входи допомагають, але пілот (людина або комп'ютер) повинен ввести інформацію, який завершальний стан є очікуваним. Таким чином, пілот прагне контролювати цю систему; пілот намагається вплинути на систему для отримання очікуваного вихідного вектора.

Математично припустимо, що існує послідовність зовнішніх вхідних векторів $\vec{\mathbf{u}}_0$, $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2, \ldots$ і матриця B такі, що

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k + B\vec{\mathbf{u}}_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

Будемо вважати далі, що A — $n \times n$ матриця, B — $n \times m$ матриця, $\vec{\mathbf{x}}_k$ належить $\mathbb{R}^n$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$ та $\vec{\mathbf{u}}_k$ належить $\mathbb{R}^m$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Також припустимо, що початковий вектор є $\vec{\mathbf{x}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$. Послідовність векторів $\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots$ називається **послідовністю контролів** за системою.

Подивимося, як буде діяти така модель системи у наведених вище двох прикладах.

Приклад 1 (продовження). Нехай задана матриця B є такою: $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Відмітимо, що $\vec{\mathbf{u}}_k$ належить $\mathbb{R}^1$ оскільки B має тільки один стовпець. Отже, у цьому випадку послідовність контролів є в дійсності послідовністю чисел. Наприклад, якщо $\vec{\mathbf{u}}_0 = \vec{\mathbf{u}}_1 = 1$, то

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = A\vec{\mathbf{x}}_0 + B\vec{\mathbf{u}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{x}}_2 = A\vec{\mathbf{x}}_1 + B\vec{\mathbf{u}}_1 = A \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Приклад 2 (продовження). Припустимо, що задана матриця B є такою: $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Знову матриця B має тільки один стовпець. Тому послідовність контролів є в дійсності послідовністю чисел. Наприклад, якщо $\vec{\mathbf{u}}_0 = 1$ і $\vec{\mathbf{u}}_1 = -1$, то

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = A\vec{\mathbf{x}}_0 + B\vec{\mathbf{u}}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{x}}_2 = A\vec{\mathbf{x}}_1 + B\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 28 \\ -6 \\ 56 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -17 \\ 54 \end{bmatrix}.$$

Послідовність контролів і матриця B використані тут для змушення системи давати очікуваний вихід у межах коротких числових кроків. На прикладі шатлу, це означає, що комбінація зовнішнього контролю і внутрішнього зворотного зв'язку повинна створити очікуваний кут нахилу у межах кількох ітерацій системи. У термінах лінійної алгебри, цільовий вектор $\vec{\mathbf{y}}$ з $\mathbb{R}^n$ заданий для виходу. Послідовність контролів $\vec{\mathbf{u}}_0$, $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2, \ldots$ «нав'язується» так, що $\vec{\mathbf{x}}_k = \vec{\mathbf{y}}$ для деякого часу k. В ідеалі $\vec{\mathbf{y}}$ повинен бути *довільним* вектором з $\mathbb{R}^n$. Тому дамо таке означення.

Означення. Нехай система має вигляд

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k + B\vec{\mathbf{u}}_k, \quad \vec{\mathbf{u}}_0 = \vec{\mathbf{0}},$$

де A — $n \times n$ матриця, B — $n \times m$ матриця і $\vec{\mathbf{y}}$ — довільний вектор з $\mathbb{R}^n$. Пара матриць (A, B) називається **контрольованою**, якщо існує послідовність контролів $\vec{\mathbf{u}}_0$, $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2, \ldots$ така, що $\vec{\mathbf{x}}_m = \vec{\mathbf{y}}$ для деякого часу m.

Для того, щоб установити чи є пара контрольованою безпосередньо перевіримо послідовність $\vec{\mathbf{x}}_0$, $\vec{\mathbf{x}}_1$, $\vec{\mathbf{x}}_2, \ldots$. Має місце наступний корисний факт про число необхідних кроків для створення цільового вектора $\vec{\mathbf{y}}$.

Теорема 2.1. *Нехай*

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k + B\vec{\mathbf{u}}_k, \quad \vec{\mathbf{u}}_0 = \vec{\mathbf{0}},$$

де A — $n \times n$ матриця, B — $n \times m$ матриця і $\vec{\mathbf{y}}$ — довільний вектор з $\mathbb{R}^n$. Тоді пара матриць (A, B) є контрольованою тоді і тільки тоді, коли існує послідовність контролів $\vec{\mathbf{u}}_0$, $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2, \ldots$ така, що $\vec{\mathbf{x}}_m = \vec{\mathbf{y}}$ для деякого часу $m \leqslant n$. Тобто, пара матриць (A, B) є контрольованою тоді і тільки тоді, коли система може «нав'язати» будь-який вихідний вектор не більше як через n кроків.

Система рівнянь може бути розв'язана ітеративно.

$$
\begin{aligned}
&\vec{\mathbf{x}}_0 = \vec{\mathbf{0}};\\
&\vec{\mathbf{x}}_1 = A\vec{\mathbf{x}}_0 + B\vec{\mathbf{u}}_0 = B\vec{\mathbf{u}}_0;\\
&\vec{\mathbf{x}}_2 = A\vec{\mathbf{x}}_1 + B\vec{\mathbf{u}}_1 = AB\vec{\mathbf{u}}_0 + B\vec{\mathbf{u}}_1;\\
&\vec{\mathbf{x}}_3 = A\vec{\mathbf{x}}_2 + B\vec{\mathbf{u}}_2 = A(AB\vec{\mathbf{u}}_0 + B\vec{\mathbf{u}}_1) + B\vec{\mathbf{u}}_2\\
&\quad\;\; = A^2B\vec{\mathbf{u}}_0 + AB\vec{\mathbf{u}}_1 + B\vec{\mathbf{u}}_2;\\
&\dots\\
&\vec{\mathbf{x}}_k = A^{k-1}B\vec{\mathbf{u}}_0 + A^{k-2}B\vec{\mathbf{u}}_1 + \cdots + AB\vec{\mathbf{u}}_{k-2} + B\vec{\mathbf{u}}_{k-1};\\
&\dots\\
&\vec{\mathbf{x}}_n = A^{n-1}B\vec{\mathbf{u}}_0 + A^{n-2}B\vec{\mathbf{u}}_1 + \cdots + AB\vec{\mathbf{u}}_{n-2} + B\vec{\mathbf{u}}_{n-1}.
\end{aligned}
$$

За останньою теоремою, пара у рівнянні (2.10) є контрольованою тоді і тільки тоді, коли кожний вектор $\vec{\mathbf{y}}$ з $\mathbb{R}^n$ є одним з векторів $\vec{\mathbf{x}}_0$, $\vec{\mathbf{x}}_1, \dots,$ $\vec{\mathbf{x}}_n$ для підходящої послідовності контролів $\vec{\mathbf{u}}_0$, $\vec{\mathbf{u}}_1, \dots,$ $\vec{\mathbf{u}}_n$. Відзначимо, що кожний вектор $\vec{\mathbf{x}}_k$ є лінійною комбінацією стовпців матриць $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ тому, що кожний член у сумі для $\vec{\mathbf{x}}_k$ є однією з цих матриць помножених на відповідний вектор $\vec{\mathbf{u}}_j$. Зокрема, $\vec{\mathbf{x}}_1$ є лінійною комбінацією стовпців матриці B з коефіцієнтами рівними координатам вектора $\vec{\mathbf{u}}_0$.

Всі стовпці матриць $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ можуть бути замінені на одну велику матрицю, яка побудована як блочна:

$$
M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]. \tag{2.11}
$$

Тоді цільовий вектор $\vec{\mathbf{y}}$ повинен бути лінійною комбінацією стовпців матриці M. Оскільки це буде істиним для всіх векторів з $\mathbb{R}^n$, то стовпці M повинні породжувати $\mathbb{R}^n$. Це пояснює наступний висновок.

Наслідок. *Система утворена у рівнянні* (2.10) *з* $\vec{\mathbf{x}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$ *є контрольованою тоді і тільки тоді, коли кожний вектор* $\vec{\mathbf{y}}$ *з* $\mathbb{R}^n$ *є лінійною комбінацією стовпців матриці* M *у рівнянні* (2.11)*. Еквівалентно, пара є контрольованою тоді і тільки тоді, коли стовпці матриці* M *породжують* $\mathbb{R}^n$*.*

Матриця M, очевидно, є фундаментальною для аналізу керованості системи.

Означення. Якщо A — матриця розмірів $n \times n$, B — матриця розмірів $n \times m$, то $n \times nm$ матриця

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B]$$

називається **матрицею контрольованості** для системи

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k + B\vec{\mathbf{u}}_k \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

.

Проілюструємо, якими є ці поняття у наведених попередніх двох прикладах.

Приклад 1 (продовження). Оскільки A є 2×2 матриця і B є 2×1 матриця, то M для цієї системи є

$$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Приклад 2 (продовження). Оскільки A є 3×3 матриця і B є 3×1 матриця, то M для цієї системи має вигляд

$$M = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 26 \\ 1 & -4 & -14 \\ 2 & 12 & 52 \end{bmatrix}.$$

За відомими з лінійної алгебри фактами система у рівнянні (2.10) при $\vec{\mathbf{x}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$ має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли ранг матриці M дорівнює n. З цього випливає такий наслідок.

Наслідок. *Пара (A, B) (де A — $n \times n$ матриця, B — $n \times m$ матриця) є контрольованою тоді і тільки тоді, коли ранг матриці контрольованості M рівний n.*

Прослідкуємо застосування цього наслідку у наведених прикладах.

Приклад 1 (продовження). Оскільки

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то ранг M рівний 2 і система є контрольваною.

Приклад 2 (продовження). Оскільки

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 26 \\ 1 & -4 & -14 \\ 2 & 12 & 52 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то ранг M рівний $2 < 3$ і тому система не є контрольованою.

Приклад 3. Розглянемо матрицю A таку, як у прикладі 2, але тепер нехай

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Оскільки

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -7 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad A^2B = \begin{bmatrix} 26 & 38 \\ -14 & -20 \\ 52 & 76 \end{bmatrix},$$

то матрицею контрольованості M для цієї системи є

$$M = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 9 & 26 & 38 \\ 1 & 2 & -4 & -7 & -14 & -20 \\ 2 & 3 & 12 & 18 & 52 & 76 \end{bmatrix}.$$

Оскільки M рядково еквівалентна до

$$M = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & 2 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} & 4 & \frac{29}{5} \end{bmatrix},$$

то ранг M рівний 3 і система

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k + B\vec{\mathbf{u}}_k, \quad \vec{\mathbf{u}}_0 = \vec{\mathbf{0}},$$

є контрольованою.

Як тільки визначено, що пара є контрольованою, то точна послідовність контролів, які будуть необхідні для створення цільового вектора $\vec{\mathbf{y}}$ може бути обчислена.

Приклад 1 (продовження). Нехай цільовим є вектор $\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Ця система є контрольованою, тому вона буде можливою для конкретних $\vec{\mathbf{u}}_0$ і $\vec{\mathbf{u}}_1$ з

$$\vec{\mathbf{y}} = AB\vec{\mathbf{u}}_0 + B\vec{\mathbf{u}}_1.$$

Ця система рівнянь має розширену матрицю

$$[B \quad AB \quad | \quad \vec{\mathbf{y}}] = [M \quad | \quad \vec{\mathbf{y}}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \end{array}\right],$$

яка зводиться до

$$\left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{array}\right].$$

Таким чином, контролі $\vec{\mathbf{u}}_0 = -\frac{4}{7}$ і $\vec{\mathbf{u}}_1 = 3$ будуть вести систему до $\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Приклад 4. Розглянемо систему з матрицями

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пропонуємо впевнитися, що матрицею контрольованості для цієї системи є

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 2 & 806 & 20 \\ 2 & 1 & 16 & 4 & 160 & 40 \\ 1 & -1 & 24 & 6 & 240 & 60 \end{bmatrix}$$

і що ця система є контрольваною. Для даного вихідного вектора $\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ знайти послідовність контролів, які приведуть систему до $\vec{\mathbf{y}}$.

Розв'язання. Для обчислення контролів утворимо систему рівнянь

$$\vec{\mathbf{y}} = A^2B\vec{\mathbf{u}}_0 + AB\vec{\mathbf{u}}_1 + B\vec{\mathbf{u}}_2.$$

Відзначимо, що вектори $\vec{\mathbf{u}}_0 = \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$ і $\vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix}$ належать $\mathbb{R}^2$, тому шість елементів $u_{01}, u_{02}, u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$ повинні бути знайдені для розв'язання задачі. Система рівнянь має розширену матрицю

$$[B\ AB\ A^2B \mid \vec{\mathbf{y}}] = [M \mid \vec{\mathbf{y}}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 8 & 2 & 806 & 20 & 2 \\ 2 & 1 & 16 & 4 & 160 & 40 & 3 \\ 1 & -1 & 24 & 6 & 240 & 60 & 0 \end{array}\right].$$

Для наголошення факту, що невідомими у цій системі є $u_{01}, u_{02}, u_{11}, u_{12}, u_{21}$ і u_{22} ця розширена матриця може бути записана як система рівнянь

$$\begin{cases} u_{21} \phantom{{}+u_{22}} + 8u_{11} + 2u_{12} + 80u_{01} + 20u_{02} = 2, \\ 2u_{21} + u_{22} + 16u_{11} + 4u_{12} + 160u_{01} + 40u_{02} = 3, \\ u_{21} - u_{22} + 24u_{11} + 6u_{12} + 240u_{01} + 60u_{02} = 0. \end{cases}$$

Оскільки розширена матриця зводиться до

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 10 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{16} \end{array}\right],$$

то редукованою системою є

$$\begin{cases} u_{21} = \frac{7}{2}, \\ u_{22} = -1, \\ u_{11} + \frac{1}{4}u_{12} + 10u_{01} + \frac{5}{2}u_{02} = -\frac{3}{16}. \end{cases}$$

Невідомі u_{01}, u_{12} і u_{02} є вільними; для простоти нехай всі вони дорівнюють 0. Тому знаходимо, що $\vec{\mathbf{u}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} \\ 0 \end{bmatrix}$ і $\vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ є послідовністю контролів, які приведуть систему у стан $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. ■

Вправи

1. Підтвердити обчисленням, що матриці контрольованості для прикладів 1 і 2 є такими, як задані вище.

2. Розглянути систему з матрицями

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Визначити, чи є пара матриць (A, B) є контрольованою.

3. Якщо B є оборотною, то що може бути сказано про контрольованість пари (A, B)?

4. Підтвердити обчисленням, що матриця контрольованості у прикладі 4 є такою, як задано вище і що система є контрольованою.

5. Розглянути систему з матрицями

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Знайти матрицю управляємості для цієї системи.

6. Показати, що система $\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k + B\vec{\mathbf{u}}_k, \quad \vec{\mathbf{u}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$ з вправи 5 є контрольованою.

7. Знайти контролі $\vec{\mathbf{u}}_0$, $\vec{\mathbf{u}}_1$ і $\vec{\mathbf{u}}_2$, які будуть вести систему з вправи 5 до точки $\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. Розглянути систему з матрицями

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ 5 & 15 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

А. Знайти матрицю контрольованості для цієї системи.

Б. Показати, що система $\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k + B\vec{\mathbf{u}}_k, \quad \vec{\mathbf{u}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$, є контрольованою.

В. Знайти контролі $\vec{\mathbf{u}}_0$, $\vec{\mathbf{u}}_1$ і $\vec{\mathbf{u}}_2$, які будуть вести цю систему до точки $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Г. Припустимо, що $\vec{\mathbf{u}}_0 = (1, 1)$. Чи може система бути приведена у точку $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$? Якщо так, то знайти вектори $\vec{\mathbf{u}}_1$ і $\vec{\mathbf{u}}_2$, які будуть це робити.

4. Однорідні системи, детермінанти і рівняння ліній

Детермінант — це число, яке ставиться у відповідність квадратній таблиці чисел за певним відомим правилом. Ця ідея була розглянута в 1683 році японським математиком Секі Такакадзу[1] і незалежно у 1693 році німецьким вченим Г. Лейбніцем[2] задовго до того, як А. Келі[3] у 1858 році опублікував «Мемуар з теорії матриць», у якому було вперше дано абстрактне означення матриці і закладено початки теорії матриць.

На сучасному етапі є різні еквівалентні підходи до визначення поняття детермінанта квадратної матриці A і, відповідно, до викладу їх властивостей. Будемо вважати, що читач знайомий з ними (для детальнішої інформації див. [1, 4, 7, 10]). Детермінант матриці A позначають $|A|$ або $\det A$.

Багато років детермінанти застосовувалися в основному при обговоренні систем лінійних рівнянь. У 1750 році Г. Крамер[4] показав, що детермінанти можуть бути корисними в аналітичній геометрії і сформулював своє відоме правило для розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими за допомогою детермінантів. Пізніше детермінанти знайшли своє застосування у геометрії.

Для заданих фіксованих точок на площині або у тривимірному просторі багато задач потребують знаходження рівнянь геометричних фігур, які проходять через ці точки. Для цієї роботи потрібно розглянути детермінанти матриць, елементи

[1] Секі Такакадзу (1642–1708), відомий також як Секі Кова — японський математик.

[2] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) — німецький філософ, логік, математик, фізик.

[3] Arthur Cayley (1821–1895) — англійський математик.

[4] Gabriel Cramer (1704–1752) — швейцарський математик.

яких є змінними або алгебраїчними виразами. У цьому випадку детермінант сам буде алгебраїчними виразом. Наприклад, розглянемо рівність

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки x і y є змінними, то ця рівність може бути істиною для деяких точок (x, y) у xy-площині, але хибною для інших точок. Помітимо, що ця рівність є очевидно істиною для точок $(-1, 5)$ і $(3, -5)$, оскільки підстановка координат цих точок створює матрицю з двома ідентичними рядками, детермінант якої повинен дорівнювати нулю. Розклад детермінанта за першим рядком дає рівність

$$x\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

або $5x + 2y - 10 = 0$. Очевидно, це є рівняння прямої і, оскільки точки $(-1, 5)$ і $(3, -5)$ задовольняють його, то воно є рівнянням прямої, яка проходить через точки $(1, 2)$ і $(3, 5)$. Таким чином, існує шлях використання детермінанта для вираження рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

Розглянемо такі задачі у загальному вигляді. Для їх розв'язання слід знати, що система однорідних лінійних рівнянь має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли детермінант головної матриці дорівнює нулю, та вміти обчислювати детермінанти.

Рівняння прямої на площині.

Приклад 1. Нехай маємо на координатній площині точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$. Знайти рівняння прямої, яка проходить через ці точки.

Розв'язання. Загальне рівняння прямої має вигляд

$$ax + by + c = 0.$$

Тому для розв'язання задачі потрібно знайти a, b, c. Координати точок $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ повинні задовольняти це рівняння, тобто виконуються рівності

$$ax_1 + by_1 + c = 0,$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0.$$

Якщо $M(x, y)$ — довільна точка цієї прямої, то ми отримуємо систему однорідних лінійних рівнянь відносно a, b, c :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ ax_1 + by_1 + c = 0, \\ ax_2 + by_2 + c = 0. \end{cases}$$

Вона має ненульовий розв'язок тільки тоді, коли

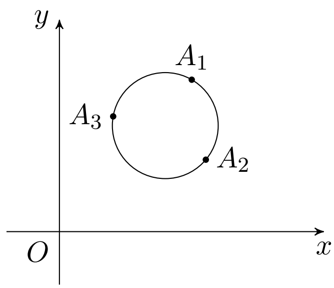
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ця рівність і є рівнянням шуканої прямої. ■

Рівняння кола.

Приклад 2. Для заданих точок $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ і $A_3(x_3, y_3)$ на координатній площині знайти рівняння кола, яке проходить через них.

Розв'язання. Нехай на координатній площині маємо



Відомо, що стандартне рівняння для кола є

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

У загальному виді це рівняння можна записати так $a(x^2 + y^2) + dx + ey + f = 0$. Підставляючи координати даних точок у це рівняння ми отримуємо однорідну систему чотирьох рівнянь відносно невідомих a, d, e, f:

$$\begin{cases} a(x^2+y^2)+dx+ey+f=0, \\ a(x_1^2+y_1^2)+dx_1+ey_1+f=0, \\ a(x_2^2+y_2^2)+dx_2+ey_2+f=0, \\ a(x_3^2+y_3^2)+dx_3+ey_3+f=0. \end{cases}$$

Як і в попередньому випадку вона має ненульовий розв'язок (тобто хоч один з коефіцієнтів a, d, e, f відмінній від нуля) тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Зокрема, для знаходження рівняння кола, яке проходить через точки $A(1,0)$, $B(-1,2)$ і $C(3,1)$ ми записуємо

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Після обчислення детермінанта маємо

$$6x^2+6y^2-14x-26y+8=0.$$

У стандартному вигляді його можна записати так

$$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\left(y-\frac{13}{6}\right)^2=\frac{37}{18}.$$

Центр цього кола є точка з координатами $\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$ і радіус кола рівний $\sqrt{\frac{37}{18}}$.

Відмітимо також, що коли координати даних точок підставити у перший рядок детермінанта, то перший рядок тепер ототожнюється з іншим рядком матриці і її детермінант повинен дорівнювати нулю. Таким чином, детермінантне рівняння записане вище дає обіцяний нами результат. ∎

Рівняння орбіти планети.

Для розв'язання таких задач нам потрібно знати:

1) Загальне рівняння лінії другого порядку на площині (еліпс, гіпербола, парабола) має вигляд $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, де a, b, c, d, e, f – константи.
2) Перший закон Кеплера: орбіта тіла (планети, комети, астероїда), яке рухається навкруги Сонця, є еліпс, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.

Приклад 3. Знайти рівняння орбіти астероїда, який рухається навкруги сонця.

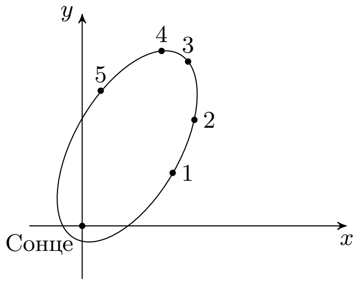
Розв'язання. Астроном, який хоче встановити орбіту обертання астероїда навкруги сонця встановив декартову систему координат у площині орбіти з сонцем у початку координат. Тоді він робить 5 спостережень позицій астероїда у цій системі через 5 проміжків часу. Таке число спостережень необхідно, оскільки загальне рівняння лінії другого порядку на площині містить шість невідомих коефіцієнтів a, b, c, d, e, f.

Припустимо, що ці точки мають координати: $(8{,}025; 8{,}31)$, $(10{,}17; 6{,}355)$, $(11{,}202; 3{,}212)$, $(10{,}736; 0{,}375)$, $(9{,}092; -2{,}267)$.

Підставляючи координати цих точок у загальне рівняння лінії другого порядку, як і в попередніх прикладах, прийдемо до рівняння

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 64{,}401 & 66{,}668 & 69{,}056 & 8{,}025 & 8{,}310 & 1 \\ 103{,}429 & 64{,}630 & 40{,}386 & 10{,}170 & 6{,}355 & 1 \\ 125{,}485 & 35{,}981 & 10{,}317 & 11{,}202 & 3{,}212 & 1 \\ 115{,}262 & 4{,}026 & 0{,}141 & 10{,}736 & 0{,}375 & 1 \\ 82{,}664 & -20{,}612 & 5{,}139 & 9{,}092 & -2{,}267 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Після обчислення детермінанта і спрощення його ми отримуємо таке рівняння орбіти: $386{,}799x^2 - 102{,}896xy + 446{,}026y^2 - 2476{,}409x - 1427{,}971y - 17109{,}378 = 0$.



■

Рівняння площини.

Приклад 4. Нехай ми маємо три точки у просторі $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ і $C(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій. Потрібно знайти рівняння площини, яка проходить через ці точки.

Розв'язання. Загальне рівняння площини є

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Якщо $M(x, y, z)$ – довільна точка цієї площини, то аналогічно до попереднього отримуємо систему однорідних лінійних рівнянь відносно a, b, c, d :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0, \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0, \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0, \end{cases}$$

яка має ненульовий розв'язок тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Наприклад, рівняння площини, яка проходить через точки $(1,-1,3)$ $(0,1,7)$ і $(4,0,-1)$ є

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Після спрощення воно приймає вигляд

$$-12x + 8y - 7z + 41 = 0.$$

■

Вправи

1. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $(2,1,0)$ і $(5,4,0)$.

2. Пояснити, як використати детермінант для перевірки, чи лежать три точки на одній прямій. Перевірте чи лежать точки $(0,0,-1)$, $(4,0,3)$ і $(-2,0,-3)$ на одній прямій.

3. Знайти рівняння кола, яке проходить через точки:

а) $(0{,}5,-2)$, $(4{,}5,4)$ і $(-4{,}5,10)$;

б) $(2,0,-1)$, $(-1,0,3)$ і $(5,0,-3)$.

4. Знайти точку, яка знаходиться на однаковій відстані від точок $(1,1),(4,-3)$ і $(-2,-4)$.

5. Знайти рівняння площини, яке проходить через точки $(2,3,-4)$, $(-1,0,3)$ і $(5,4,-3)$. Пояснити, чому кожна з трьох конкретних точок задовольняє рівняння.

6. Знайти детермінантну форму умови, що 4 точки лежать у одній площині. Перевірте виконання цієї умови для точок $(2,1,-1)$, $(-1,1,1)$, $(0,2,-1)$ і $(1,1,-1)$.

7. Знайти детермінантну форму для рівняння конічного перерізу з стандартним рівнянням $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, який проходить через 5 точок (x_1,y_1), (x_2,y_2), $x_3,y_3)$, (x_4,y_4) і (x_5,y_5). Застосувати розклад вашого детермінанта для демонстрації того, що рівняння яке ви отримали у очікуваній загальній формі $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$. Пояснити, чому кожна з п'яти конкретних точок задовольняє рівняння.

8. Знайти стандартне рівняння конічного перерізу, який проходить через 5 точок $(3,0)$, $(-3,0)$, $(5,4)$, $(-5,4)$ і $(5,-4)$.

9. Знайти детермінантну форму для рівняння сфери з стандартним рівнянням $a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + dz + e = 0$, яка проходить через 4 точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) і (x_4, y_4, z_4). Застосуйте розклад вашого детермінанта для демонстрації того, що рівняння яке ви отримали у очікуваній загальній формі $a(x^2+y^2+z^2)+bx+cy+dz+e=0$. Пояснити, чому кожна з чотирьох заданих точок задовольняє рівняння.

10. Знайти стандартне рівняння сфери, яка проходить через точки $(6, 10, 0)$, $(13, 3, 0)$, $(1, 3, -12)$ і $(-4, -2, 12)$.

11. Знайти точку, яка знаходиться на однаковій відстані від точок $(3, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 3, 1)$ і $(-1, 1, 1)$.

12. Як можна використати детермінанти для знаходження рівняння поверхні $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$? Скільки точок на поверхні вам потрібно було б мати?

5. Детермінанти як площа і об'єм

У 1812 році Огюстен-Луї Коші[1] опублікував працю, в якій дав формули, що виражали через детермінанти об'єми деяких многогранників, зокрема, тетраедра і паралелепіпеда.

Проілюструємо як застосовуються детермінанти у геометрії до обчислення площ фігур і об'ємів. Будемо вважати, що звичайні Евклідові поняття довжини, площі і об'єму вже зрозумілі для $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$. Застосування ґрунтується на таких теоремах.

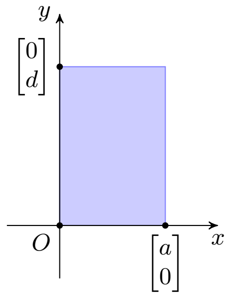
Теорема 2.2. *Якщо A є матриця 2-го порядку, то площа паралелограма, визначеного стовпцями A, рівна абсолютній величині детермінанту матриці A. Якщо A є матриця 3-го порядку, то об'єм паралелепіпеда, визначеного стовпцями A, рівний абсолютній величині детермінанту матриці A.*

Доведення. Проведемо доведення тільки першої частини цієї теореми.

Теорема є очевидною для будь-якої діагональної матриці:

$$\left|\det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right| = |ad| = \left\{ \begin{array}{c} \text{площа} \\ \text{прямокутника} \end{array} \right\}.$$

[1]Augustin Louis Cauchy (1789–1857) — видатний французький математик.



Буде достатньо показати, що будь-яка матриця другого порядку $A = [\vec{\mathbf{a}}_1 \quad \vec{\mathbf{a}}_2]$ може бути перетворена у діагональну матрицю шляхом, що не змінює ні площу асоційованого паралелограма, ні $\det A$. Ми знаємо, що абсолютна величина детермінанта не змінюється, коли два стовпці поміняти місцями або додати один стовпець помножений на якесь число до іншого. Легко побачити, що такі перетворення достатні для перетворення A у діагональну матрицю. Переміна місцями стовпців не змінює паралелограма взагалі. Цього достатньо для доведення наступного простого геометричного спостереження, що має місце для векторів у $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{R}^3$:

Нехай $\vec{\mathbf{a}}_1$ і $\vec{\mathbf{a}}_2$ є ненульові вектори. Тоді для будь-якого скаляра c площа паралелограма, визначеного $\vec{\mathbf{a}}_1$ і $\vec{\mathbf{a}}_2$, рівна площі паралелограма, визначеного векторами $\vec{\mathbf{a}}_1$ і $\vec{\mathbf{a}}_2 + c\vec{\mathbf{a}}_1$.

Для доведення цього твердження ми будемо вважати, що $\vec{\mathbf{a}}_2$ не колінеарний до $\vec{\mathbf{a}}_1$. В іншому разі два паралелограми могли б виродитися і мати нульову площу. Якщо L є пряма, яка проходить через $\vec{\mathbf{0}}$ і $\vec{\mathbf{a}}_1$, то $\vec{\mathbf{a}}_2 + L$ є пряма, яка проходить через $\vec{\mathbf{a}}_2$ паралельно до L і вектор $\vec{\mathbf{a}}_2 + c\vec{\mathbf{a}}_1$ належить на цій прямій (див. рис. 2.6). Точки $\vec{\mathbf{a}}_2$ і $\vec{\mathbf{a}}_2 + c\vec{\mathbf{a}}_1$ мають однакову відстань до L. Тому два паралелограми на рис. 2.6 мають однакову площу, оскільки у них однакова основа і рівні висоти. Це завершує доведення для $\mathbb{R}^2$.

Доведення для $\mathbb{R}^3$ є аналогічним. □

Приклад 1. Обчислити площу паралелограма з вершинами в точках $(-2, -2)$, $(0, 3)$, $(4, -1)$ і $(6, 4)$.

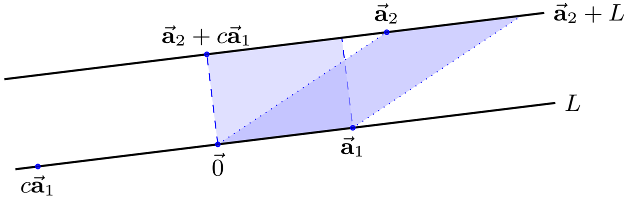


Рис. 2.6.

Розв'язання. Спочатку перенесемо паралельно паралелограм так, щоб одна вершина була у початку координат. Для цього потрібно відняти координати, наприклад, вершини $(-2,-2)$ від відповідних координат кожної з чотирьох вершин. Новий паралелограм має таку ж площу і його вершини є $(0,0)$, $(2,5)$, $(6,1)$ і $(8,6)$. Цей паралелограм визначено стовпцями матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $|\det A| = |-28| = 28$, то площа паралелограма дорівнює 28. ■

Приклад 2. Знайти об'єм паралелепіпеда з одною вершиною у початку координат і сусідніми вершинами у точках $(1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$.

Розв'язання. Даний паралелепіпед визначено стовпцями матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $|\det A| = |22|$, то об'єм паралелепіпеда дорівнює 22. ■

Детермінанти можуть бути використані для опису важливих геометричних властивостей лінійних перетворень на площині і в просторі $\mathbb{R}^3$. Якщо T є лінійним перетворенням і S є підмножина у області визначення T, то позначимо через $T(S)$ множину образів точок з S. Нас цікавить, як площа (або об'єм) образа фігури (тіла) $T(S)$ порівнюється з площею (або об’ємом) вихідної множини S. Для зручності, коли S є частиною площини, яка обмежена паралелограмом, ми говоритимемо про S як про паралелограм.

Теорема 2.3. *Нехай $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ є лінійним перетворенням, яке визначене матрицею другого порядку A. Якщо S є паралелограмом у $\mathbb{R}^2$, то*

$$\{\textit{площа } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\textit{площа } S\}.$$

Якщо T є лінійним перетворенням, яке визначене матрицею третього порядку A, і якщо S — паралелепіпед в $\mathbb{R}^3$, то

$$\{\textit{об’єм } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\textit{об’єм } S\}.$$

Пропонуємо довести цю теорему як вправу.

Якщо ми спробуємо узагальнити теорему 2.3 на області у $\mathbb{R}^2$ або у $\mathbb{R}^3$, які обмежені не тільки прямими або площинами, а і кривими, то ми виходимо на проблему, як визначити і обчислити її площу і об’єм. Це питання вивчено у математичному аналізі і ми опишемо тільки у загальних рисах базисну ідею для простору $\mathbb{R}^2$. Якщо R є областю на площині, яка має скінченну площу, то R може бути апроксимована сіткою маленьких квадратів, які лежать всередині R. Роблячи квадрати достатньо малими, площа R може бути апроксимована досить близько, як сума площ маленьких квадратів.

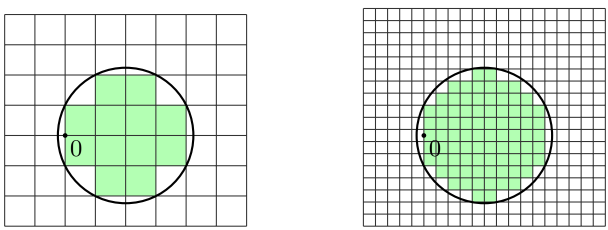


Рис. 2.7.

Якщо T — це лінійне перетворення асоційоване з його стандартою матрицею другого порядку A, то образ плоскої області

R при перетворенні T є наближенням образів маленьких квадратів всередині R. Якщо R' є об'єднанням квадратів всередині R, то площа $T(R')$ рівна добутку абсолютної величини $|A|$ на площу R' (див. рис. 2.7). Площа $T(R')$ є близькою до площі $T(R)$. Нарешті, залучення граничного переходу обгрунтовує таке узагальнення теореми 2.3.

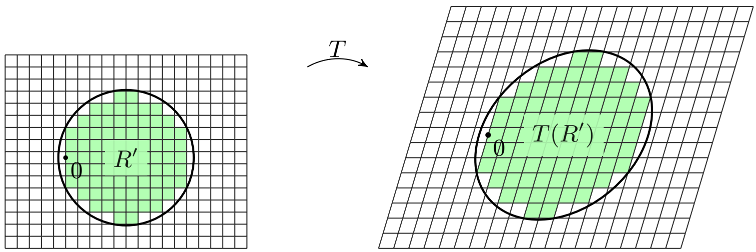


Рис. 2.8.

Висновки теореми 2.3 мають місце завжди, коли S є областю у $\mathbb{R}^2$, яка має скінченну площу, або областю у $\mathbb{R}^3$, яка має скінченний об'єм.

Приклад 3. Нехай a і b додатні числа. Знайти площу області E обмеженої еліпсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Розв'язання. Ми стверджуємо, що E — це образ одиничного круга D при лінійному перетворенні T, визначеному матрицею $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. Тут відбувається розтяг (чи стиск) в a раз вздовж однієї координатної осі та у b раз вздовж іншої осі.

За узагальненням теореми 2.3 маємо:

$$\{\text{площа еліпса}\} = \{\text{площі}\, T(D)\} = |\det A| \cdot \{\text{площа}\, D\} = \\ = ab \cdot \pi \cdot 1^2 = \pi ab.$$

■

Вправи

1. Довести теорему 2.2 для $\mathbb{R}^3$.

2. Знайти площу паралелограма, вершини якого задано:

а) $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$;

б) $(0,-2),(6,-1),(-3,1),(3,2)$.

3. Знайти формулу для площі трикутника, вершинами якого є $\vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{v}}_1$ і $\vec{\mathbf{v}}_2$ з $\mathbb{R}^2$.

4. Знайти об'єм паралелепіпеда з однією вершиною у початку координат і сусідніми вершинами у точках $(1,4,0),(2,5,0),(-1,2,5)$.

5. Знайти об'єм паралелепіпеда з однією вершиною у точці $(1,1,1)$ і сусідніми вершинами у точках $(2,1,3),(1,5,0),(-2,0,5)$.

6. Знайти об'єм тетраедра, ребрами якого є вектори $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$ і $\vec{\mathbf{v}}_3$.

7. Знайти умову, при якій три точки $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ і $A_3(x_3,y_3)$ лежать на одній прямій.

8. Знайти умову, при якій чотири точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$ і $A_4(x_4,y_4,z_4)$ лежать в одній площині.

9. Довести теорему 2.3.

10. Нехай S — це паралелограм, який побудовано на векторах $\vec{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ і $\vec{\mathbf{b}}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ і нехай $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Обчислити площу образу S при відображенні $\vec{\mathbf{x}} \mapsto A\vec{\mathbf{x}}$.

11. Нехай $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійним перетворенням, яке визначене матрицею $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, де a, b, c є додатні числа. Нехай S є одинична куля, поверхня якої має рівняння $x^2+y^2+z^2=1$.

а) Показати, що $T(S)$ обмежена еліпсоїдом з рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

б) Використовуючи той факт, що об'єм одиничної кулі дорівнює $\frac{4\pi}{3}$, визначити об'єм області, обмеженої еліпсоїдом у частині (а).

6. Лінійна алгебра і модель Леонтьєва відкритої економіки

Модель Леонтьєва відкритої економіки.

Модель Леонтьєва закритої економіки (§ 6 розділу 1) досліджує випадок, коли товари не приходять і не виходять з економіки, але у дійсності це трапляється не так часто. Зазвичай економіка має задовольняти певний зовнішній (додатковий) попит, наприклад, урядових установ. Позначимо через d_i буде зовнішній попит до i-ої індустрії, p_i і m_{ij} мають такий самий зміст, як у закритій моделі (див. § 6 розділу 1). Тоді одержуємо рівність

$$p_i = p_1 m_{i1} + p_2 m_{i2} + \dots + p_n m_{in} + d_i$$

для кожного i.

Для задоволення власного попиту виробники різних галузей економіки створюють для себе проміжний попит для товарів, які необхідні їм як витрати для виготовлення власної продукції ($C\vec{\mathbf{p}}$). Для задоволення зовнішнього попиту виробники створюють для себе новий проміжний попит і т. д. Взаємовідносини між секторами дуже складні (комплексні) і тому не зрозуміло, яким є зв'язок між підсумковим попитом і виробництвом.

Леонтьєв поставив таку проблему: чи існує виробництво рівня $\vec{\mathbf{x}}$ таке, щоб обсяги виробленого (або запланованого) точно балансували із сумарним попитом для цієї продукції так, що

$$\left\{\begin{array}{c}\text{обсяг}\\ \text{виробленого}\\ \vec{\mathbf{x}}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{проміжний}\\ \text{попит}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{підсумковий}\\ \text{попит}\\ \vec{\mathbf{d}}\end{array}\right\} \qquad (2.12)$$

Іншими словами цю рівність можна записати так:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{вектор}\\ \text{валового}\\ \text{випуску } (\vec{\mathbf{x}})\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{вектор}\\ \text{міжгалузевого}\\ \text{споживання } (C\vec{\mathbf{x}})\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{вектор споживання}\\ \text{у невиробничій}\\ \text{сфері } (\vec{\mathbf{d}})\end{array}\right\}$$

Загальна модель Леонтьєва витрати-випуск (модель виробництва) має вигляд

$$\vec{\mathbf{x}} = C\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{d}}. \qquad (2.13)$$

Це дає таку систему лінійних рівнянь, що записана у матричній формі:

$$\vec{\mathbf{p}} = C\vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{d}},$$

де $\vec{\mathbf{p}}$ і C такі як у § 6 розділу 1, $\vec{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ — вектор зовнішнього попиту. Цю систему перепишемо у такому вигляді

$$(I - C)\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{d}}.$$

Приклад 1. Розглянемо економіку, яка містить три сектори — промисловість, сільське господарство і сферу послуг — з одиницями споживчих векторів $\vec{\mathbf{c}}_1$, $\vec{\mathbf{c}}_2$, $\vec{\mathbf{c}}_3$, які показані у таблиці нижче:

Закупка з:	Витрати попиту на одиницю продукції		
	Промисловість	Сільське господарство	Сфера послуг
Промисловість	0,5	0,4	0,2
Сільське господарство	0,2	0,3	0,1
Сфера послуг	0,1	0,1	0,3
	$\uparrow$ $\vec{\mathbf{c}}_1$	$\uparrow$ $\vec{\mathbf{c}}_2$	$\uparrow$ $\vec{\mathbf{c}}_3$

Припустимо, що підсумковий попит становить 50 одиниць для промисловості, 30 одиниць для сільського господарства і 20 одиниць для сфери послуг. Знайти вектор обсягу виробництва $\vec{\mathbf{x}}$, який буде задовольняти такий попит.

Розв'язання. Споживча матриця і зовнішній попит для цієї економіки відповідно мають вигляд

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad \vec{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Матриця коефіцієнтів у (2.13) є

$$I - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Розв'яжемо систему (2.13) для цієї економіки методом Гауса

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}2 & 50 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}1 & 30 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}7 & 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 & 500 \\ -2 & 7 & -1 & 300 \\ -1 & -1 & 7 & 200 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 226 \\ 0 & 1 & 0 & 119 \\ 0 & 0 & 1 & 78 \end{bmatrix}.$$

Останній стовпець заокруглено до найближчого цілого числа. Таким чином, промисловість повинна виготовити 226 одиниць продукції, сільське господарство — 119, сфера обслуговування — 78. ■

Зрозуміло, що для існування розв'язку рівняння (2.13) необхідно, щоб матриця $I - C$ була оборотною, а це не завжди буває. Якщо існує $(I - C)^{-1}$, то дістаємо розв'язок $\vec{\mathbf{x}} = (I - C)^{-1}\vec{\mathbf{d}}$.

Будемо говорити, що матриця A (вектор $\vec{\mathbf{x}}$) є *невід'ємною (невід'ємним)* і записується $A \geqslant 0$ ($\vec{\mathbf{x}} \geqslant 0$), якщо всі її (його) елементи невід'ємні. Позначення $A > 0$ для матриці A означає, що усі елементи матриці A є невід'ємними і принаймні один є додатним (аналогічно для вектора).

Оскільки вектор попиту є додатним, то ми хочемо, щоб матриця $(I - C)^{-1}$ була додатною.

Означення 2.1. Споживча матриця C називається **продуктивною,** якщо виконуються умови:

а) вона невід'ємна;

б) для будь-якого невід'ємного вектора $\vec{\mathbf{d}}$ рівняння Леонтьєва з матрицею C має невід'ємний розв'язок.

У такому випадку модель Леонтьєва називають **продуктивною.**

Для рівняння Леонтьєва (2.13) розроблена теорія дослідження його розв'язування. Зокрема, можна довести, що мають місце такі твердження.

Теорема 2.4. *Якщо матриця C є невід'ємною і принаймні для одного вектора $\vec{\mathbf{d}} > 0$ рівняння Леонтьєва* (2.13) *має додатний розв'язок, то матриця C є продуктивною.*

Теорема 2.5. *Невід'ємна матриця C є продуктивною тоді і тільки тоді, коли матриця $(I - C)^{-1}$ існує і невід'ємна.*

Мають місце також інші умови продуктивності матриць.

У наступній теоремі термін **стовпцева сума** означає суму елементів у стовпці матриці. Зазвичай стовпцеві суми споживчої матриці менші одиниці, оскільки сектор вимагає менше ніж вартість однієї одиниці витрат на створення однієї одиниці продукції.

Теорема 2.6. *Нехай C – споживча матриця (матриця прямих затрат) для економіки, $\vec{\mathbf{d}}$ – підсумковий попит. Якщо C і $\vec{\mathbf{d}}$ мають невід'ємні координати і кожна стовпцева сума C менша 1, то $(I - C)^{-1}$ існує і створює вектор*

$$\vec{\mathbf{x}} = (I - C)^{-1}\vec{\mathbf{d}},$$

який має невід'ємні координати і є єдиним розв'язком рівняння

$$\vec{\mathbf{x}} = C\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{d}}.$$

Правильність цієї теореми випливатиме з подальших міркувань, які, крім цього, приводять до нового шляху обчислення $(I - C)^{-1}$.

Формула для $(I - C)^{-1}$.

Уявимо собі, що попит виражений через $\vec{\mathbf{d}}$ представляє різні сектори економіки на початку року і вони реагують на встановлення їхніх рівнів продукції до $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{d}}$, який буде точно відповідати підсумковому попиту. Коли виробництва (сектори індустрії) планують виготовити продукт $\vec{\mathbf{d}}$, то вони відішлють замовлення для їх сировинних матеріалів і інших затрат. Це створює проміжний попит $C\vec{\mathbf{d}}$ для затрат.

Зустрічаючи додатковий попит $C\vec{\mathbf{d}}$, виробництвам будуть необхідні додаткові затрати $C(C\vec{\mathbf{d}}) = C^2\vec{\mathbf{d}}$. Звичайно, це створює друге коло проміжного попиту і коли галузі вирішать виробити навіть більше продукції,орієнтуючись на новий попит, то вони створять третє коло попиту, а саме, $C(C^2\vec{\mathbf{d}}) = C^3\vec{\mathbf{d}}$, і так далі.

Теоретично ми можемо уявити цей процес безперервним нескінченно, хоча в дійсності воно не має місця з такою жорсткістю послідовних подій. Ми можемо зобразити цю гіпотетичну ситуацію в такий спосіб:

	Попит, що повинен бути виконаний	Входи необхідні для зустрічі цього попиту
Підсумковий попит	$\vec{\mathbf{d}}$	$C\vec{\mathbf{d}}$
Попередній попит		
1-е коло	$C\vec{\mathbf{d}}$	$C(C\vec{\mathbf{d}}) = C^2\vec{\mathbf{d}}$
2-е коло	$C^2\vec{\mathbf{d}}$	$C(C^2\vec{\mathbf{d}}) = C^3\vec{\mathbf{d}}$
3-е коло	$C^3\vec{\mathbf{d}}$	$C(C^3\vec{\mathbf{d}}) = C^4\vec{\mathbf{d}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Продукція рівня $\vec{\mathbf{x}}$, що буде зустрічати весь цей попит:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}} &= \vec{\mathbf{d}} + C\vec{\mathbf{d}} + C^2\vec{\mathbf{d}} + C^3\vec{\mathbf{d}} + \cdots \\ &= (I + C + C^2 + C^3 + \cdots)\vec{\mathbf{d}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Для надання змісту (2.15) ми використаємо наступну алгебраїчну тотожність:

$$(I - C)(I + C + C^2 + C^3 + \cdots + C^m) = I - C^{m+1} \tag{2.16}$$

Можна показати, що коли усі стовпцеві суми матриці C строго менші одиниці, то $I - C$ є оборотною та C^m прямує до нульової матриці, коли m стає достатньо великим і $I - C^{m+1} \to I$. (Цей факт є аналогічним до факту, що якщо $0 < t < 1$, то $t^m \to 0$ при $m \to \infty$.) Використовуючи (2.16), запишемо

$$(I - C)^{-1} \approx I + C + C^2 + C^3 + \cdots + C^m, \tag{2.17}$$

де усі стовпцеві суми матриці C менші одиниці. Тому праву частину рівності (2.17) при достатньо великому m можна інтерпретувати як значення $(I - C)^{-1}$.

У актуальних моделях затрати-випуск степені споживчої матриці прямують до нульової матриці досить швидко. Тому

(2.17) дійсно дає практичний шлях для обчислення $(I - C)^{-1}$. Подібно, для будь-якого $\vec{\mathbf{d}}$ вектори $C^m\vec{\mathbf{d}}$ прямують до нульового вектора швидко і (2.15) є практичним шляхом розв'язання рівняння $(I - C)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{d}}$. Якщо координати у C і $\vec{\mathbf{d}}$ невід'ємні, то (2.15) показує, що координати у $\vec{\mathbf{x}}$ також невід'ємні.

Економічна важливість елементів у $(I - C)^{-1}$.

Елементи у $(I - C)^{-1}$ є істотними тому, що вони можуть бути використані для прогнозування того, як продукція $\vec{\mathbf{x}}$ повинна змінитися, коли підсумковий попит $\vec{\mathbf{d}}$ змінюється. Фактично, елементи у j-ому стовпці матриці $(I - C)^{-1}$ є збільшені обсяги різних секторів, які повинні змінитися для задоволення *зростання однієї одиниці* у підсумковому попиті для виходу з сектора j. Матрицю $(I - C)^{-1}$ називають **матрицею повних затрат**.

Зауваження. У будь-якій прикладній задачі (не тільки економічній), рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ може завжди бути записане як $(I - C)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ з $C = I - A$. Якщо система є великою і «*рідкою*» (більшість елементів її матриці дорівнюють нулю), то може трапитися, що стовпцеві суми за абсолютною величиною у C менші ніж 1. У цьому випадку $C^m \to 0$. Якщо C^m наближається до нуля достатньо швидко, то (2.15) і (2.17) дають практичну формулу для розв'язування рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ і обчислення оберненої матриці A^{-1}.

Розглянемо детальніше застосування моделі Леонтьєва на прикладі.

Приклад 2. Розглянемо відкриту економіку з індустріями вугільної промисловості, електроенергетикою та автомобільним заводом. Для випуску на 1\$ вугілля гірничодобувна галузь повинна закупити 0,1\$ своєї власної продукції, 0,30\$ електроенергії і 0,1\$ затратити на автомобілі для його транспортування. Для випуску на 1\$ електроенергії затрачається 0,25\$ на вугілля, 0,4\$ на електроенергію і 0,15\$ на автомобілі. Нарешті, для випуску 1\$ вартості автомобіля автозавод повинен закупити на 0,2\$ вугілля, на 0,5\$ електрики і витратити 0,1\$ на автомобілі. Припустимо, що протягом періоду в один тиждень ця економіка має зовнішній попит на 50 000\$ вартості вугілля, 75 000\$

вартості електроенергії і 125 000$ вартості авто. Знайти рівень виробництва (валовий випуск) кожної з трьох галузей у період цього тижня для точного виконання внутрішнього і зовнішнього попитів.

Розв'язання. Складемо таблицю даних задачі.

Галузі, як виробники продуктів	Галузі, як споживачі ресурсів			Додатковий попит	Валовий випуск
	Видобуток вугілля	Електроенергія	Автомобілі		
Видобуток вугілля	0,1	0,25	0,2	50 000	
Електроенергетика	0,3	0,4	0,5	75 000	
Автомобілі	0,1	0,15	0,1	125 000	

Споживча матриця має такий вигляд:

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

і вектор зовнішнього попиту є

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 50\,000 \\ 75\,000 \\ 125\,000 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\vec{p} = (I - C)^{-1}\vec{d},$$

де

$$I - C = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}6 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & -0{,}15 & 0{,}9 \end{bmatrix}.$$

Далі за формулою знайдемо

$$(I - C)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}464 & 0{,}803 & 0{,}711 \\ 1{,}007 & 2{,}488 & 1{,}606 \\ 0{,}330 & 0{,}503 & 1{,}464 \end{bmatrix},$$

яка дає

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 1{,}464 & 0{,}803 & 0{,}711 \\ 1{,}007 & 2{,}488 & 1{,}606 \\ 0{,}330 & 0{,}503 & 1{,}464 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50000 \\ 75000 \\ 125000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 229921{,}59 \\ 437795{,}27 \\ 237401{,}57 \end{bmatrix}.$$

Отже, загальний випуск вугільно-добувної галузі повинен бути 229921,59$, загальний випуск електрогенеруючої фабрики — 437795,27$ і загальний випуск продукції автомобільного заводу — 237401,57$. ■

Вправи

1. Розглянути модель $\vec{\mathbf{x}} = C\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{d}}$, для економіки з двома секторами, де

а) $C = \begin{bmatrix} 0{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$.

б) $C = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix}$.

У вправах 2–5 задано економіку, яка розділена на 3 сектори — промисловість, сільське господарство і сферу послуг. Для випуску кожної одиниці продукції промисловості вимагається витратити 0,1 одиниці з інших компаній цього сектору, 0,30 одиниці з сільського господарства і 0,3 одиниці з сфери послуг. Для кожної одиниці свого випуску сільське господарство використовує 0,2 одиниці з власного випуску, 0,6 — з промисловості і 0,1 — з сфери послуг. Сфера послуг споживає 0,1 одиниці зі сфери послуг, 0,6 — з промисловості, але не потребує сільськогосподарських продуктів для своєї продукції.

2. Побудувати споживчу матрицю для цієї економіки і визначити, які попередні попити створено, якщо сільське господарство планує випустити 100 одиниць продукції.

3. Визначити рівень продукції, який необхідний для задоволення підсумкового попиту на 18 одиниць для сільського господарства без підсумкового попиту для інших секторів. (Не обчислюйте обернену матрицю.)

4. Визначити рівень продукції, який необхідний для задоволення підсумкового попиту на 18 одиниць для промисловості без підсумкового попиту для інших секторів. (Не обчислюйте обернену матрицю.)

5. Визначити рівень продукції, який необхідний для задоволення підсумкового попиту на 18 одиниць для промисловості, 18 одиниць для сільського господарства і 0 одиниць для сфери послуг.

6. Наступна таблиця містить дані балансу трьох галузей промисловості за деякий період. Знайти обсяг валового випуску продукції, при якому кінцеве споживання по галузям збільшиться відповідно до 60, 70 і 30.

Галузі, як виробники продуктів	Галузі, як споживачі ресурсів			Додатковий попит	Валовий випуск
	Видобуток нафти	Енергетика	Машинобудування		
Видобуток нафти	0,5	0,35	0,2	40	100
Енергетика	0,1	0,1	0,2	60	100
Машинобудування	0,2	0,1	0,1	10	50

7. У наступній таблиці наведені дані про баланс за деякий період між п'ятьма галузями промисловості. Записати споживчу матрицю, вектори зовнішнього попиту та валового випуску продукції. Встановити чи є споживча матриця продуктивною та знайти вектор валового випуску продукції, якщо зовнішній попит зросте на 10%.

№	Галузі як виробники	Галузі, як споживачі ресурсів					Додатк. попит	Валовий випуск
		1	2	3	4	5		
1	Верстатобудування	0,15	0,12	0,24	0,23	0,16	10	100
2	Енергетика	0,1	0,03	0,35	0,15	0,07	30	100
3	Машинобудування	0,1	0,05	0,1	0,1	0,1	20	50
4	Автомобільна промисловість	0,1	0,05	0,1	0,05	0,05	20	50
5	Видобуток вугілля	0,07	0,15	0,15	0,1	0,03	50	100

8. Яка з наступних матриць є продуктивною?

$$\text{а)}\quad A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}02 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix}. \quad \text{б)}\quad B = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

9. Розглянемо економіку з трьома індустріями та споживчою матрицею

$$C = \begin{bmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{bmatrix},$$

де $0 < k < 1$.

а) Для якого значення k буде існувати $(I - C)^{-1}$?

б) Для якого значення k матриця $(I-C)^{-1}$ буде невід'ємною?

в) Яким буде вектор продукції, якщо вектор попиту

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}?$$

10. При вивченні балансу виробництва трьох галузей виявили, що споживча матриця є

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}20 \\ 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}20 \end{bmatrix}.$$

Планується вектор випуску кінцевого продукту таким $\vec{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 160 \\ 221 \\ 251 \end{bmatrix}$.

Знайти відповідний вектор валового випуску продукції.

11[1]**.** Споживча матриця C, яка записана нижче, базується на даних затрати-випуск для економіки США у 1958 році з даними для 81 секторів згрупованих у 7 більших секторів:

1) неметалічні предмети домашнього і особистого користування;

2) кінцеві металеві продукти (такі як транспортні засоби);

3) основні металопродукти і видобуток корисних копалин;

4) основні неметалеві продукти і сільське господарство;

5) енергетика;

6) сфера обслуговування;

7) розваги і різноманітні продукти.

[1]Джерело: Wassily W. Leontief, «The Structure of the U.S. Economy» Scientific American, April, 1965, pp. 30–32.

Знайти необхідні рівні продукції для задоволення підсумкового попиту $\vec{\mathbf{d}}$ (одиницями є мільйони доларів США).

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}159 & 0{,}006 & 0{,}002 & 0{,}030 & 0{,}001 & 0{,}008 & 0{,}159 \\ 0{,}006 & 0{,}264 & 0{,}044 & 0{,}010 & 0{,}008 & 0{,}020 & 0{,}341 \\ 0{,}026 & 0{,}151 & 0{,}356 & 0{,}014 & 0{,}014 & 0{,}007 & 0{,}024 \\ 0{,}330 & 0{,}056 & 0{,}049 & 0{,}364 & 0{,}020 & 0{,}048 & 0{,}065 \\ 0{,}009 & 0{,}008 & 0{,}033 & 0{,}029 & 0{,}341 & 0{,}024 & 0{,}002 \\ 0{,}119 & 0{,}090 & 0{,}100 & 0{,}126 & 0{,}172 & 0{,}237 & 0{,}337 \\ 0{,}006 & 0{,}013 & 0{,}020 & 0{,}010 & 0{,}006 & 0{,}013 & 0{,}001 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 74,0 \\ 56,0 \\ 10,5 \\ 25,0 \\ 17,5 \\ 196,0 \\ 5,0 \end{bmatrix}.$$

7. Матриці і комп'ютерна графіка

Під комп'ютерною графікою розуміють образи, тобто двовимірні зображення, які створюються, перетворюються, оцифровуються, обробляються та демонструються на комп'ютерному екрані. Робота з комп'ютерною графікою — один з найпопулярніших напрямів використання персонального комп'ютера. Сьогодні важко уявити, що вона отримала такий значний розвиток лише у останні 40 років. Без комп'ютерної графіки не обходиться жодна сучасна мультимедійна програма. Індустрія розваг розробила найбільше грандіозних використань комп'ютерних графік. Застосування комп'ютерних графік широко розповсюджується і швидко зростає.

Розрізняють векторну, растрову, та фрактальну комп'ютерні графіки. Векторна графіка — це спосіб представлення зображень, який базується на використанні елементарних геометричних об'єктів, таких як точки, прямі, сплайни, многокутники. Растрова графіка передбачає представлення зображення у вигляді набору пікселів (кольорових точок). Векторна комп'ютерна графіка використовується для креслярських і проектно-конструкторських робіт. У ній достатньо складні композиції займають порівняно з растровою графікою невеликий обсяг пам'яті та мають значно менші вимоги до продуктивності процесорів.

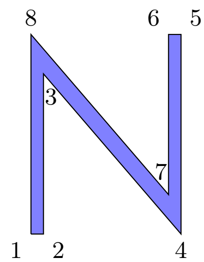
Покажемо деякі основні математичні засоби лінійної алгебри, які використовуються при зображенні графічних образів на екрані дисплея. Кожний такий образ містить деяку кількість точок, що зв'язані між собою прямими або кривими, а також інформацію про те, як заповнити області, що обмежуються цими прямими або кривими.

Серед найпростіших двовимірних графічних символів є літери (символи). Деякі літери формуються як каркасні об'єкти з точок і відрізків. Інші ж мають викривлені частини і тому окрім точок у цих випадках додаються ще математичні формули для задання відповідних кривих. Розглянемо найпростіші приклади.

Приклад 1. Велика літера N, що зображена на рисунку, визначена вісьмома точками або *вершинами*. Координати точок можуть бути записані в матрицю даних D:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 6 & 6 & 5{,}5 & 5{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}42 & 0 & 8 & 8 & 1{,}58 & 8 \end{bmatrix}$$

(i-ий стовпець матриці D є координатами i-ої вершини).[1]



Приклад 2. Задана матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ описує дію лінійного перетворення зсуву $\vec{\mathbf{x}} \mapsto A\vec{\mathbf{x}}$ на букві N у прикладі 1. Пояснити, як це відбувається.

Розв'язання. Як відомо, виконання лінійного перетворення над вектором рівносильне множенню його на матрицю цього перетворення у вибраному базисі. За означенням матричного множення стовпці добутку AD містять образи вершин букви N.

$$AD = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 2{,}105 & 6 & 8 & 7{,}5 & 5{,}895 & 2 \\ 0 & 0 & 6{,}420 & 0 & 8 & 8 & 1{,}580 & 8 \end{bmatrix}$$

Перетворені вершини накреслені на рис. 2.9 разом з зв'язаними прямими відрізками, які відповідають їм у вихідному рисунку. ■

Приклад 3. Обчислити матрицю перетворення, яке виконує перетворення зсуву з попереднього прикладу, а потім масштабує всі x-координати на множник 0,75.

[1] Окрім задання матриці D ще необхідно уточнити, які саме вершини зв'язані відрізками. Ми опускаємо цю деталь.

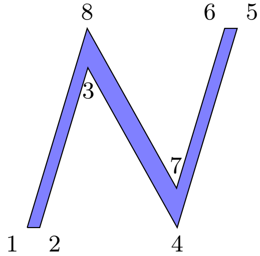


Рис. 2.9.

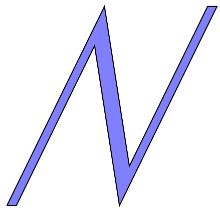


Рис. 2.10.

Розв'язання. Перетворення стиску, яке при незмінній ординаті змінює абсцису з коефіцієнтом 0,75 задається матрицею

$$S = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді матрицею композиції двох перетворень є

$$SA = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}1875 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, в результаті отримаємо

$$(SA)D = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,1875 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 6 & 6 & 5{,}5 & 5{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}42 & 0 & 8 & 8 & 1{,}58 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0{,}375 & 1{,}579 & 4,5 & 6 & 5{,}625 & 4{,}421 & 1,5 \\ 0 & 0 & 6{,}42 & 0 & 8 & 8 & 1{,}58 & 8 \end{bmatrix}$$

Результат цього перетворення показано на рисунку 2.10. ■

Математика комп'ютерних графік тісно пов'язана з матричним множенням. На жаль, паралельне перенесення об'єкта на екрані не відповідає прямо матричному множенню тому, що перенесення не є лінійним перетворенням. Стандартним шляхом уникнення цих труднощів є введення так званих *однорідних координат.*

Однорідні координати.

Кожна точка (x, y) у $\mathbb{R}^2$ може бути ототожнена з точкою $(x, y, 1)$ на площині у $\mathbb{R}^3$, яка лежить на одну одиницю вище площини xOy. Ми говоримо, що точка (x, y) має *однорідні координати* $(x, y, 1)$. Наприклад, точка $(0, 0)$ має однорідні координати $(0, 0, 1)$. Однорідні координати точок не додаються та не множаться на скаляри, але вони можуть бути перетворені засобами матричного множення матриць 3-го порядку.

Приклад 4. Паралельне перенесення виду $(x, y) \mapsto (x + h, y+k)$ записується у однорідних координатах, як $(x, y, 1) \mapsto (x+h, y+k, 1)$. Це перетворення може бути обчислене за допомогою матричного множення:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Приклад 5. Будь-яке лінійне перетворення на $\mathbb{R}^2$ представляється у однорідних координатах за допомогою блочної матриці виду $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ де A — матриця другого порядку. Типовими прикладами є:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот навколо початку проти годинникової стрілки на кут φ	Симетрія відносно $y = x$	Множення x на s та y на t

Композиція перетворень.

Рух (переміщення) фігури на комп'ютерному екрані часто вимагає двох або більше базисних перетворень. Композиція таких перетворень відповідає матричному множенню (якщо використовуються однорідні координати).

Приклад 6. Знайти матрицю третього порядку, яка відповідає композиції перетворень масштабування з коефіцієнтом 0,3, повороту на 90° і паралельного перенесення на вектор $(-0{,}5; 2)$.

Розв'язання. Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\varphi = 1$ і $\cos\varphi = 0$. З прикладів 4 і 5 знаходимо матриці:

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

а) масштабування з коефіцієнтом 0,3; б) поворот на 90°; в) Паралельне перенесення на вектор $(-0{,}5; 2)$

Тоді матриця композиції цих перетворень дорівнює

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0{,}5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3 & -0{,}5 \\ 0{,}3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Однорідні тривимірні (3D) координати.

По аналогії з двовимірним випадком ми говоримо, що $(x, y, z, 1)$ є однорідними координатами для точки (x, y, z) у $\mathbb{R}^3$. Взагалі, (X, Y, Z, H) є *однорідними координатами* для (x, y, z), якщо $H \neq 0$ і

$$x = \frac{X}{H}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad \frac{Z}{H}. \tag{2.18}$$

Кожне множення вектора $(x, y, z, 1)$ на ненульовий скаляр дає множину однорідних координат для точки (x, y, z). Наприклад, і $(10, -6, 14, 2)$, і $(-15, 9, -21, -3)$ є однорідними координатами для вектора $(5, -3, 7)$.

Приклад 7. Задайте матриці четвертого порядку для наступних перетворень:

а) Поворот навколо осі Oy на кут 30°. (Для зручності, додатні кути відраховуються проти годинникової стрілки, коли дивитися у напрямі на початок з додатної половини осі повороту — у цьому випадку, осі Oy.)

б) Паралельне перенесення на вектор $\vec{\mathbf{p}} = (-6, 4, 5)$.

Розв'язання. а) Спочатку сконструюємо матрицю третього порядку для повороту. Для цього знайдемо образи базисних векторів при вказаному перетворенні. Вектор $\vec{\mathbf{e}}_1$ відображається у вектор з координатами $(\cos 30°, 0, -\sin 30°) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -0{,}5)$. Вектор $\vec{\mathbf{e}}_2$ відображається сам в себе, а вектор $\vec{\mathbf{e}}_3$ — у вектор $(\sin 30°, 0, \cos 30°) = (0{,}5, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Стандартна матриця для цього повороту має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

а матриця повороту для однорідних координат —

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

б) Матриця паралельного перенесення на вектор $\vec{\mathbf{p}} = (-6, 4, 5)$ має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Перспективне проектування.

Тривимірний об'єкт представляється на двовимірному комп'ютерному екрані шляхом проектування об'єкта на *оглядову площину*[1]. Для спрощення, нехай площина xOy представляє комп'ютерний екран і вважатимемо, що око оглядає вздовж додатної осі Oz і перебуває в точці $(0, 0, d)$. *Перспективне проектування* відображає кожну точку (x, y, z) в точку $(x^*, y^*, 0)$ так, що ці дві точки і позиція ока, названа *центром проектування*, лежать на одній прямій (див. рис. 2.11а).

[1]Ми ігноруємо інші важливі кроки такі, як вибір частин оглядової площини висвітлених на екрані.

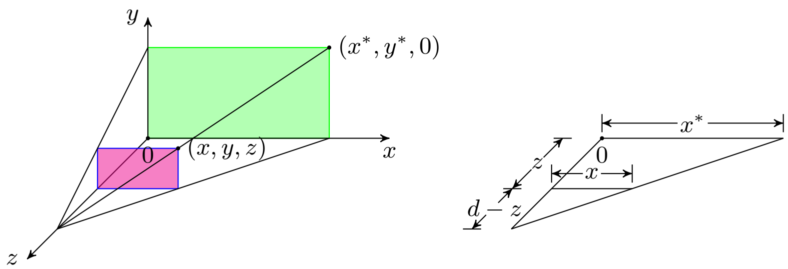


Рис. 2.11. Перспективна проекція (x, y, z) на $(x^*, y^*, 0)$.

Довжини відрізків у площині xOz вказано на рис. 2.11б. З подібних трикутників знаходимо, що

$$\frac{x^*}{d} = \frac{x}{d-z} \quad \text{і} \quad x^* = \frac{dx}{d-z} = \frac{x}{1-z/d}.$$

Аналогічно знаходимо

$$y^* = \frac{y}{1-z/d}.$$

Використовуючи однорідні координати ми можемо представити проектування за допомогою матриці, скажемо, P. Ми хочемо $(x, y, z, 1)$ відобразити на $(\frac{x}{1-z/d}, \frac{y}{1-z/d}, 0, 1)$. Мастабуючи ці координати на $1 - \frac{z}{d}$ ми можемо також використати $(x, y, 0, 1 - z/d)$ як однорідні координати для образу. Тепер легко знайти P. Оскільки

$$P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 - z/d \end{bmatrix},$$

то

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{bmatrix}.$$

Приклад 8. Нехай S — паралелепіпед з вершинами $(3, 1, 5)$, $(5, 1, 5)$, $(5, 0, 5)$, $(3, 0, 5)$, $(3, 1, 4)$, $(5, 1, 4)$, $(5, 0, 4)$ і $(3, 0, 4)$. Знайти образ S при проектуванні, якщо за його центр вибрана точка $(0, 0, 10)$.

Розв'язання. Нехай P — проекційна матриця, D — матриця даних, що використовує однорідні координати. Матриця даних для образу S визначається як матричний добуток PD:

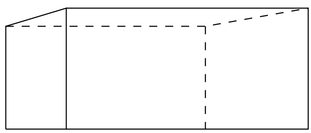
$$PD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Для отримання координат у $\mathbb{R}^3$ використаємо (2.18) і розділимо верхніх три координати у кожному стовпці на відповідний елемент у четвертому рядку:

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 & 10 & 6 & 5 & 8{,}3 & 8{,}3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1{,}7 & 1{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Зобразимо отриману фігуру:



■

Безперервний рух графічних тривимірних об'єктів вимагає значних операцій над матрицями четвертого порядку, особливо коли *перетворені* поверхні появляються реалістично, з текстурою і відповідним освітленням. *Високо-закінчені комп'ютерні графічні панелі* мають 4×4 матричні операції і графічні алгоритми вкладені у їх мікрочіпи і панелі. Такі панелі можуть виконувати мільярди матричних множень за секунду, які необхідні для реалістичного кольорового мультиплікування у тривимірних ігрових програмах.

Вправи

1. Використавши множення матриць, знайти образ трикутника з матрицею даних $D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ при перетворенні, яке симетрично відображає точки відносно осі Oy.

У Вправах 2–4 знайти матриці третього порядку, які задають наступні перетворення площини, використавши однорідні координати.

2. Композиція паралельного перенесення на вектор $(3, 1)$ і повороту на 45° відносно початку координат.

3. Композиція симетрії точок відносно осі Ox і повороту на 30° відносно початку координат.

4. Поворот точок на 60° відносно точки $(6, 8)$.

5. Зазвичай колір на екрані закодовано трійкою чисел (R, G, B), що перелічують обсяг енергії, які електронна гармата повинна передати у червону, зелену і блакитну фосфорні точки на комп'ютерному екрані (так звана RGB кольорова модель). Сигнал передачі через комерційне телебачення здійснюється з допомогою кольорової моделі YIQ, яка описує кожний колір вектором (Y, I, Q), де Y — складова яскравості, I, Q — дві різнокольорові складові. Відповідність між YIQ і «стандартом» RGB задається наступним зв'язком:

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}299 & 0{,}587 & 0{,}114 \\ 0{,}596 & -0{,}274 & -0{,}321 \\ 0{,}211 & -0{,}523 & 0{,}311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}.$$

Знайти рівність, яка конвертує YIQ-дані у дані стандарту RGB.

8. Детермінанти і матриці у математичному аналізі

У цьому параграфі ми проілюструємо як поняття матриці, детермінанту, векторного простору, лінійної залежності та незалежності векторів, квадратичної форми застосовуються при розв'язуванні задач математичного аналізу.

Інтегрування.

Покажемо спочатку, як матриця лінійного перетворення відносно деякого базису $\mathcal{B}$ може бути використана для знаходження первісних.

Зазвичай знаходження $\int t^2e^tdt$ здійснюється методом інтегрування частинами (який застосовується двічі). У результаті цього отримаємо, що

$$\int t^2e^tdt = t^2e^t - 2te^t + 2e^t + C.$$

Разом з тим, для розв'язання цієї задачі можуть бути використані методи лінійної алгебри. Коротко нагадаємо поняття лінійно залежної та лінійно незалежної системи функцій.

ОЗНАЧЕННЯ 2.2. Функції $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), \ldots, y_k = f_k(x)$, з однаковою областю визначення D називаються **лінійно залежними на** D**,** якщо існує набір чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, серед яких принаймні одне відмінне від нуля, такий, що має місце тотожність

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_k f_k(x) = 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in D.$$

Якщо остання рівність виконується тільки у єдиному випадку, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то дані функції називаються **лінійно незалежними на** D**.**

Розглянемо множину функцій $\mathcal{B} = \{t^2e^t, te^t, e^t\}$. Ця множина є лінійно незалежною у векторному просторі всіх функцій від однієї змінної визначених і неперервних над полем дійсних чисел. Це легко встановити розглянувши рівність

$$C_1t^2e^t + C_2te^t + C_3e^t = 0.$$

Ця рівність повинна бути істиною для всіх дійсних t. Виберемо три конкретних значення для t: 0, 1 і 2. Це породжує наступну систему рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & C_3 & = & 0, \\ eC_1 & + & C_2 & + & eC_3 & = & 0, \\ 4e^2C_1 & + & 2e^2C_2 & + & e^2C_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

Легко бачити, що ця система має єдиний нульовий розв'язок $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, тобто множина $\mathcal{B}$ є лінійно незалежною.

Оскільки множина $\mathcal{B} = \{t^2e^t, te^t, e^t\}$ є лінійно незалежною, то вона є базисом для множини $V = L(t^2e^t, te^t, e^t)$ (лінійної оболонки векторів цієї множини). Нехай D — оператор диференціювання, тобто $D(\mathbf{f}) = \mathbf{f}'$ для всіх функцій $\mathbf{f}$ з V. D є лінійним перетворенням і відмітимо, що D відображає V у V, тобто $D(\mathbf{f})$ є елементом V для всіх функцій $\mathbf{f}$ з V. Таким чином, існує матриця оператора D відносно базису $\mathcal{B}$, яку позначимо через $[D]_{\mathcal{B}}$. Її стовпцями є образи базисних векторів при дії оператора диференціювання. Отже, матриця $[D]_{\mathcal{B}}$ може бути знайдена обчисленням

$$[D]_{\mathcal{B}} = \left[[D(t^2e^t)]_{\mathcal{B}} \quad [D(te^t)]_{\mathcal{B}} \quad [D(e^t)]_{\mathcal{B}}\right].$$

Оскільки $D(t^2e^t) = t^2e^t + 2te^t$, $D(te^t) = te^t + e^t$ і $D(e^t) = e^t$, то звідси слідує, що

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки при обраному базисі $\mathcal{B}$ координати образу і прообразу при відображенні T пов'язані співвідношенням

$$[T(\vec{\mathbf{x}})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \cdot [\vec{\mathbf{x}}]_{\mathcal{B}},$$

то матриця $[D]_{\mathcal{B}}$ може бути використана для диференціювання елементів множини V.

Приклад 1. Знайти похідну функції $f(t) = 5t^2e^t - 3te^t + 2e^t$.

Розв'язання. Оскільки $[\mathbf{f}]_{\mathcal{B}} = (5, -3, 2)$, то

$$[D(\mathbf{f})]_{\mathcal{B}} = [D]_{\mathcal{B}}[\mathbf{f}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

і $f'(t) = 5t^2e^t + 7te^t - e^t$.

Як відомо, знаходження первісної до даної функції є оберненою операцією до диференціювання. У даному випадку, матриця оператора диференціювання $[D]_{\mathcal{B}}$ є оборотною, і

$$[D]_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Остання матриця є матрицею лінійного оператора, який функції $\mathbf{f}$ з простору V ставить у відповідність її первісну $[D]_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{f}$. Таким чином, для знаходження $\int t^2e^t dt$ спочатку знайдемо координати вектора t^2e^t відносно базису $\mathcal{B}$: $[t^2e^t]_{\mathcal{B}} = (1, 0, 0)$. Тоді

$$[D]_{\mathcal{B}}^{-1}[t^2e^t]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Отже, первісна від t^2e^t у просторі V є $t^2e^t - 2te^t + 2e^t$. З математичного аналізу відомо, що *всі* первісні до t^2e^t мають вигляд $\int t^2e^t dt = t^2e^t - 2te^t + 2e^t + C$ для деякої константи C. ■

Перед розглядом інших прикладів інтегрування цим методом відзначимо, що в попередньому прикладі він виявився ефективним, оскільки матриця $[D]_{\mathcal{B}}$ була невиродженою і, отже, мала обернену. Це не завжди трапляється.

Приклад 2. Розглянемо простір $V = L(1, t, t^2)$. Його базисом є $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$. Матриця оператора диференціювання D відносно базису $\mathcal{B}$ на цьому просторі дорівнює

$$[D]_{\mathcal{B}} = [[D(1)]_{\mathcal{B}} \;\; [D(t)]_{\mathcal{B}} \;\; [D(t^2)]_{\mathcal{B}}] =$$
$$= [[0]_{\mathcal{B}} \;\; [1]_{\mathcal{B}} \;\; [2t]_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця $[D]_{\mathcal{B}}$ вироджена, то оператор диференціювання не має оберненого на просторі $V = L(1, t, t^2)$. Отже, у цьому випадку запропонований метод застосувати не можна.

Таким чином, запропонований в прикладі 1 метод інтегрування може бути використаний у інших випадках тільки тоді, коли існує базис простору, відносно якого оператор диференціювання є оборотним.

Поняття детермінанта знайшло своє застосування у математичному аналізі при розв'язуванні однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку та при вивченні функцій багатьох змінних. Зупинимося на цьому коротко.

Вронскіан.

Нехай маємо однорідне диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{2.19}$$

де $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ — відомі неперервні на деякому проміжку функції, $y = y(x)$ — невідома функція. Легко перевірити, що множина L розв'язків такого рівняння є векторним простором над полем $\mathbb{R}$. Цілком природно виникає питання про розмірність цього простору та його базис.

У математичному аналізі доведено такий факт: якщо функції $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), \ldots, y_n = f_n(x)$ лінійно залежні на інтервалі (a, b) і на ньому мають послідовні похідні до $(n-1)$-го порядку, то функціональний детермінант

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

дорівнює нулю для всіх $x \in (a, b)$.

Цей детермінант називається **детермінантом Вронського**[1] **або вронскіаном** системи функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ і позначається $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

За логічним законом контрапозиції ($p \to q \equiv \bar{q} \to \bar{p}$) випливає, що коли $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ не дорівнює нулю принаймні в одній точці інтервала (a, b), то система функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є лінійно незалежною.

У випадку, коли названі функції є розв'язками диференціального рівняння (2.19) і коефіцієнти рівняння є неперервними функціями, то з рівності їхнього вронскіана нулю випливає лінійна залежність функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Доводиться також, що будь-яке рівняння виду (2.19) має n лінійно незалежних розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$, які утворюють базис у множині L всіх розв'язків рівняння (2.19). Цю множину

[1] Józef Maria Hoene-Wroński (1776–1853) — польський математик і філософ.

називають **фундаментальною системою розв'язків** і кожен розв'язок рівняння (2.19) можна подати у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \tag{2.20}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – константи. Рівність (2.20) називають загальним розв'язком рівняння (2.19).

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$.

Розв'язання. Коефіцієнти рівняння є неперервними функціями від змінної x на проміжках $(-\infty, 0)$ та $(0, +\infty)$. Легко перевірити, що $y_1 = x$ і $y_2 = e^x$ є розв'язками цього диференціального рівняння.

Складемо вронскіан для цих розв'язків:

$$W = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x = e^x(x-1).$$

Оскільки при $x = 0$ маємо $W(0) = -1 \neq 0$, то знайдені частинні розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків. Таким чином, загальним розв'язком даного рівняння є $y = C_1 x + C_2 e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ■

У випадку, коли коефіцієнти рівняння (2.19) є дійсними числами, то знаходження його загального розв'язку значно спрощується.

Якобіан.

Нехай задана система функцій $u_i = u_i(t_1, \ldots, t_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, які мають у деякій точці $t_0 = (t_1^0, \ldots, t_n^0)$ всі частинні похідні першого порядку.

Означення 2.3. Матриця, складена з частинних похідних цих функцій у точці $t_0 = (t_1^0, \ldots, t_n^0)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} & \frac{\partial u_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} & \frac{\partial u_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1} & \frac{\partial u_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial t_n} \end{bmatrix} \equiv \left[\frac{\partial u_i}{\partial t_j}\right]_{\substack{i=1,2,\ldots,m, \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

називається **матрицею Якобі**[1] системи функцій $(u_1, \ldots, u_m)$.

Якщо $m = n$, то детермінант матриці Якобі називається **якобіаном** системи функцій $u_1, \ldots, u_n$ по змінних $t_1, \ldots, t_n$ і позначається

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)} \quad \text{або} \quad \frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)}.$$

Застосування якобіана до знаходження інтегралів ми проілюструємо на прикладі двовимірного простору.

Нехай D – деяка область у площині xOy і S – деяка область у площині uOv. Нехай взаємно однозначне відображення $f\colon D \to S$ задано за допомогою формул $x = h(u, v)$ та $y = g(u, v)$. Нехай f є диференційовною функцією на D. Припустимо, що h і g мають неперервні похідні на S та якобіан

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля.

При названих умовах у математичному аналізі доводиться, що має місце така формула заміни змінних у подвійному інтегралі:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_S f(h(u, v), g(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv. \qquad (2.21)$$

Проілюструємо її застосування на прикладах.

Приклад 4. У подвійному інтегралі перейти від декартової прямокутної системи до полярної системи координат.

Розв'язання. Добре відомі формули переходу від декартової до полярної системи координат: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Тоді якобіан цих функцій

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta =$$
$$= r > 0.$$

[1] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) — німецький математик.

Отже, отримаємо

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_S f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta.$$

■

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D e^{(x+y)/(x-y)}dxdy$, де область D — це трапеція з вершинами $(1,0), (2,0), (0,-2)$ і $(0,-1)$.

Розв'язання. Оскільки інтеграл обчислювати важко, то варто зробити заміну змінних по формі виразів у показнику підінтегральної функції:

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

Ці рівності визначають перетворення площини xOy у площину uOv. Для знаходження оберненого перетворення розв'яжемо ці рівняння відносно x і y. Отримаємо

$$x = \frac{1}{2}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v).$$

Обчислимо якобіан цього перетворення:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Для знаходження області S у площині uOv, яка відповідає D ми відзначимо, що сторони трапеції D лежать на прямих

$$x = 0, \quad x - y = 2, \quad y = 0, \quad x - y = 1.$$

Тоді відповідні сторони S лежать на прямих

$$u = -v, \quad v = 2, \quad u = v, \quad v = 1.$$

Тому область S — це трапеція з вершинами $(1,1)$, $(2,2)$, $(-2,2)$ і $(-1,1)$.

Оскільки

$$S = \{(u,v) | 1 \leqslant v \leqslant 2, -v \leqslant u \leqslant v\},$$

то за формулою (2.21) знаходимо:

$$\iint\limits_D e^{(x+y)/(x-y)}\,dx\,dy = \iint\limits_S e^{u/v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv =$$

$$= \int\limits_1^2 \int\limits_{-v}^{v} e^{u/v}\left|-\frac{1}{2}\right| du\,dv = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \left(ve^{u/v}\right)\Big|_{-v}^{v} dv =$$

$$= \frac{1}{2}(e-e^{-1})\int\limits_1^2 v\,dv = \frac{3}{4}(e-e^{-1}).$$

■

Існує подібна заміна змінних також у потрійному інтегралі.

Теорема 2.7. *Якщо функція $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ відображає область $\mathbb{R}^3$ у uvw-просторі на область $\mathbb{R}^3$ у xyz-просторі за допомогою формул*

$$x = g(u,v,w) \quad y = h(u,v,w) \quad z = k(u,v,w)$$

і вона диференційовна, то має місце формула заміни змінних для потрійного інтеграла:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_S f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

Слід відзначити, що у математичному аналізі функцій багатьох змінних доводять аналогічний результат для n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$.

Заміна змінних у кратному інтегралі часто суттєво спрощує його обчислення. При цьому нерідко метою заміни змінних є не стільки спрощення підінтегральної функції, скільки перехід до більш простої області інтегрування.

Різноманітні вправи на розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь та обчислення подвійних і потрійних інтегралів розглядаються у всіх збірниках з математичного аналізу.

Гессіан.

Поняття матриці і квадратичної форми можуть бути застосовані для дослідження функцій від двох змінних на екстремум.

Знаходження екстремальних значень функцій є одним з застосувань математичного аналізу. Часто існують деякі фізичні або економічні інтерпретації функції, для яких максимізація або мінімізація має найбільше практичне значення. Нагадаємо спочатку, як знайти екстремальне значення функції однієї змінної $y = f(x)$.

Означення 2.4. Точку x_0 називають **точкою максимуму** функції $f(x)$, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x) \leqslant f(x_0)$. Точку x_0 називають **точкою мінімуму** функції $f(x)$, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x) \geqslant f(x_0)$. Точки максимуму і мінімуму називають **точками екстремуму** функції.

Зазначимо, що точки максимуму (мінімуму) ще називають точками *локального*, або *відносного максимуму* (*мінімуму*), підкреслюючи тим самим, що в них функція набуває найбільшого або найменшого значення в певному околі, а не скрізь на області визначення. У випадку, коли існує окіл точки x_0 такий, що для всіх значень x з цього околу, відмінних від x_0, виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), то точку x_0 називають точкою *строгого максимуму* (*строгого мінімуму*) функції $f(x)$.

Для знаходження точок екстремуму функції $f(x)$ знаходять її **критичні точки**: точки області визначення функції, в яких похідна дорівнює нулю або не існує. Відмітимо, що в точках, в яких значення похідної дорівнює нулю, дотична до кривої $f(x)$ паралельна осі Ox. Тоді якщо $f'(x_0) = 0$, то обчислення другої похідної може бути застосоване для визначення того, точкою максимуму чи мінімуму є x_0, а саме: якщо $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то x_0 є точкою мінімуму (максимуму).

Ситуація є подібною, коли вивчаються функції декількох змінних. Нехай $f(\vec{\mathbf{x}}) = f(x_1, x_2)$ — функція, визначена деякій множині E. Поняття точок екстремуму для $f(\vec{\mathbf{x}})$ визначається аналогічно, як і для функції однієї змінної.

Означення 2.5. Точка $\vec{\mathbf{x_0}} \in E$ називається точкою **строгого максимуму** (відповідно, точкою **строгого мінімуму**), якщо існує такий окіл точки $\vec{\mathbf{x_0}}$, що для всіх значень $\vec{\mathbf{x}}$ з цього околу, відмінних від $\vec{\mathbf{x_0}}$, виконується нерівність $f(\vec{\mathbf{x}}) < f(\vec{\mathbf{x_0}})$ (відповідно, $f(\vec{\mathbf{x}}) > f(\vec{\mathbf{x_0}})$).

Якщо існує такий окіл точки $\vec{\mathbf{x_0}}$, що для всіх значень $\vec{\mathbf{x}}$ з цього околу виконується нерівність $f(\vec{\mathbf{x}}) \leqslant f(\vec{\mathbf{x_0}})$ ($f(\vec{\mathbf{x}}) \geqslant f(\vec{\mathbf{x_0}})$), то точка x_0 називається просто *точкою максимуму* (*мінімуму*), або *відносного максимуму* (*мінімуму*). Для позначення максимуму і мінімуму використовується більш загальний термін — *екстремум.*

Для знаходження точок відносного екстремуму (якщо вони існують) перевіряють **дотичну площину** до поверхні $z = f(\vec{\mathbf{x}})$ у точці $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}}$. **Градієнтом** функції f у точці $\vec{\mathbf{a}}$ називається вектор

$$\nabla f(\vec{\mathbf{a}}) = (f_1(\vec{\mathbf{a}}), f_2(\vec{\mathbf{a}})),$$

де f_1 і f_2 — частинні похідні функції f взяті відповідно по x_1 і x_2. Рівняння дотичної площини у точці $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}}$ може бути записане у такій формі:

$$z = \vec{\mathbf{a}} + \nabla f(\vec{\mathbf{a}}) \cdot (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}).$$

Якщо функція $f(\vec{\mathbf{x}})$ має екструмум в точці $\vec{\mathbf{a}}$ і в ній диференційовна, то дотична площина, до графіка цієї функції в точці $\vec{\mathbf{a}}$ є горизонтальною, що відбувається тоді, коли $\nabla f(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Тому для відшукання точок екструмуму функції розв'язують рівняння $\nabla f(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}$, розв'язки якого називають *стаціонарними точками.* Цієї умови недостатньо для існування естремуму в точці $\vec{\mathbf{a}}$, для якої $\nabla f(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Методи лінійної алгебри допоможуть знайти достатні умови існування екстремуму в такій точці.

Припустимо, що f має першу і другу частинні похідні і, що ці функції є неперервними. Теорема Тейлора для функції декількох змінних говорить, що

$$f(\vec{\mathbf{x}}) = p_2(\vec{\mathbf{x}}) + R_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}), \quad \text{де}$$

$$p_2(\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + \nabla f(\vec{\mathbf{a}}) \cdot (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) + \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}})^T \begin{bmatrix} f_{11}(\vec{\mathbf{a}}) & f_{12}(\vec{\mathbf{a}}) \\ f_{21}(\vec{\mathbf{a}}) & f_{22}(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}})$$

і $R_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}})$ — залишковий член. Частинні похідні другого порядку функції f позначені тут через f_{11}, f_{12}, f_{21} і f_{22}: $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Матриця у виразі для $p_2(\vec{\mathbf{x}})$ віграє важливу роль у аналізі.

Означення 2.6. **Матрицею Гессе**[1] функції $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається матриця:

$$H_f(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\vec{\mathbf{x}}) & f_{12}(\vec{\mathbf{x}}) \\ f_{21}(\vec{\mathbf{x}}) & f_{22}(\vec{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці називається **визначником Гессе**, або **гессіаном**.

Гессіан визначає поведінку функції f у стаціонарній точці $\vec{\mathbf{a}}$. Оскільки $\nabla f(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$, то

$$f(\vec{\mathbf{x}}) = p_2(\vec{\mathbf{x}}) + R_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}})^T H(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) + R_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}).$$

Тому

$$f(\vec{\mathbf{x}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}})^T H(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) + R_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}).$$

Для дослідження поведінки функції f у стаціонарній точці $\vec{\mathbf{a}}$ повинна бути розглянута величина $f(\vec{\mathbf{x}}) - f(\vec{\mathbf{a}})$:

- Якщо $f(\vec{\mathbf{x}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) < 0$ для всіх $\vec{\mathbf{x}}$ з деякого околу точки $\vec{\mathbf{a}}$, то f має *локальний максимум* у $\vec{\mathbf{a}}$.
- Якщо $f(\vec{\mathbf{x}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) > 0$ для всіх $\vec{\mathbf{x}}$ з деякого околу точки $\vec{\mathbf{a}}$, то f має *локальний мінімум* у $\vec{\mathbf{a}}$.
- Якщо $f(\vec{\mathbf{x}}) - f(\vec{\mathbf{a}})$ є від'ємним для деяких виборів $\vec{\mathbf{x}}$ близьких до $\vec{\mathbf{a}}$ і додатним для деяких виборів $\vec{\mathbf{x}}$ близьких до $\vec{\mathbf{a}}$, то f не має локального екстремуму у $\vec{\mathbf{a}}$. У цій ситуації говорять, що f має *сідлову точку* $\vec{\mathbf{a}}$.

Якщо $\vec{\mathbf{x}}$ наближається до $\vec{\mathbf{a}}$, то $R_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}})$ прямує до $\vec{\mathbf{0}}$. Тому якщо значення виразу $\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}})^T H(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}})$ набуває лише додатних (або від'ємних) значень коли $\vec{\mathbf{x}}$ наближається до $\vec{\mathbf{a}}$, то $R_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}})$ не впливатиме на знак виразу $f(\vec{\mathbf{x}}) - f(\vec{\mathbf{a}})$, коли $\vec{\mathbf{x}}$ близьке до

[1] Ludwig Otto Hesse (1811–1874) — німецький математик.

$\vec{\mathbf{a}}$. Проте коли $\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}})^T H(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}}) = 0$ для деяких значень $\vec{\mathbf{x}}$, то відповідь могла б залежати від залишкового члену $R_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}})$, який невідомий. Оскільки важливим є знак виразу $f(\vec{\mathbf{x}}) - f(\vec{\mathbf{a}})$, а не його величина, то константу $\frac{1}{2}$ можна опустити з аналізу. Таким чином, підсумовуючи ці міркування, встановлюємо:

- Якщо $(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}})^T H(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}}) < 0$ для всіх $\vec{\mathbf{x}}$ з деякого околу точки $\vec{\mathbf{a}}$, то існує **локальний максимум** у точці $\vec{\mathbf{a}}$.
- Якщо $(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}})^T H(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}})$ для всіх $\vec{\mathbf{x}}$ з деякого околу точки $\vec{\mathbf{a}}$, то існує **локальний мінімум** у точці $\vec{\mathbf{a}}$.
- Якщо $(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}})^T H(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}})$ є додатним для деяких виборів $\vec{\mathbf{x}}$ і від'ємним для деяких виборів $\vec{\mathbf{x}}$, як завгодно близьких до $\vec{\mathbf{a}}$, то $\vec{\mathbf{a}}$ є **сідловою точкою**.
- Якщо $(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}})^T H(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}}) = 0$ для вибору $\vec{\mathbf{x}}$, як завгодно близького до $\vec{\mathbf{a}}$, то ми не можемо зробити висновок щодо того, чи є екстремум в точці $\vec{\mathbf{a}}$.

Приклад 6. Дослідити на екстремум цю функцію

$$f(\vec{\mathbf{x}}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 - 4.$$

Розв'язання. Тоді $f_1(\vec{\mathbf{x}}) = 2x_1 - x_2 + 2$, $f_2(\vec{\mathbf{x}}) = 2x_2 - x_1 + 2$ та $\nabla f(\vec{\mathbf{x}}) = (2x_1 - x_2 + 2, 2x_2 - x_1 + 2)$. Тепер розв'язуємо рівняння $\nabla f(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}$, тобто систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є тільки $x_1 = -2$ та $x_2 = -2$, тобто існує одна стаціонарна точка $\vec{\mathbf{a}} = (-2, -2)$. Диференціюючи знову знаходимо $f_{11}(\vec{\mathbf{a}}) = 2$, $f_{12}(\vec{\mathbf{a}}) = f_{21}(\vec{\mathbf{a}}) = -1$ і $f_{22}(\vec{\mathbf{a}}) = 2$. Тому гессіан f у критичній точці $\vec{\mathbf{a}}$ дорівнює

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

і

$$f(\vec{\mathbf{x}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}})^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} (\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}}) + R_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}).$$

Нехай $\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}$ Вираз $(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}})^T H(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{z}}^T H \vec{\mathbf{z}}$ є квадратичною формою $Q(\vec{\mathbf{z}}) = \vec{\mathbf{z}}^T H \vec{\mathbf{z}}$, а гессіан H є її матрицею.

Тоді попередні спостереження про локальний максимум, локальний мінімум і сідлову точку можуть бути переформульовані у такому вигляді:

- Якщо $Q(\vec{\mathbf{z}}) < 0$ для всіх $\vec{\mathbf{z}}$, то $\vec{\mathbf{a}}$ є точкою локального максимуму.
- Якщо $Q(\vec{\mathbf{z}}) > 0$ для всіх $\vec{\mathbf{z}}$, то $\vec{\mathbf{a}}$ є точкою локального мінімуму.
- Якщо $Q(\vec{\mathbf{z}})$ набуває як додатних, так і від'ємних значень, то $\vec{\mathbf{a}}$ є сідловою точкою.
- Якщо $Q(\vec{\mathbf{z}}) = 0$ для вибору $\vec{\mathbf{z}}$, висновок про екстремум в точці $\vec{\mathbf{a}}$ не може бути зроблено і функція вимагає додаткового дослідження.

Відмітимо, що перших три умови є означеннями від'ємно визначеної, додатно визначеної і невизначеної квадратичної форм.

Стандартною матрицею для цієї квадратичної форми Q є матриця

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Теорема про головні осі говорить, що існує ортогональна заміна змінної $\vec{\mathbf{z}} = P\vec{\mathbf{y}}$, яка перетворює квадратичну форму $\vec{\mathbf{z}}^T H\vec{\mathbf{z}}$ у квадратичну форму $\vec{\mathbf{y}}^T D\vec{\mathbf{y}}$, де D є діагональною матрицею, діагональними елементами якої є власні значення матриці H, враховуючи кратність.

Власними значеннями матриці H є 1 і 3 і матриця H може бути діагоналізована, тобто представлена у вигляді $H = PDP^{-1}$, де

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Якщо $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$, то

$$\vec{\mathbf{y}}^T D\vec{\mathbf{y}} = [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1^2 + 3y_2^2.$$

Ця квадратична форма є додатно визначеною для всіх виборів y_1 і y_2, тобто всіх виборів $\vec{\mathbf{y}}$. Отже, $Q(\vec{\mathbf{z}}) > 0$ для всіх виборів $\vec{\mathbf{z}}$ (отже, Q — додатно визначена квадратична форма) і $f(\vec{\mathbf{x}}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 - 4$ має відносний мінімум у точці $\vec{\mathbf{a}} = (-2, -2)$. ■

Нарешті відзначимо, що за відомою теоремою з лінійної алгебри, поведінка $f(\vec{\mathbf{z}})$ у критичній точці може бути встановлена через визначення власних значень матриці Гессе

$$H = \begin{bmatrix} f_{11}(\vec{\mathbf{a}}) & f_{12}(\vec{\mathbf{a}}) \\ f_{21}(\vec{\mathbf{a}}) & f_{22}(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Якщо всі власні значення матриці H додатні, то $\vec{\mathbf{a}}$ є точкою локального мінімуму функції $f(\vec{\mathbf{x}})$.
- Якщо всі власні значення матриці H від'ємні, то $\vec{\mathbf{a}}$ є точкою локального максимуму функції $f(\vec{\mathbf{x}})$.
- Якщо власні значення матриці H різних знаків, то $\vec{\mathbf{a}}$ є сідловою точкою функції $f(\vec{\mathbf{x}})$.
- Якщо усі власні значення матриці H дорівнюють нулю, то висновок щодо екстремуму в точці $\vec{\mathbf{a}}$ не може бути зроблено і функція вимагає додаткового дослідження.

Подібний аналіз застосовують до функцій f від трьох змінних.

Якщо матриця Гессе функції f у точці $\vec{\mathbf{a}}$ визначена так:

$$H = \begin{bmatrix} f_{11}(\vec{\mathbf{a}}) & f_{12}(\vec{\mathbf{a}}) & f_{13}(\vec{\mathbf{a}}) \\ f_{21}(\vec{\mathbf{a}}) & f_{22}(\vec{\mathbf{a}}) & f_{23}(\vec{\mathbf{a}}) \\ f_{31}(\vec{\mathbf{a}}) & f_{32}(\vec{\mathbf{a}}) & f_{33}(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix},$$

то власні значення H визначають поведінку $f(\vec{\mathbf{x}})$ у стаціонарній точці (де $\nabla f(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$) точно так, як вони роблять це у випадку функції двох змінних.

Вправи

1. Застосуйте метод з прикладу 1 для знаходження таких невизначених інтегралів:

а) $\int te^t\,dt$; б) $\int(5t^2e^t - 3te^t)\,dt$; в) $\int(-2t^2e^t + te^t + 5e^t)\,dt$.

2. Розглянемо відшукання інтегралу $\int t^3e^tdt$. Нехай $\mathcal{B} = \{t^3e^t, t^2e^t, te^t, e^t\}$ і нехай V — векторний простір функцій, породжених функціями з $\mathcal{B}$.

а) Показати, що множина $\mathcal{B}$ є лінійно незалежною.

б) Показати, що оператор диференціювання D відображає V у V.

в) Знайти матрицю $[D]_{\mathcal{B}}$ для оператора диференціювання D.

г) Обчислити $[D]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

д) Використайте $[D]_{\mathcal{B}}^{-1}$ для знаходження $\int t^3 e^t dt$.

е) Обчислити $\int (t^3 - t^2 + t - 1)e^t dt$.

3. Обчислити $\int t^2 e^{5t} dt$, визначивши зручний для цього базис.

4. Нехай $\mathcal{B} = \{t\sin t, t\cos t, \sin t, \cos t\}$, V — векторний простір функцій, породжених функціями з $\mathcal{B}$.

а) Показати, що множина $\mathcal{B}$ є лінійно незалежною.

б) Показати, що оператор диференціювання D відображає V у V.

в) Знайти матрицю $[D]_{\mathcal{B}}$ для оператора диференціювання D.

г) Обчисліть $[D]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

д) Використайте $[D]_{\mathcal{B}}^{-1}$ для знаходження $\int t\cos t\, dt$ і $\int t\sin t\, dt$.

5. Використавши множину $\mathcal{B} = \{e^t \sin t, e^t \cos t\}$, знайти матрицю $[D]_{\mathcal{B}}$ оператора диференціювання D простору, який породжує $\mathcal{B}$, і використайте її для обчислення інтегралів $\int e^t \cos t\, dt$ і $\int e^t \sin t\, dt$.

6. Локалізувати всі відносні екстемуми і сідлові точки наступних функцій:

а) $f(\vec{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 3x_2 + 4$.

б) $f(\vec{\mathbf{x}}) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_1 + 2x_2 + 5$.

в) $f(\vec{\mathbf{x}}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 6x_2 + 2$.

г) $f(\vec{\mathbf{x}}) = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^3 + 2x_1 + 2x_2 + 3$.

д) $f(\vec{\mathbf{x}}) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 + 6$.

е) $f(\vec{\mathbf{x}}) = 6x_1^2 - 2x_1^3 + 3x_2^2 + 6x_1x_2$.

є) $f(\vec{\mathbf{x}}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 + x_3^2$.

9. Матриці і графи

Теорія графів веде свій початок від роботи Л. Ейлера[1] 1736 року, яка була присвячена відомій задачі про Кенігсбергські мости. На початку свого розвитку вона, в основному, мала справу з математичними фокусами і розвагами. Багато її задач можна сформулювати так, що вони зрозумілі навіть школярам. Часто

[1] Leonhard Euler (1707–1783) — видатний швейцарський математик.

різні конструкції у цих задачах можна наочно зобразити і уявити. У той же час теорія графів знайшла широкі застосування у фізиці, хімії, лінгвістиці, економіці, психології, техніці та інших науках.

Виявляється, що теорія матриць допомагає розв'язувати деякі задачі теорії графів. Перед тим як проілюструвати це, наведемо означення основних понять теорії графів.

Під **графом** розуміють скінченну сукупність об'єктів та зв'язків між ними. Граф представляють у вигляді сукупності точок, які називають *вершинами*, та ліній, що їх з'єднують і називаються *ребрами* або *ланками* (рис. 2.12).

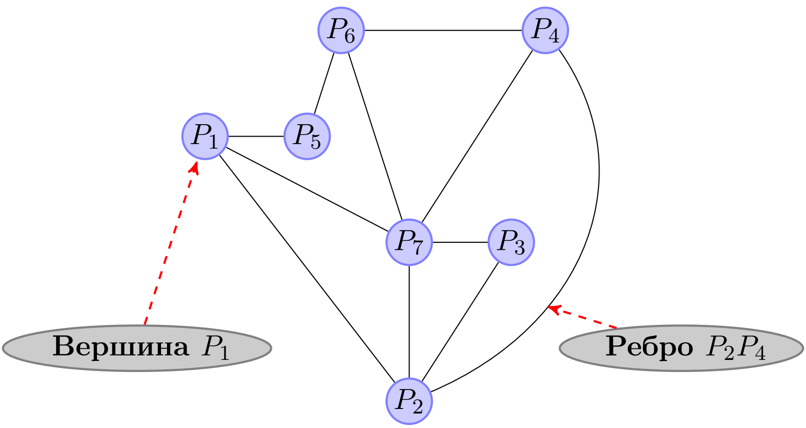


Рис. 2.12. Граф G_1

Граф називається **орієнтованим** або **направленим**, якщо його ребра мають напрям. **Маршрутом (шляхом)** орієнтованого графа, який з'єднує вершини X і Y, називається послідовність різних вершин і направлених ребер, по яких можна дістатися з X до Y. Якщо маршрут починається і закінчується у одній вершині P, то він називається **петлею у** P. Приклад направленого графа зображено на рисунку 2.13. Від P_1 до P_3 є два маршрути. Один проходить послідовно через вершини P_1, P_2, P_3, а інший — через P_1, P_2, P_4, P_5, P_3.

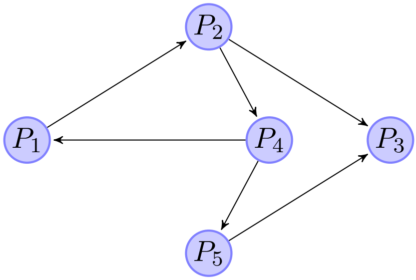


Рис. 2.13. Граф G_2

Граф називається **зв'язним**, якщо будь-які дві його вершини можна зв'язати маршрутом і **незв'язним** у протилежному випадку (див. рис. 2.14).

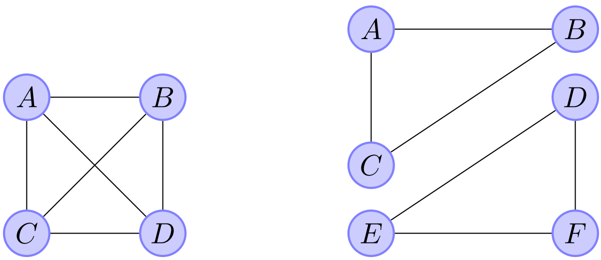


Рис. 2.14. Зв'язний граф (ліворуч) та незв'язний (праворуч).

Якщо у графі G існує маршрут від вершини P_i до P_j, який містить n ребер, то ми говоримо, що існує n-шлях від P_i до P_j. Наприклад, на рисунку 2.12 існує три різних 2-шляхи від P_2 до P_7.

Графи можуть бути досить складними і заплутаними. Тому виникає бажання знайти більш практичні шляхи для його представлення. Виявляється, що використання матриць є корисним способом вивчення графів.

Якщо граф G має n вершин $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то ми можемо асоціювати з ним матрицю n-го порядку $A = (a_{ij})$, яка називається **матрицею суміжності** або **вершинною матрицею** графа G. Елемент a_{ij} цієї матриці дорівнює 1, якщо у графа G є ребро, які сполучає вершину P_i з вершиною P_j і 0 — у протилежному випадку. Наприклад, матриця суміжності для графа G_1 є такою:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Зауважимо, що для ненаправленого графа матриця суміжності є симетричною.

Відмітимо також, що будь-яка булева матриця (елементами якої є тільки 0 і 1) з нулями на головній діагоналі визначає єдиний направлений граф.

Наступна теорема дає одне важливе застосування матриці суміжності графа.

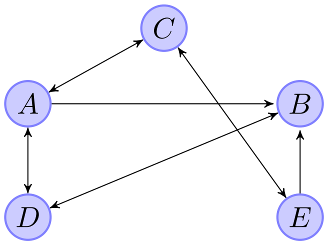
Теорема 2.8. *Якщо A — матриця суміжності графа G з вершинами $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то елемент (i, j) матриці A^k представляє число різних k-ланкових шляхів від P_i до P_j у даного графа.*

Так, наприклад, піднесемо до квадрату матрицю суміжності A графа G_1. Отримаємо матрицю

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

яка дає нам кількість різних маршрутів з використанням двох ребер між вершинами графа G_1. Наприклад, існує три різних дволанкових шляхи між вершинами P_2 і P_7, але не існує дороги, щоб пройти від P_1 до P_5 за два кроки на графі G_1.

Приклад 1. Наступна діаграма представляє карту маршрутів компанії, яка займається доставкою товарів споживачам у різних містах:



Вивчити можливі шляхи обслуговування.

Розв'язання. Тут A, B, C, D, E є містами, які обслуговує компанія. Матриця суміжності M цього графа є

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Знайдемо M^2 і M^3:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A^2, \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A^3. \end{array}$$

Якщо компанія зацікавлена більше у зв'язках між містами A і B, то зі знайдених матриць можна бачити, що існує один одноланковий зв'язок та один дволанковий зв'язок між цими містами. У той же час є чотири триланкових зв'язки:

1. $A \to C \to E \to B$
2. $A \to B \to D \to B$
3. $A \to D \to A \to B$
4. $A \to C \to A \to B$

■

Домінантно-орієнтований граф

Орієнтований граф G називається **домінантно-орієнтованим**, якщо для будь-якої пари його різних вершин P_i та P_j одна зв'язана з іншою, але не обидві. На рисунку 2.15 зображений такий граф. У нього вершини A, C і E мають таку властивість: *з кожної з них існує одноланковий або дволанковий зв'язок з будь-якою вершиною графа.*

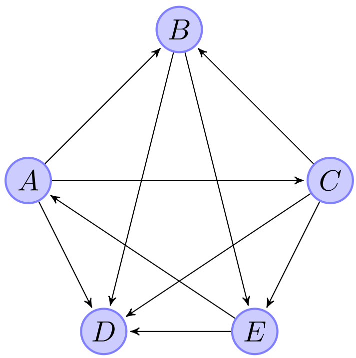


Рис. 2.15. Граф H.

Якщо результати спортивних змагань представляти у вигляді такого графа, як на рис. 2.15, то вершини A, C, E могли б відповідати найбільш сильним командам в тому розумінні, що ці команди перемагають інші, а якщо і зазнають поразки від певної команди (назвемо її X), то обов'язково здобувають перемогу над деякою іншою командою, яка перемогла X. Має місце таке твердження.

Теорема 2.9. *У будь-якого домінантно-орієнтованого графа існує принаймні одна вершина, з якої існує одноланковий або дволанковий зв'язок з будь-якою вершиною даного графа.*

Для домінантно-орієнтованого графа **потужністю (силою)** вершини називають загальне число одноланкових та дволанкових зв'язків. Використовуючи матриці суміжності A графа G з вершинами $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ми можемо знайти потужність вершини P_i. Справді, сума елементів i-го рядка матриці A дає число одноланкових зв'язків цієї вершини та сума елементів i-го рядка матриці A^2 дає число дволанкових зв'язків цієї вершини. Тоді сума елементів i-го рядка матриці $A + A^2$ дає загальне число зв'язків цієї вершини з іншими вершинами.

У домінантно-орієнтованого графа можна визначити вершину, яка має найбільшу потужність. Для цього потрібно обчислити матрицю $A + A^2$; її рядок з найбільшою сумою елементів дає номер шуканої вершини.

Приклад 2. Результати турніру п'яти команд інституту A, B, C, і D з мініфутболу задані за допомогою графа з попереднього рисунку. Визначити місця кожної команди.

Розв'язання. Складемо матрицю суміжності M для графа H:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M. \end{array}$$

Знайдемо M^2:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

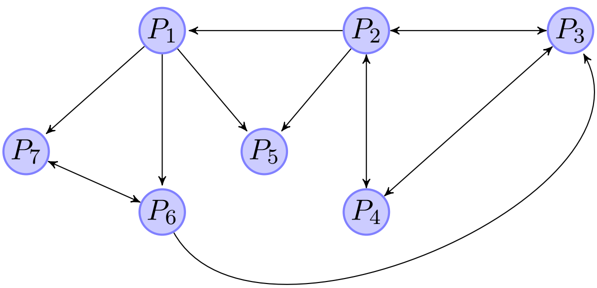
Обчислимо $M + M^2$:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \to \text{ сума } 9 \\ \to \text{ сума } 4 \\ \to \text{ сума } 7 \\ \to \text{ сума } 4 \\ \to \text{ сума } 2 \end{array}$$

Оскільки перший рядок має найбільшу суму, то вершина A повинна мати одноланковий або дволанковий зв'язок з будь-якою вершиною даного графа. Ранг команд відповідно до потужності вершин є таким: команда A (перша), команда C (друга), команди B і D (ділять третє і четверте місце) і команда E (остання). ■

Вправи

1. На наступному рисунку зображено орієнтований граф:



а) Встановити чи є граф зв'язним;
б) встановити чи є граф домінантно-орієнтованим;
в) знайти матрицю суміжності;
г) знайти кількість всіх триланкових шляхів;
д) знайти кількість всіх шестиланкових шляхів з P_7 до P_6;
е) знайти кількість всіх чотириланкових шляхів з P_1 до P_3.

2. Зобразити граф, якому відповідає матриця суміжності

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Для графа з вправи 2 встановити:

а) чи є граф зв'язним;

б) чи є граф домінантно-орієнтованим?

4. Для графа з вправи 2 знайти:

а) усі триланкові шляхи з P_4 до P_2;

б) усі чотириланкові шляхи (петлі) з P_4 до P_4;

в) кількість усіх чотириланкових шляхів з P_1 до P_2.

5. В чемпіонаті з американського футболу брали участь 12 команд. Результати матчів зведені у наступну матрицю:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рядки матриці представляють відповідно Алабаму, Арканзас, Оборн, Флоріду, Джорджію, Кентукі, Луїзіану, Міссісіпі, Флоріду, Південна Кароліну, Теннесі і Вандербілт. Обчислити число перемог для кожної команди і потужність кожної команди. Упорядкувати команди по числу перемог і потужності.

6. Як може бути змінено аналіз, якщо командам було б дозволено грати між собою більше ніж один раз? Розгляньте, що означає двокрокова перевага у цьому випадку; чи можливо щоб команда мала двокрокову перевагу над собою?

Розділ 3

Застосування до захисту і передачі інформації

Теоретичні відомості

Для сучасної цивілізації однією з характерних особливостей є швидкий обмін інформацією. Ще у XIX столітті був відомий крилатий вислів: «хто володіє інформацією — той володіє світом». Завдяки сучасним засобам комунікацій (телеграф, телефон, радіо, телебачення, інтернет, мобільний зв'язок, повітряний, залізничний, автомобільний транспорт тощо) інформація, що отримана, наприклад, у Японії чи Австралії легко і швидко стає відомою в Європі та Америці. Інформація по відповідних каналах передається за допомогою спеціальних приладів на Землю з супутників та космічних станцій, які досліджують планети та далекий космічний простір. Уряди, політики, банки, фінансові установи, корпорації постійно обмінюються конфіденційною інформацією.

Передані повідомлення можуть бути спотворені природними шумами у процесі його доставки. Різноманітні зловмисники також хотіли б знати зміст або спеціально спотворювати таку інформацію. Тому повідомлення потрібно закодувати так, щоб після проходження його через перешкоди (природні чи спеціальні) можна було розкодувати отримане повідомлення до його первинного виду. У цьому розділі ми коротко познайомимо читача з можливостями застосувань лінійної алгебри до різних способів кодування та шифрування інформації при її передачі адресатам.

Перед тим, як детально розглянути різні техніки кодування і шифрування, коротко зупинимось на деяких необхідних поняттях лінійної алгебри.

Векторні простори над $\mathbb{Z}_2$.

У курсі лінійної алгебри, коли студенти вивчають поняття векторного простору, під скаляром розуміють дійсне або комплексне число. Це поняття може бути узагальнене до довільного елемента відомого поля. Ми вважаємо, що читач знайомий з поняттям поля.

Найпоширенішими прикладами полів є $\mathbb{Q}$ (раціональні числа), $\mathbb{R}$ (дійсні числа), $\mathbb{C}$ (комплексні числа) і $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, якщо p є простим числом (цілі числа за модулем простого p):

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, (p-1)\}.$$

Останній приклад поля викликає у нас особливий інтерес. Зокрема випадок, коли $p = 2$. Тоді поле $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ позначають через $\mathbb{Z}_2$. Воно складається тільки з двох елементів 0 і 1:

$$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}.$$

У $\mathbb{Z}_2$ правила додавання і множення визначені так:

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0,$$

$$0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1.$$

Така арифметика називається **модулярною**. Додавання і віднімання є однаковими операціями у $\mathbb{Z}_2$.

Нагадаємо означення операцій у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$:

1. $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$;
2. $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$, якщо $\alpha \in \mathbb{R}$.

Така ж структура може бути визначена над $\mathbb{Z}_2^n$. Ми наділимо $\mathbb{Z}_2^n$ додаванням і множенням на скаляр (множення на 0 і на 1).

Наприклад, у $\mathbb{Z}_2^5$ ми маємо:

$$(1,0,1,1,0) + (1,1,0,0,1) = (0,1,1,1,1) \quad \text{та}$$
$$0 \cdot (1,0,1,1,1) = (0,0,0,0,0).$$

Множина $\mathbb{Z}_2^n$ з визначеними так цими двома операціями стає векторним простором над полем $\mathbb{Z}_2$ (скалярами тут є 0 і 1). В цій множині розглядаються усі основні поняття векторних просторів: лінійна залежність та незалежність систем векторів, підпростори, розмірність, ранг тощо. Основна відмінність цього простору з простором $\mathbb{R}^n$ полягає в тому, що він містить лише скінченну кількість елементів (2^n векторів).

1. Лінійна алгебра і кодування

На гомінкій вулиці нерідко співрозмовник не може зрозуміти зміст сказаного вами. У такому випадку доводиться повторювати ту саму фразу голосніше. Подібно до цього і для перевірки істинності отриманого повідомлення можна повторити його передавання двічі або тричі. Проте копіювання та дублювання великих за обсягом даних на компакт-дисках або жорстких дисках часто є неможливим.

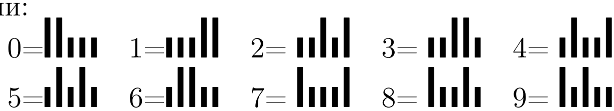
У цьому застосуванні лінійної алгебри ми розглянемо шляхи виявлення помилок у повідомленні, коли воно спотворене природнім фоном. Цей процес називається **кодуванням**. Код, який знаходить помилки у спотвореному шумом повідомленні називається **виявником помилок**. Якщо до цього ж він може виправляти помилку, то такий код називається **коректором помилок**. Набагато складніше коригувати помилки, ніж їх виявляти.

Деякі основні техніки кодування.

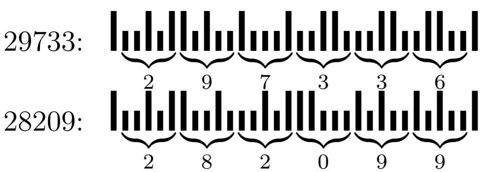
Код — це система умовних знаків (символів) для відображення інформації. Скінченна послідовність кодових символів називається **кодовим словом**. Найчастіше застосовують двійкові позиційні коди і коди, які зводяться до них, тобто повідомлення передаються у вигляді послідовності цифр 0 та 1.

Припустимо, що ми хочемо відіслати повідомлення 1011. Це двійкове «слово» може означати дійсне слово, наприклад «чемпіон». Одним з шляхів кодування повідомлення 1011 може бути приєднання до нього такого доповнення, яке за умови спотворення повідомлення дозволить виявити помилку. Одним з таких доповнень може бути 1 або 0 в залежності від того непарну чи парну кількість одиниць містить слово. При такому кодуванні усі закодовані слова будуть мати парне число одиниць. Наприклад, повідомлення 1011 буде закодоване як 10111. Тепер, якщо воно спотворене до 00111, то ми знаємо, що помилка є, оскільки ми отримали непарне число одиниць. Проте невідомо скільки помилок було зроблено та які цифри були правильними. Таким чином, контроль парності виявляє помилки, але не локалізує їх для виправлення. Цей код виявлення помилок називається **контролем парності** і є занадто простим, щоб бути корисним. Наприклад, якщо були змінені дві цифри, то ця схема не виявить помилку. Крім того він не є кодом виправлення помилки. Розглянемо інший приклад.

Приклад 1. Поштова служба Сполучених Штатів Америки зображає код поштового індексу на конверті у вигляді послідовності довгих і коротких рисок відповідно до наступної схеми:



Поштові індекси закодовують і розміщують на конверті. Кожний код розпочинається та закінчується довгою рискою. Наприкінці коду додається контрольна цифра, яка визначається так, щоб сума усіх цифр ділилась націло на 10. Якщо закодовані цифри у сумі не дають число кратне 10, то у передачі трапилась помилка. Наприклад, поштові індекси 29733 і 28209 зображаються на конвертах в такий спосіб:



Оскільки $2 + 9 + 7 + 3 + 3 = 24$, то до поштового індексу 29733 було додано контрольну цифру 6. До поштового індексу 28209 було додано 9, оскільки $2 + 8 + 2 + 0 + 9 = 21$.

Подібні системи кодування застосовуються при кодуванні товарів за допомогою штрих-кодів UPC (Universal Product Code), ISBN-коду книжкових видань (International Standard Book Number), 16-цифрового коду на кредитних картках тощо.

Іншим способом закодування повідомлення було б повторення його двічі, наприклад, 10111011. Тоді, якщо повідомлення було спотворено до 00111011, то ми напевно знаємо, що одна з двох половин спотворена. Ця схема кодування також неефективна і використовується рідко. Ми могли б отримати кращий результат повторюючи повідомлення кілька разів, але це забирає багато часу.

Передовою технікою кодування у свій час став код Хеммінга. У 1950 році Р. Хеммінг[1] опублікував статтю, у якій ввів цікавий простий код коригування помилки, який став відомим як код Хеммінга. Ця робота Хеммінга відіграла важливу роль у подальшому розвитку теорії кодування, стимулювала глибокі дослідження у цьому напрямі і була відзначена низкою престижних нагород. У 1980 році Річард Хеммінг написав книгу «Теорія кодування і теорія інформації», яка видана в 1983 році російською мовою[2].

Перед ознайомленням з кодом Хеммінга розглянемо задачу.

Приклад 2. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

над полем $\mathbb{Z}_2$ та базиси стовпцевого простору $\operatorname{Col} A$ (лінійної оболонки вектор-стовпців матриці A) та нуль-простору $\operatorname{Null} A$ (простору розв'язків рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$).

---

[1]Richard Wesley Hamming (1915–1998) — американський математик.

[2]Хэмминг Р. В. Теория кодирования и теория информации / Р. В. Хэмминг. — Москва : Радио и связь, 1983. — 176 с.

Розв'язання. Спочатку зведемо матрицю A до східчастої форми з використанням модулярної арифметики у $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отже, базис для $\operatorname{Col} A$ утворюють перший і другий стовпці матриці A:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$. Для знаходження базису для $\operatorname{Null} A$ розв'яжемо систему $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ і отримаємо рівняння

$$x_1 = -1x_3 - 1x_4 \quad \text{і} \quad x_2 = -1x_3 - 1x_4.$$

Оскільки $-1 = 1$, то

$$x_1 = 1x_3 + 1x_4 \quad \text{і} \quad x_2 = 1x_3 + 1x_4,$$

так що базисом для $\operatorname{Null} A$ є

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Відзначимо, що ці результати відрізняються від тих, які могли б бути отримані, якщо елементи матриці A розглядати як дійсні числа. Можна переконатись, що у такому випадку $\operatorname{rank} A = 3$.

Весь нуль-простір $\operatorname{Null} A$ є таким :

$$\operatorname{Null} A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

■

Зазначимо, що кількість векторів у $\operatorname{Null} A$ дорівнює $2^2 = 4$ (вона дорівнює 2, яке піднесене до степеня, який дорівнює розмірності $\operatorname{Null} A$). Це є істиною для будь-якого підпростору у $\mathbb{Z}_2^n$.

Має місце таке твердження:

Теорема 3.1. *Якщо* W *є підпростір простору* $\mathbb{Z}_2^n$ *розмірності* $\dim W = k$, *то число векторів у* W *дорівнює* 2^k.

Тепер ми розглянемо більш складний варіант коду перевірки парності: три числа будуть додаватися у кінці кожного чотирицифрового повідомлення. Таким чином, закодовані повідомлення будуть елементами простору $\mathbb{Z}_2^7$.

Код Хеммінга (7,4).

Для заданих двох цілих чисел $k \leqslant n$ підпростір $\mathbb{Z}_2^n$ розмірності k називається (n, k) **лінійним кодом**. Елементи лінійного коду називаються **закодованими словами**.

Розглянемо матрицю H над $\mathbb{Z}_2$, стовпцями $\vec{\mathbf{c}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{c}}_7$ якої є всі ненульові вектори з $\mathbb{Z}_2^3$:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нуль-простір матиці H називається **кодом Хеммінга (7,4)** ($\operatorname{Null} H$ є множиною всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $H\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$). Розв'яжемо систему $H\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ для того, щоб описати $\operatorname{Null} H$.

Застосувавши метод Гаусса–Йордана (разом з арифметикою у $\mathbb{Z}_2$), ми отримаємо таку східчасту форму для матриці H:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Оскільки ранг H дорівнює 3, то розмірність $\operatorname{Null} H$ є $7 - 3 = 4$. Справді, легко показати (записавши загальний розв'язок у параметричній формі), що

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \{&(1,0,0,0,0,1,1), (0,1,0,0,1,0,1), \\ &(0,0,1,0,1,1,0), (0,0,0,1,1,1,1)\} \end{aligned}$$

є базисом простору $\operatorname{Null} H$ над $\mathbb{Z}_2$.

Нехай $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_7\}$ є стандартним базисом $\mathbb{Z}_2^7$. Тоді $H\vec{\mathbf{e}}_i = \vec{\mathbf{c}}_i$ для всіх $i = 1, \ldots, 7$ (перевірте це) і тому жоден стандартний вектор не належить до $\operatorname{Null} H$. Як наслідок, ми маємо два спостереження:

Теорема 3.2. *1. Якщо* $\vec{\mathbf{v}} \in \operatorname{Null} H$*, то* $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{e}}_i$ *не належить* $\operatorname{Null} H$ *для всіх* $i = 1, \ldots, 7$.

2. Якщо $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{Z}_2^7$*, причому* $H\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{c}}_i$ *для деякого* i*, то* $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{e}}_i$ *належить* $\operatorname{Null} H$*. Крім того,* $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{e}}_j$ *не належить* $\operatorname{Null} H$ *для всіх* $i \neq j$.

Цей результат означає, що коли зроблена одна помилка при передачі повідомлення $\vec{\mathbf{x}}$, то ця помилка може бути виявлена і виправлена перевіркою того, чи лежить отримане повідомлення у $\operatorname{Null} H$.

Матриця G, рядками якої є елементи базису $\mathcal{B}$, називається **генеруючою матрицею** для коду Хеммінга (7,4).

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Алгоритм для коригування помилок кодом Хеммінга (7,4).

Припустимо, що ми хочемо відіслати слово $\vec{\mathbf{u}}$, яке складається з чотирьох двійкових цифр u_1, u_2, u_3, u_4, причому нам відомо, що закодоване слово *може* бути спотворене деяким шумом, змінюючи тільки одну його компоненту (а може і не бути спотвореним). Нехай $\vec{\mathbf{w}}$ — отримане слово.

1. Для кодування $\vec{\mathbf{u}}$ ми утворимо **лінійну комбінацію** $\vec{\mathbf{v}}$ елементів базису $\mathcal{B}$ з чотирма цифрами $\vec{u}$ як коефіцієнтами. Відзначимо, що $\vec{\mathbf{v}}$ можна отримати з початкового слова виконанням матричного множення $\vec{\mathbf{v}} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]\, G$, де G — наведена вище матриця за формулою (3.2). За побудовою, вектор $\vec{\mathbf{v}}$ належить $\operatorname{Null} H$. Зауважимо також, що $[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]\, G$ даватиме сім цифр вектора, перші чотири цифри якого є початковим словом.

2. Обчислимо $H\vec{\mathbf{w}}$, де H — описана вище за формулою (3.1).

3. Якщо $H\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{0}}$, то $\vec{\mathbf{w}}$ належить $\operatorname{Null} H$. Тому наявність однієї помилки буде означати, що $\vec{\mathbf{w}}$ не належить $\operatorname{Null} H$ за першою частиною теореми 3.2. Тоді робимо висновок, що спотворення немає і $\vec{\mathbf{u}}$ є першими чотирма цифрами $\vec{\mathbf{w}}$.

4. Якщо $H\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{c}}_i$ для деякого i, то вектор $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{e}}_i$ належить $\operatorname{Null} H$ і $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{e}}_j$ не належить $\operatorname{Null} H$ для всіх $i \neq j$. Тому змінимо i-у компоненту $\vec{\mathbf{w}}$ (з 0 на 1 або з 1 на 0) і одержимо новий вектор $\vec{\mathbf{w}}'$. Перших чотири цифри $\vec{\mathbf{w}}'$ є кодовим словом $\vec{\mathbf{u}}$.

Проаналізуємо, як описаний алгоритм працює на двох прикладах.

Приклад 3. Припустимо, що ми отримали повідомлення $\vec{\mathbf{w}} = 1100011$ закодоване кодом Хеммінга (7,4). Припустимо також, що якщо і існують помилки у передачі, то не більше однієї. Потрібно знайти початкове повідомлення.

Розв'язання. Обчислюємо добуток:

$$H \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $H\vec{\mathbf{w}}$ дорівнює другому стовпцю матриці H, то заміна другої компоненти $\vec{\mathbf{w}}$ дає розкодоване слово: 1000011. Робимо висновок, що вихідне слово є 1000. ■

Приклад 4. Припустимо, що ми отримали повідомлення $\vec{\mathbf{w}} = 0101010$ закодоване кодом Хеммінга (7,4). Припустимо також, що якщо і існують помилки у передачі, то не більше однієї. Потрібно знайти початкове повідомлення.

Розв'язання.

$$H \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $H\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{0}}$, то не існує помилки в передачі цього повідомлення і воно було таким: 0101. ■

У представленій техніці передані слова були дуже короткими: тільки 4 цифри. Існує тільки 2^4 таких слів. У реальному житті електронні повідомлення містять набагато більше цифр. Інша проблема коду Хеммінга (7,4) полягає в тому, що він не може виявити більше однієї помилки і розкодувати повідомлення. Але існують інші типи більш ефективних кодів.

Вправи

1. Поштовим службою США на конвертах були знайдені такі коди:

а) ;

б) ;

в) .

Встановити, чи була зроблена помилка при передачі.

2. Закодувати наступні повідомлення, застосувавши код Хеммінга (7,4):

а) 1001; б) 0011; в) 0101.

3. Було отримано повідомлення, кожне з яких було закодовано кодом Хеммінга (7,4):

а) 0101101;	д) 0111100;
б) 1000011;	е) 1001101;
в) 0010111;	є) 1010010;
г) 0101010;	ж) 1110111.

При передачі щонайбільше один елемент міг змінитись. Встановити чи відбулась така зміна при передачі і якщо так, то виправити її.

2. Лінійна алгебра і криптографія

Для більшості людей криптографія пов'язана з секретними комунікаціями. Справді, захист засекречених зв'язків упродовж довгої історії був одним з пріоритетних напрямків криптографії. Під *шифруванням* розуміють перетворення певної інформації у деяку форму, яка незрозуміла за змістом. Воно має на меті гарантувати недоступність інформації для тих, кому вона не є призначеною (навіть тих, хто може бачити зашифровані дані). Дешифрування (розшифрування) є оберненим до шифрування і полягає у перетворенні зашифрованих даних назад у зрозумілу форму. Шифрування і дешифрування вимагають використання деякої секретної інформації, яка зазвичай називається *ключем*. У залежності від особливостей шифрування може бути використаний як однаковий ключ для шифрування і дешифрування, так і різні ключі.

В сонові найпростіших шифрів лежить ідея заміни кожної літери у відкритому тексті іншою літерою. Такий клас шифрів називають **шифрами підстановки** (точніше, моноалфавітними шифрами підстановки). Зауважимо, що у цьому випадку ключ є досить довгим (а саме таким як довжина алфавіту, оскільки ми повинні вказати для кожної літери її заміну) і існує багато можливостей для зашифрування (для латинського алфавіту, який містить 26 букв, їх є $26! \approx 4 \cdot 10^{26}$). Разом з тим вони досить легко можуть бути розшифрованими.

Приклад 1. Нехай маємо зашифрований текст:

RUQDY QNTRZ AQIQB NAZNC YQQBQ WBJQR UJWXS
RUNVW WENCQ TRYQK QRK.

Необхідно його розшифрувати.

Розв'язання. Після уважного перегляду зашифрованого тексту помічаємо, що літера **Q** зустрічається 11 раз, набагато частіше ніж будь-яка інша. Можна припустити, що **Q** заміняє найбільш вживану літеру. У англійській мові найбільш вживаною є літера **e**, після неї слідують **t**, **a** і **o**. Відносні частоти літер англійського алфавіту зведено у таблиці 1[1].

Тому ми можемо припустити, що літері **Q** відповідає **e**, а літерам **W**, **R** і **N** відповідають **o**, **a**, **t**. В подальшому ми намагаємося здогадатися про зв'язок літер і їх подальшу відповідність, щоб повідомлення мало зміст. Якщо ми маємо декілька літер, то можна спробувати встановити місцеположення стандартних слів (the, be, to, of, and тощо). При цьому слід пам'ятати, що найбільш вживаними сполученнями літер у англійській мові є (в порядку зменшення): th, he, in, en, nt, re, er, an, ti, es, on, at, se, nd, or, ar, al, te, co, de, to, ra, et, ed, it, sa, em, ro.

Робота з використанням таких імовірносних здогадок називається **частотним аналізом**. Коли довжина шифрованого повідомлення зростає, то частотний аналіз стає все більше і

[1]Beker H., Piper F. Cipher Systems: The Protection of Communications. — Wiley-Interscience, 1982. — P. 397. Дивись також `http://en.wikipedia.org/wiki/Letter_frequency`

Літера	Частота	Літера	Частота	Літера	Частота
a	8,167	j	0,153	s	6,327
b	1,492	k	0,772	t	9,056
c	2,782	l	4,025	u	2,758
d	4,253	m	2,406	v	0,978
e	12,702	n	6,749	w	2,360
f	2,228	o	7,507	x	0,150
g	2,015	p	1,929	y	1,974
h	6,094	q	0,095	z	0,074
i	6,966	r	5,987		

Табл. 1. Відносна частота літер в англійській мові.

більше надійним. Існують письмові свідчення, що араби використовували такий аналіз ще у IX столітті. Для роботи цим методом потрібно, щоб повідомлення містило не менше 50 букв.

Отже, якщо припустити, що наші здогадки правильні, ми маємо відповідність

R U Q D Y	Q N T R Z	A Q I Q B	N A Z N C	Y Q Q B Q	W B J Q R
a e	**e t a**	**e e**	**t t**	**e e e**	**o e a**
U J W X S	R U N V W	W E N C Q	T R Y Q K	Q R K	
o	**a t o**	**o t e**	**a e**	**e a**	

Пропонуємо читачам, не поспішаючи, далі продовжити розшифрування цього повідомлення. Пам'ятайте, що пропуски між словами були зсунуті від оригіналу. Підказку щодо того, як саме відокремлені слова один від одного, наведена в кінці цього параграфу на сторінці 158. ■

Для того, щоб зробити код важчим для дешифрувальника можна шифрувати групи букв як одне ціле. Вперше такий шифр описав Лестер Хілл[1] у своїх працях 1929 та 1931 років. Шифр Хілла розглядає блоки літер як вектори і шифрування здійснюється матричним множенням. Такий шифр може працювати з блоками літер довільної довжини.

[1]Lester S. Hill (1891—1961) — американський математик.

Сьогодні використовують дуже складні методи шифрування і дешифрування повідомлень. Екстремально важкі для зламування коди використовують великі матриці для шифрування повідомлення. Одержувач повідомлення розшифровує його, використовуючи обернену до цієї матриці. Перша матриця називається **кодуючою матрицею**, а обернена — **декодуючою матрицею**.

Для того, щоб закодувати повідомлення, літери «переводяться» в числа. Для такої заміни літер англійського алфавіту потрібно тільки числа від 0 до 25 (тобто, елементи кільця $\mathbb{Z}_{26}$). Дії над цими числами підпорядковані **модулярній арифметиці**, тобто додавання, віднімання, множення здійснюються за модулем 26.

Множина $\mathbb{Z}_{26}^3$ складається зі всіх векторів з трьома координатами, які є числами від 0 до 25. Додавання векторів і множення на скаляр визначено в стандартний спосіб. Простір $\mathbb{Z}_{26}^3$ буде дуже корисним для шифрування і дешифрування повідомлень. Для зашифрування повідомлень використовується **ключова матриця** A, яка у нашому випадку буде матрицею третього порядку. Множення вектора $\vec{\mathbf{v}}$ з $\mathbb{Z}_{26}^3$ на A буде утворювати новий вектор $A\vec{\mathbf{v}}$, який також належить $\mathbb{Z}_{26}^3$. Він може бути інтерпретований як закодований вектор $\vec{\mathbf{v}}$.

Приклад 2. Зашифрувати повідомлення «THE ROOSTER CROWS AT DAWN»[1] шифром Хілла з ключовою матрицею

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 20 \\ 20 & 9 & 17 \\ 9 & 4 & 17 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Нехай літери англійського алфавіту занумеровані так:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

[1] «Півень співає на світанку»

Тепер розіб'ємо повідомлення на частини з трьох літер кожна:

THE ROO STE RCR OWS ATD AWN

Якщо кількість літер не кратна 3, то остання множина може бути доповнена випадковими буквами. Тепер групи з трьох букв можуть бути конвертовані у групи з трьох чисел, які можна розглядати як **вектори**. Наприклад, THE ROOSTER CROWS AT DAWN стало

$$\begin{array}{c} T \\ H \\ E \end{array}\begin{bmatrix} 19 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} R \\ O \\ O \end{array}\begin{bmatrix} 17 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} S \\ T \\ E \end{array}\begin{bmatrix} 18 \\ 19 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} R \\ C \\ R \end{array}\begin{bmatrix} 17 \\ 2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} O \\ W \\ S \end{array}\begin{bmatrix} 14 \\ 22 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} A \\ T \\ D \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ 19 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} A \\ W \\ N \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ 22 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Повідомлення THE ROOSTER CROWS AT DAWN може бути закодоване множенням кожного вектора по черзі на ключову матрицю. Наприклад, перший вектор повідомлення набуває такого виду:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 20 \\ 20 & 9 & 17 \\ 9 & 4 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Тому трійка букв THE стає закодованою як ZRH. Для скорочення роботи комбінують всі вектори повідомлення у одну матрицю M і обчислюють AM, оскільки стовпці AM в точності є результатом застосування A до окремих стовпців матриці M:

$$AM = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 20 \\ 20 & 9 & 17 \\ 9 & 4 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 17 & 18 & 17 & 14 & 0 & 0 \\ 7 & 14 & 19 & 2 & 22 & 19 & 22 \\ 4 & 14 & 4 & 17 & 18 & 3 & 13 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 3 & 12 & 21 & 24 & 16 & 12 \\ 17 & 2 & 1 & 23 & 4 & 14 & 3 \\ 7 & 5 & 20 & 8 & 0 & 23 & 23 \end{bmatrix}.$$

Після виписування послідовно відповідних букв з таблиці для елементів стовпців отриманої матриці зашифроване повідомлення стає таким: ZRHDCFMBUVXIYEAQOXMDX. ■

Приклад 3. Розшифрувати повідомлення

ZRHDCFMBUVXIYEAQOXMDX

зашифроване шифром Хілла з ключовою матрицею з попереднього прикладу.

Розв'язання. Оскільки ключова матриця A робить шифрування і ми отримали матрицю AM, то для отримання матриці M потрібно щоб матриця A мала обернену A^{-1}. Тоді A^{-1} могла б бути дешифрувальною матрицею. Для розшифрування потрібно знайти матричний добуток $A^{-1}(AM) = M$. Для цього матриця, обернена до A, повинна бути знайдена у модулярній арифметиці. Обернена до нашої ключової матриці A є

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & 22 & 14 \\ 7 & 9 & 21 \\ 17 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

оскільки

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 11 & 22 & 14 \\ 7 & 9 & 21 \\ 17 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 10 & 20 \\ 20 & 9 & 17 \\ 9 & 4 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{26}.$$

Тому для розшифрування повідомлення

ZRHMJHHKVVVWEXWHZIFRQ

його спочатку розбивають на трибуквені блоки з подальшою конвертацією їх у вектори $\mathbb{Z}_{26}^3$, а тоді ці вектори збирають у закодовану матрицю повідомлення:

$$C = \begin{bmatrix} 25 & 12 & 7 & 21 & 4 & 7 & 5 \\ 17 & 9 & 10 & 21 & 23 & 25 & 17 \\ 7 & 7 & 21 & 22 & 22 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Обчислення

$$A^{-1}C = \begin{bmatrix} 11 & 22 & 14 \\ 7 & 9 & 21 \\ 17 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 12 & 7 & 21 & 4 & 7 & 5 \\ 17 & 9 & 10 & 21 & 23 & 25 & 17 \\ 7 & 7 & 21 & 22 & 22 & 8 & 16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 12 & 19 & 13 & 0 & 11 & 3 \\ 7 & 0 & 8 & 18 & 21 & 0 & 4 \\ 4 & 17 & 0 & 7 & 4 & 13 & 3 \end{bmatrix} \pmod{26},$$

розкодовує повідомлення, яке може бути перекладене у буквах як

THEMARTIANSHAVELANDED,

тобто зашифроване повідомлення «The martians have landed» («Марсіани висадились»). ■

Ця форма шифру важча для дешифрування ніж простий шифр заміни. Кожна літера не розкодовується однаковою буквою знову і знову. Наприклад, у коді вище THE MARTIANS HAVE LANDED буква A з'являється 4 рази і розкодовується як J, V, O і Z. Крім того, складність шифру зростає з порядком ключової матриці.

Виникає питання, які матриці можуть бути ключовими. Відповідь на нього дає така теорема.

Теорема 3.3. *Матриця n-го порядку A є оборотною за модулем m тоді і тільки тоді, коли її детермінант відмінний від нуля за кожним простим модулем, який є дільником числа m.*

Приклад 4. Чи є оборотною за модулем 33 матриця

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & 9 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}?$$

Розв'язання. Обчислимо детермінант цієї матриці відомим вам способом у модулярній арифметиці за модулем 33. Отримаємо $|A| = -242$. Але $-242 = (-8)\cdot 33 + 22$, тобто $|A| \equiv 22 \pmod{33}$.

Оскільки число 22 ділиться на 11, яке є простим дільником числа 22, то $|A| \equiv 0 \pmod{11}$. Тому дана матриця не є оборотною за модулем 33. ■

Приклад 5. Знайти обернену до матриці

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

за модулем 33, якщо вона існує.

Розв'язання. Оскільки $|A| = 53$ і число 53 не ділиться на 3 та 11, то матриця A має обернену. Знайдемо обернену до A за відомою з лінійної алгебри формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо алгебраїчні доповнення: $A_{11} = 5$, $A_{21} = -27 \equiv 6 \pmod{33}$, $A_{31} = 1$, $A_{12} = 13$, $A_{22} = 4$, $A_{32} = -8 \equiv 25 \pmod{33}$, $A_{13} = -13 \equiv 20 \pmod{33}$, $A_{23} = 49 \equiv 16 \pmod{33}$, $A_{33} = 8$.

Тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{53} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 13 & 4 & 25 \\ 20 & 16 & 8 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $5 \cdot 53 \equiv 1 \pmod{33}$, то замінимо $\frac{1}{53}$ на 5 і після виконання множення матриці на 5 за модулем 33 отримуємо

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 30 & 5 \\ 32 & 20 & 26 \\ 1 & 14 & 7 \end{bmatrix}.$$

■

Обернену матрицю у модулярній арифметиці можна також шукати методом елементарних перетворень, який відомий з курсу лінійної алгебри. Слід при цьому мати на увазі, що при використанні арифметики за модулем 26 не всі рядкові операції дозволені. Множення рядка на 13 або 2 не дозволено, оскільки $13 \cdot 2 \equiv 0 (\mathrm{mod} 13)$, і це могло б бути еквівалентно множенню на 0. Подібно, множення на 2 або 13 для використання у операції заміщення також не дозволено. Аналогічно для модуля 33 не дозволено використання множення на 3 та 11.

Всі інші рядкові операції дозволені. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 6. Знайти обернену до матриці

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 20 \\ 20 & 9 & 17 \\ 9 & 4 & 17 \end{bmatrix},$$

яка є оборотною за модулем 26.

Розв'язання. Для знаходження оберненої до даної матриці розпочнемо з матриці

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 9 & 17 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 17 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перший рядок домножимо так, щоб у лівому верхньому куті була 1. Оскільки $3 \cdot 9 \equiv 1 (\mathrm{mod} 26)$, то домножимо перший рядок на 9(воно взаємно просте з 2 і 13):

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 24 & 9 & 0 & 0 \\ 20 & 9 & 17 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 17 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для виключення 20 у першому стовпці помножимо перший рядок на 6 і додамо до другого, оскільки $1 \cdot 6 + 20 \equiv 0 (\mathrm{mod} 26)$[1]; аналогічно помножимо перший рядок на 17 і додамо до третього, оскільки $1 \cdot 17 + 9 \equiv 0 (\mathrm{mod} 26)$. Матриця таким чином зведена до такого виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 24 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 23 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Помножимо другий і третій рядки на 9 і 3 відповідно:

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 24 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 19 & 18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Помноживши третій рядок на 7 і 2 та додаючи отримані результати до другого і першого рядків відповідно, отримаємо

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 0 & 17 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 9 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

[1] Тут ми не змінювали перший рядок.

Нарешті множення другого рядка на 14 і з наступним додаванням його до першого, приводить до матриці

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 11 & 22 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 9 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Таким чином,

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 11 & 22 & 14 \\ 7 & 9 & 21 \\ 17 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

■

Описані вище техніки кодування і декодування використовують оборотні матриці, які представляють лінійні перетворення.

Як виконати дешифрування?

Призначенням криптографії є знаходження безпечних шляхів передачі інформації, які добре захищені від несанкціонованого доступу до них. Тому у кожному конкретному випадку головним питанням, на яке потрібно давати відповідь, є: «Наскільки багато потрібно мати інформації для того, щоб провести дешифрування?».

Оскільки ми використовуємо лінійні перетворення для кодування і декодування, то необхідно вивчити їх властивості. Нагадаємо, що кожне лінійне перетворення $L\colon V \to W$ повністю визначається образами базису простору V. Тому, якщо A є матрицею n-го порядку, то для дешифрування нам потрібно знати n векторів відкритого тексту $P_1, P_2, \ldots, P_n$ і зашифрований текст $AP_1, AP_2, \ldots, AP_n$. Дешифрування означає отримання матриці A^{-1}.

Зробити це можна так. Утворимо матрицю $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \end{bmatrix}$, стовпцями якої є вектори відкритого тексту, і нехай $Q = \begin{bmatrix} AP_1 & AP_2 & \ldots & AP_n \end{bmatrix}$. Тому $Q = AP$ і $A^{-1} = PQ^{-1}$. Це дасть нам можливість дешифрувати повідомлення. Для застосування рядкових перетворень при знаходженні A^{-1} можемо записати рівність $A^{-1} = PQ^{-1}$ у вигляді $A^{-1}Q = P$ або $Q^T(A^{-1})^T = P^T$. Для обчислення A^{-1} потрібно спочатку знайти $(A^{-1})^T$. Це можна зробити шляхом зведення елементарними перетвореннями матриці $[Q^T|P^T]$ до $[E|(A^{-1})^T]$.

Приклад 7. Припустимо, що ви отримали таке повідомлення:

F U P O D M Q E W E S I I A F J.

Використовуючи перехідну матрицю, у якій літери нумеруються від 1 до 26, воно набуває вигляд

6 21 16 15 4 13 17 5 23 5 19 9 9 1 6 10.

На жаль, вам невідома ні матриця A, ні A^{-1}. Але відомо, що вона другого порядку, а відкритий текст з п'ятої по восьму літери — GOOD. Необхідно відновити оригінальне повідомлення, якщо це можливо.

Розв'язання. Знайдемо числовий еквівалент відомих букв GOOD у вихідному повідомленні. Це (7,15) для (G,O) і (15,4) для (O,D). Також відомо числовий еквівалент з п'ятої по восьму літеру у закодованому повідомленні: (4,13) замість (D,M) та (17,5) замість (Q,E).

Тому можна утворити матриці P і Q, співставивши відкриті і закодовані букви так:

$$\vec{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \end{bmatrix} \leftrightarrow \vec{\mathbf{c}}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \vec{\mathbf{c}}_2 = \begin{bmatrix} 17 \\ 5 \end{bmatrix},$$

тобто $P = [\vec{\mathbf{p}}_1 \quad \vec{\mathbf{p}}_2] = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$ та $Q = [\vec{\mathbf{c}}_1 \quad \vec{\mathbf{c}}_2] = \begin{bmatrix} 4 & 17 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$.
Тепер обчислимо обернену матрицю до матриці Q. Тут $|Q| = \begin{vmatrix} 4 & 17 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = -201 \equiv 7 (\mathrm{mod} 26)$. Оскільки 15 є розв'язком конгруенції $7x \equiv 1 (\mathrm{mod} 26)$, то за формулою обчислення оберненої матриці маємо:

$$Q^{-1} = 15 \begin{bmatrix} 5 & -17 \\ -13 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}.$$

Далі:

$$A^{-1} = PQ^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 13 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Тепер помножимо A^{-1} на секретне повідомлення:

$$\begin{bmatrix} 18 & -1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 16 & 4 & 17 & 23 & 19 & 9 & 6 \\ 21 & 15 & 13 & 5 & 5 & 9 & 1 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 13 & 7 & 15 & 19 & 21 & 5 & 20 \\ 1 & 1 & 15 & 4 & 20 & 4 & 14 & 20 \end{bmatrix}.$$

Отже, ми отримали послідовність

9 1 13 1 7 15 15 4 19 20 21 4 5 14 20 20.

Нарешті використаємо названу в умові перехідну матрицю для знаходження відповідних букв: IAMAGOODSTUDENTT. Отже, передане повідомлення: «I am a good student». ■

Підказка до прикладу 1. Пропуски між словами у повідомленні розташовані так: R UQDYQN TRZ AQ IQBN AZ NCYQQ BQWBJQ RU JWXS RU NVW WE NCQT RYQ KQRK.

Вправи

1. Визначити, чи є наступні матриці оборотними за модулем 26:

а) $\begin{bmatrix} 11 & 20 & 20 \\ 2 & 1 & 24 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 22 & 9 & 4 \\ 17 & 21 & 8 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 24 \\ 20 & 11 & 25 \\ 12 & 4 & 19 \end{bmatrix}$.

2. Розгляньте ключову матрицю

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 15 \\ 15 & 17 & 6 \\ 24 & 0 & 17 \end{bmatrix}.$$

а) Закодувати повідомлення

MARY HAD A LITLE LAMB (У Мері було маленьке ягня),

використовуючи цю ключову матрицю.

б) Показати, що матриця B є оборотною.

в) Знайти B^{-1} за модулем 26.

г) Розкодувати повідомлення

FVRMTGJTJJRMULSURGBEMRNVFRC,

яке було закодовано з використанням ключової матриці B.

3. Розгляньте ключову матрицю

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 20 & 20 \\ 2 & 1 & 24 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

а) Закодувати повідомлення

RED SKY AT NIGHT,

використовуючи цю ключову матрицю.

б) Показати, що матриця C є оборотною.

в) Знайти C^{-1} за модулем 26.

г) Розкодувати повідомлення

IWGEJLFWRBUEUOWBHPZMLMXNXUBOEUAHG,

яке було закодовано використанням ключової матриці C.

4. В українському алфавіті є 33 букви. Поставимо їм у відповідність числа від 0 до 32 у звичайному порядку.

А	Б	В	Г	Д	Е	Є	Ж	З	И	І	Ї	Й	К	Л	М	Н
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ю	Я	Ь	Ґ
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

За допомогою ключової матриці з прикладу 5 зашифруйте повідомлення: «Місто Вінниця є перлиною Поділля».

5. Ви отримали повідомлення:

Н О Р Н С В Ю Х П М П М У Й Ш Ч Ч Ї Є Т Й Й У З.

Відомо, що його шифрували за допомого ключової матриці з прикладу 5. Прочитайте його та проаналізуйте як шифрувалися однакові букви повідомлення у відкритому тексті.

6. Петро і Валентина часто листуються українською мовою і шифрують свої повідомлення від допитливих очей шифром Хілла, використовуючи матриці другого порядку як ключові. При цьому вони домовилися не повідомляти ключових матриць, а всі листи закінчувати своїми іменами Петя і Валя.

Допитлива Варвара знайома з Петром, має доступ до їхніх повідомлень і дуже хоче навчитись їх читати. Вона зацікавилася криптографією і навіть познайомилася з шифрами Хілла.

Варвара помітила, що впродовж деякого часу частина повідомлень закінчуються одними і тими ж чотирма буквами, а інші – іншими однаковими буквами. У неї виникла здогадка як можна читати ці повідомлення і вона розшифрувала останнє з них. А воно було таким:

Ї Х М К У П Б К Ч В Н І Є О А Р П К Є Ч Д Ф І П Є А.

Спробуйте і ви прочитати це повідомлення.

3. Застосування методів лінійної алгебри до стиснення даних

Цифрові образи можуть використовувати великі об'єми комп'ютерної пам'яті. Ідея стиснення даних полягає в виконанні певної процедури над цими даними, яка б значно зменшила обсяг зайнятої пам'яті. **Вейвлет-перетворення Хаара**[1], яке ми будемо обговорювати у цьому застосуванні, є одним з шляхів стиснення цифрових образів.

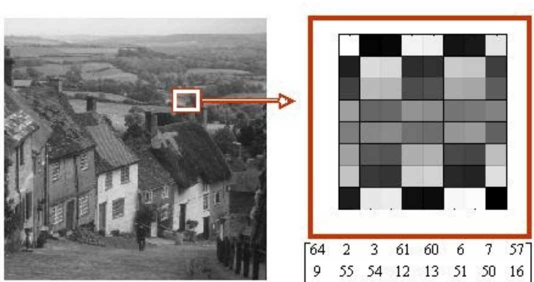
Для стиснення даних цифровий образ розглядається як числова матриця. Розглянемо це на прикладі фото. Кожне цифрове зображення складається з досить великого числа різнокольорових маленьких квадратиків **пікселів** (елементів фото). Відповідна цифровому образу матриця задає ціле число кожному пікселю. Наприклад, у випадку чорно-білого зображення розмірів 256×256 пікселів, образ зберігається як 256×256 матриця, кожен елемент якої є цілим числом від 0 (чорний колір) до 255 (білий колір). Техніка JPEG стиснення розбиває зображення на блоки розмірів 8×8 і кожному блоку ставить у відповідність матрицю.

Векторне перетворення з використанням вейвлета Хаара.

Припустимо, що одним з рядків матриці зображення розмірів 8×8 є вектор

$$\vec{r} = [420, 680, 448, 708, 1260, 1420, 1600, 1600].$$

[1]Alfred Haar (1885–1933) — угорський математик.



$$\begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 & 7 & 57 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 & 50 & 16 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 & 42 & 24 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 & 31 & 33 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 & 39 & 25 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 & 18 & 48 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 & 10 & 56 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 & 63 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 3.1. Представлення пікселів зображення числами.

Взагалі, якщо дані ланцюжка мають довжину 2^k, то процес перетворення буде складатися з k кроків. У нашому випадку це буде 3 кроки, оскільки $8 = 2^3$.

1) Ми виконаємо такі перетворення координат вектора $\vec{r}$:

- Розіб'ємо координати вектора $\vec{r}$ на 4 пари: $(420, 680)$, $(448, 708)$, $(1260, 1420)$, $(1600, 1600)$.
- Знайдемо середнє арифметичне кожної з цих пар:

$$\frac{420 + 680}{2} = 550, \frac{448 + 708}{2} = 578,$$

$$\frac{1260 + 1420}{2} = 1340, \frac{1600 + 1600}{2} = 1600.$$

  Одержані значення будуть утворювати перші 4 координати вектора наступного кроку $\vec{r}_1$.
- Віднімемо кожне знайдене середнє арифметичне від першого елемента відповідної пари. Дістанемо числа:

$$-130, -130, -75, 0.$$

  Ці значення утворюють останні чотири координати вектора наступного кроку $\vec{r}_1$.

- Утворимо новий вектор:

$$\vec{r}_1 = [550, 578, 1340, 1600, -130, -130, -75, 0].$$

Відзначимо, що вектор $\vec{r}_1$ може бути отриманий з $\vec{r}$ множенням справа вектора $\vec{r}$ на матрицю

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Перші чотири координати вектора $\vec{r}_1$ називаються **апроксимаційними (наближеними) коефіцієнтами**, а останні чотири — **деталізованими коефіцієнтами**.

2) Розглянемо перші чотири координати вектора $\vec{r}_1$ як дві пари і обчислимо середні значення як у першому кроці для вектора $\vec{r}$. Отримані значення 564 та 1470 є першими двома координатами наступного вектора $\vec{r}_2$. Третя і четверта координати вектора $\vec{r}_2$ отримуються знову відніманням від перших елементів відповідних пар. Ці значення (-14 та -130) є новими деталізованими коефіцієнтами. Останні чотири координати вектора $\vec{r}_2$ залишаються такими ж як і у вектора $\vec{r}_1$:

$$\vec{r}_2 = [564, 1470, -14, -130, -130, -130, -75, 0].$$

Тут вектор $\vec{r}_2$ може бути отриманий з $\vec{r}_1$ множенням справа вектора $\vec{r}_1$ на матрицю

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Утворимо середнє арифметичне з перших двох чисел і віднімемо його від першого числа та отримаємо перші дві координати вектора $\vec{r}_3$:

$$\vec{r}_3 = [1017, -453, -14, -130, -130, -130, -75, 0].$$

Як і перед цим, вектор $\vec{r}_3$ може бути отриманий множенням $\vec{r}_2$ справа на матрицю

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Як наслідок, вектор $\vec{r}_3$ може бути отриманий з $\vec{r}$ використанням наступної рівності

$$\vec{r}_3 = \vec{r} W_1 W_2 W_3.$$

Нехай

$$W = W_1 W_2 W_3 = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & -1/8 & 1/4 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/8 & -1/8 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & -1/8 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/8 & -1/8 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/8 & -1/8 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Відзначимо, що:

- Стовпці матриці W_1 утворюють ортогональну систему векторів простору $\mathbb{R}^8$, тобто стовпці W_1 є попарно ортогональними (знайдіть їх скалярний добуток). Тому вони утворюють базис у $\mathbb{R}^8$. Як наслідок, матриця W_1 є оборотною. Це ж саме вірно для W_2 і W_3.
- Матриця W також є оборотною як добуток оборотних матриць і її стовпці утворюють *ортогональний* базис

простору $\mathbb{R}^8$. Оберненою до W є

$$W^{-1} = W_3^{-1} W_2^{-1} W_2^{-1}.$$

Той факт, що W є оборотною дозволяє нам відновити наш образ зі стиснутої форми, використовуючи співвідношення:

$$\vec{r} = W^{-1} \vec{r}_3.$$

Припустимо, що A — це матриця, яка відповідає відомому образу. Вейвлет-перетворення Хаара виконує описані вище операції над кожним рядком матриці A, після чого повторює такі самі операції над стовпцями одержаної матриці. Рядково перетворена матриця є AW. Перетворення стовпців AW отримано множенням AW зліва на матрицю W^T (транспоновану до W). Тому вейвлет-перетворення Хаара матрицю A запам'ятовує як $W^T AW$. Нехай через S позначена трансформована матриця, тобто

$$S = W^T AW.$$

Використовуючи властивості оберненої матриці ми можемо відновити нашу початкову матрицю:

$$A = (W^T)^{-1} S W^{-1} = (W^{-1})^T S W^{-1}.$$

Це дозволяє нам побачити початкове зображення (зменшений стиснутий образ).

Розглянемо приклад. Припустимо, що ми маємо 8×8 зображення, яке представляється матрицею

$$A = \begin{bmatrix} 576 & 704 & 1152 & 1280 & 1344 & 1472 & 1536 & 1536 \\ 704 & 640 & 1156 & 1088 & 1344 & 1408 & 1536 & 1600 \\ 768 & 832 & 1216 & 1472 & 1472 & 1536 & 1600 & 1600 \\ 832 & 832 & 960 & 1344 & 1536 & 1536 & 1600 & 1536 \\ 832 & 832 & 960 & 1216 & 1536 & 1600 & 1536 & 1536 \\ 960 & 896 & 896 & 1088 & 1600 & 1600 & 1600 & 1536 \\ 768 & 768 & 832 & 832 & 1280 & 1472 & 1600 & 1600 \\ 448 & 768 & 704 & 640 & 1280 & 1408 & 1600 & 1600 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо рядково перетворену матрицю:

$$L = AW = \begin{bmatrix} 1200 & -272 & -288 & -64 & -64 & -64 & -64 & 0 \\ 1185 & -288 & -225 & -96 & 32 & 34 & -32 & -32 \\ 1312 & -240 & -272 & -48 & -32 & -128 & -32 & 0 \\ 1272 & -280 & -160 & -16 & 0 & -192 & 0 & 32 \\ 1256 & -296 & -128 & 16 & 0 & -128 & -32 & 0 \\ 1272 & -312 & -32 & 16 & 32 & -96 & 0 & 32 \\ 1144 & -344 & -32 & -112 & 0 & 0 & -96 & 0 \\ 1056 & -416 & -32 & -128 & 160 & 32 & -64 & 0 \end{bmatrix}.$$

Перетворення стовпців L отримано так:

$$S = W^T L = \begin{bmatrix} 1212 & -306 & -146 & -54 & -24 & -68 & -40 & 4 \\ 30 & 36 & -90 & -2 & 8 & -20 & 8 & -4 \\ -50 & -10 & -20 & -24 & 0 & 72 & -16 & -16 \\ 82 & 38 & -24 & 68 & 48 & -64 & 32 & 8 \\ 8 & 8 & -32 & 16 & -48 & -48 & -16 & 16 \\ 20 & 20 & -56 & -16 & -16 & 32 & -16 & -16 \\ -8 & 8 & 48 & 0 & -16 & -16 & -16 & -16 \\ 44 & 36 & 0 & -8 & & -16 & -16 & 0 \end{bmatrix}.$$

Особливість вейвлет-перетворення Хаара полягає в тому, що частина оригінальної матриці, яка містить маленькі варіації, буде закінчуватися нульовими елементами у перетвореній матриці. Матриця розглядається як *рідка*, якщо вона має велику кількість нульових елементів. Рідкі матриці займають набагато менше місця при зберіганні. Але утворені матриці не завжди можуть бути рідкими, тому діють таким чином: у перетвореній матриці будь-які елементи, що є меншими за наперед задане значення ε, прирівнюються до нуля. Це буде приводити нас до рідкої матриці. Якщо $\varepsilon = 0$, то ніякі елементи не змінюються.

Кожний раз, коли ви завантажуєте зображення, спочатку комп'ютер пригадує матрицю вейвлет-перетворення Хаара зі своєї пам'яті. Він повністю надсилає апроксимаційні коефіцієнти, великі деталізовані коефіцієнти, згодом — менші деталізовані коефіцієнти. Коли ваш комп'ютер отримує цю інформацію, то він реконструює великі деталі до того часу, поки оригінальний образ повністю не відновиться.

Більш швидкі і ефективні способи стиснення інформації.

Спочатку нагадаємо, що квадратна матриця n-го порядку A називається **ортогональною**, якщо її стовпці утворюють ортонормальний базис у $\mathbb{R}^n$, тобто стовпці попарно ортогональні і довжина кожного стовпця рівна 1. Це еквівалентно тому, що матриця обернена до матриці A співпадає із транспонованою до A. Остання властивість робить відновлення одразу набагато швидшим за допомогою рівності

$$A = (W^T)^{-1}SW^{-1} = (W^{-1})^T SW^{-1} = WSW^T.$$

Другою потужною властивістю ортогональних матриць є те, що вони зберігають довжини векторів. Іншими словами, якщо $\vec{v}$ є вектор з $\mathbb{R}^n$ і A є ортогональна матриця, то $||A\vec{v}|| = ||\vec{v}||$. Нижче показано як це працює:

$$||A\vec{v}||^2 = (A\vec{v})^T(A\vec{v}) = \vec{v}^T A^T A\vec{v} = \vec{v}^T E\vec{v} = \vec{v}^T\vec{v} = ||\vec{v}||^2.$$

Перетворення задане ортогональною матрицею зберігає кут. Нагадаємо, що косинус кута між двома векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$ задається рівністю

$$\cos\phi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}$$

Тому, якщо матриця A є ортогональною і ψ є кут між векторами $A\vec{u}$ і $A\vec{v}$, то

$$\begin{aligned}\cos\psi =& \frac{(A\vec{u})\cdot(A\vec{v})}{||A\vec{u}||||A\vec{v}||} = \frac{(A\vec{u})^T(A\vec{v})}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \frac{(\vec{u})^T A^T(A\vec{v})}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \\ =& \frac{(\vec{u})^T\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \cos\phi.\end{aligned}$$

Оскільки довжина і кут залишаються без зміни, то існує набагато менше спотворень у процесі відновлення образу при використанні ортогональної матриці. Оскільки матриця W є добутком трьох матриць, то можна нормувати W, пронормувавши кожну з цих трьох матриць. Тоді W набуде вигляду:

$$W = \begin{bmatrix} \sqrt{8}/64 & \sqrt{8}/64 & 1/2 & 0 & \sqrt{2}/4 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{8}/64 & \sqrt{8}/64 & 1/2 & 0 & -\sqrt{2}/4 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{8}/64 & \sqrt{8}/64 & -1/2 & 0 & 0 & \sqrt{2}/4 & 0 & 0 \\ \sqrt{8}/64 & \sqrt{8}/64 & -1/2 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/4 & 0 & 0 \\ \sqrt{8}/64 & -\sqrt{8}/64 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \sqrt{2}/4 & 0 \\ \sqrt{8}/64 & -\sqrt{8}/64 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/4 & 0 \\ \sqrt{8}/64 & -\sqrt{8}/64 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{8}/64 & -\sqrt{8}/64 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/4 \end{bmatrix}.$$

Стовпці матриці W утворюють новий «дуже хороший» базис для $\mathbb{R}^8$ в тому розумінні, що коли ми множимо вектор $\vec{v}$ (записаний у стандартному базисі) з $\mathbb{R}^8$ на W, то результатом є координати вектора $\vec{v}$ у цьому самому базисі. Деякі з цих координат можуть бути «знехтувані», враховуючи «порогове» значення ε. Це дозволяє перетвореній матриці бути сформованою більш легко і, відповідно, переданою швидше.

Ступінь стиснення.

Якщо ми виберемо наше початкове значення ε додатним, то деякі елементи перетвореної матриці будуть замінені на нулі і тому деякі деталі будуть втрачені при відновленні (декомпресії). Тому варто обрати ε так мудро, щоб стиск був зроблений максимально ефективно з мінімумом порушень на зображенні. Відмітимо, що **ступінь стиснення** визначається відношенням кількості ненульових елементів у перетвореній матриці ($S = W^T AW$) до кількості відмінних від нуля елементів у матриці стиснення, отриманій з S застосуванням порогового значення ε.

Розділ 4

Лінійна алгебра і марківські ланцюги

Теоретичні відомості

В теорії ймовірностей узагальненням схеми незалежних випробувань є так звані ланцюги Маркова[1]. Нехай відбувається серія випробувань, в кожному з яких може відбутися лише одна з k несумісних подій. Говорять, що послідовність випробувань утворює **ланцюг Маркова**, якщо умовна ймовірність в $n+1$-му випробуванні залежить лише від того, яка подія відбулась при n-му випробуванні і не змінюється від додаткових відомостей про те, які події відбувались в більш ранніх випробуваннях.

Марківські ланцюги часто використовують як математичні моделі при вивченні процесів у біології, хімії, інженерії, фізиці та інших науках. У кожному випадку модель використовується для опису результатів експерименту (або вимірювань), які неодноразово виконуються за однією методикою. При цьому результат кожного випробування в експерименті залежить тільки від попереднього випробування.

Розглянемо систему, яка в кожний момент часу може перебувати в одному з k станів. Ми обмежимось далі оглядом основних фактів для однорідних ланцюгів Маркова, в яких ймовірність того, що зі стану i система перейшла в стан j (вона

[1]Марков Андрій Андрійович (1856–1922) — російський математик.

називається *ймовірністю переходу* і позначається p_{ij}) не залежить від номеру випробування. Повна ймовірнісна картина усіх можливих змін, які відбуваються при переході від одного випробування до наступного, задається матрицею

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix},$$

що складена із імовірностей переходу. Матриця P називається **матрицею перехідних імовірностей.**

Вектор з невід'ємними координатами, сума яких дорівнює 1, називається **ймовірнісним вектором**. **Стохастичною матрицею** називається квадратна матриця, стовпці якої є імовірнісними векторами. Як бачимо, матриця перехідних імовірностей стохастична. Марківський ланцюг є послідовністю імовірнісних векторів $\vec{\mathbf{x}}_0$, $\vec{\mathbf{x}}_1$, $\vec{\mathbf{x}}_2, \ldots$, разом із матрицею перехідних імовірностей P, причому

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = P\vec{\mathbf{x}}_0, \quad \vec{\mathbf{x}}_2 = P\vec{\mathbf{x}}_1, \quad \vec{\mathbf{x}}_3 = P\vec{\mathbf{x}}_2, \quad \ldots$$

Отже, марківський ланцюг описується різницевим рівнянням першого порядку

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = P\vec{\mathbf{x}}_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Коли марківський ланцюг векторів з $\mathbb{R}^n$ описує можливі стани системи, то координати у $\vec{\mathbf{x}}_k$ перераховують, відповідно, ймовірності системи перебувати у кожному з цих можливих станів. У цьому смислі, вектор $\vec{\mathbf{x}}_0$ часто називають **вектором початкового стану**, а вектор $\vec{\mathbf{x}}_k$ – **вектором стану у момент часу** k.

Якщо P — стохастична матриця, то **стаціонарним вектором** (або **вектором рівноваги**) для матриці P є такий імовірнісний вектор $\vec{\mathbf{q}}$, що

$$P\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{q}}.$$

Квадратна матриця називається **додатною**, якщо усі її елементи є додатними числами; квадратна матриця називається **регулярною**, якщо деякий її степінь є додатною матрицею.

Говорять, що послідовність векторів $\{\vec{\mathbf{x}}_k\colon k = 1, 2, \ldots\}$ **прямує до** вектора $\vec{\mathbf{q}}$ при $k \to \infty$, якщо координати у $\vec{\mathbf{x}}_k$ збігаються до відповідних координат вектора $\vec{\mathbf{q}}$.

Нагадаємо також поняття власного вектора і власного значення матриці n-го порядку.

Означення 4.1. Число λ називається **власним значенням** квадратної матриці A, якщо існує ненульовий розв'язок $\vec{\mathbf{x}}$ рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}}$; при цьому такий $\vec{\mathbf{x}}$ називається **власним вектором** матриці A, що відповідає власному значенню λ.

Число λ є власним значенням $n \times n$ матриці A тоді і тільки тоді, коли рівняння

$$(A - \lambda I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}},$$

де I — одинична матриця, має нетривіальний розв'язок. Множина всіх розв'язків цього рівняння є підпростором простору $\mathbb{R}^n$; він називається *власним підпростором* матриці A, що відповідає λ. Власний підпростір містить нульовий вектор і всі власні вектори, які відповідають λ.

Матриці з додатними та невід'ємними елементами в лінійній алгебрі посідають особливе місце. Спектральні властивості додатних матриць встановлює наступне твердження, відоме як теорема Перрона[1] [7, гл. XIII].

Теорема 4.1 (Теорема Перрона). *Додатна матриця A завжди має додатне власне значення λ, яке є простим коренем характеристичного рівняння матриці. Модулі усіх інших власних значень (можливо, комплексних) не перевищують λ. Власному значенню λ відповідає власний вектор з додатними координатами.*

Узагальнив цю теорему на випадок невід'ємних матриць у 1912 р. Ф. Г. Фробеніус[2], наклавши на такі матриці додаткову технічну умову. Матриця A з невід'ємними членами називається *розкладною*, якщо деякою перестановкою її рядків та стовпців

[1] Oskar Perron (1880–1975) — німецький математик.

[2] Ferdinand Georg Frobenius (1880–1975) — німецький математик.

вона може бути зведена до вигляду $\begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$, де B, D — квадратні матриці, O — нульова матриця. В іншому випадку матриця A називається *нерозкладною.*

Теорема 4.2 (Теорема Перрона–Фробеніуса). *Нерозкладна невід'ємна матриця A завжди має додатне власне значення λ, яке є простим коренем характеристичного рівняння матриці. Модулі усіх інших власних значень не перевищують λ. Власному значенню λ відповідає власний вектор з додатними координатами.*

Для матриць перехідних імовірностей мають місце наступні твердження [12, стор. 322–325].

Теорема 4.3. *Якщо P — матриця перехідних імовірностей ланцюга Маркова, то 1 є власним значенням матриці P. Власний вектор, що відповідає власному значенню 1, є стаціонарним вектором матриці P.*

Теорема 4.4. *Нехай P — регулярна матриця перехідних імовірностей, λ — її власне значення. Тоді $|\lambda| \leqslant 1$.*

Теорема 4.5. *Нехай P — регулярна матриця перехідних імовірностей n-го порядку. Тоді при $k \to \infty$, P^k прямує до матриці L, усі стовпці якої однакові і рівні одному і тому самому вектору $\vec{\mathbf{q}}$. Цей вектор — стаціонарний вектор матриці P.*

Теорема 4.6. *Нехай P — регулярна стохастична матриця n-го порядку, $\vec{\mathbf{q}}$ — її стаціонарний вектор. Для довільного вектору початкового стану $\vec{\mathbf{x}}_0$, послідовність $\vec{\mathbf{x}}_k = P\vec{\mathbf{x}}_{k-1}$ для $k \in \mathbb{N}$ прямує до вектора $\vec{\mathbf{q}}$ при $k \to \infty$.*

1. Застосування марківських ланцюгів у суспільних науках

Марківські ланцюги і демографія.

Повернемося до прикладу про міграцію населення між містом і передмістям, який ми розглядали у §5 розділу 1, і спробуємо спрогнозувати чисельність населення через декілька років.

Нагадаємо, що міграцію населення між певним містом і передмістям було описано за допомогою міграційної матриці

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{bmatrix},$$

яка говорила, що кожного року 5% міського населення переїздить у передмістя та 3% приміського населення переїздить у місто.

Приклад 1. Припустимо, що процес міграції населення між містом і передмістям є марківським ланцюгом з міграційною матрицею M і початковим вектором $\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 600\,000 \\ 400\,000 \end{bmatrix}$. Дослідимо, яке співвідношення між населенням міста і передмістя буде через багато років.

Розв'язання. Обчислюючи зміни в населенні за два роки при розв'язуванні згаданої задачі, ми помітили, що населення міста зменшується, а передмістя збільшується. А чи буде так завжди?

Описаний процес міграції населення є марківським ланцюгом з матрицею перехідних імовірностей M, яка є регулярною стохастичною. За теоремою 4.3 вона має стаціонарний вектор. Це означає, що у віддаленому майбутньому населення міста і передмістя стабілізується по кількості. Стаціонарний вектор є власним вектором матриці M, який відповідає власному значенню 1. Для його відшукання слід розв'язати рівняння $M\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}$. Воно рівносильне рівнянню $(M - I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. Застосуємо метод Гаусса:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -0{,}05 & 0{,}03 & 0 \\ 0{,}05 & -0{,}03 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} -0{,}05 & 0{,}03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо систему $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Одним з її розв'язків є $x_1 = 3$ та $x_2 = 5$. Проте вектор $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ не є стохастичним. Поділимо цей вектор на суму його координат.

Отримаємо $\vec{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0{,}375 \\ 0{,}625 \end{bmatrix}$, який є шуканим. Таким чином, в нашому прикладі населення міста і передмістя через певний час стабілізується на рівні 375 000 і 625 000 тисяч людей відповідно.

Відзначимо, що якби населення міста і передмістя стало в точності таким, то на кінець наступного року міграція з міста була б $0{,}05 \cdot 375\,000 = 18\,750$ осіб, а міграція у місто з передмістя — $0{,}03 \cdot 625\,000 = 18750$ осіб. Як результат, чисельність населення міста і передмістя не змінилася б. ■

Марківські ланцюги і соціологія.

За допомогою марківських ланцюгів можна моделювати виборчі процеси. Проілюструємо це на прикладі виборів в конгрес США.

Приклад 2. Припустимо, що результати голосування по виборах у конгрес США у звичайному процентному голосуванні представлено вектором $\vec{\mathbf{x}}$ з $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \text{частка голосів за демократів (Д)} \\ \text{частка голосів за республіканців (Р)} \\ \text{частка голосів за незалежних (Н)} \end{bmatrix}.$$

Припустимо, що ми записували результати виборів у конгрес США кожних два роки (так відбуваються вибори у США) вектором такого типу і результати одних виборів залежать тільки від результатів попереднього вибору. Тоді послідовність векторів, яка описує голоси кожних два роки може бути змодельована марківським ланцюгом. Як приклад стохастичної матриці P для цього ланцюга, ми беремо

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Д} & \text{Р} & \text{Н} \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}10 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}80 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Д} \\ \text{Р} \\ \text{Н} \end{array} \end{array}$$

Елементи у першому стовпці, позначені Д, описують відносну кількість осіб, які голосували за демократів на попередніх виборах і будуть голосувати за них у наступних виборах. Для нашого прикладу ми припускаємо, що 70% будуть голосувати за демократів знову на наступних виборах, 20% — за республіканців і 10% — за незалежних. Подібна інтерпретація має місце для інших стовпців матриці P. Діаграма для цієї матриці показана на рисунку 4.1.

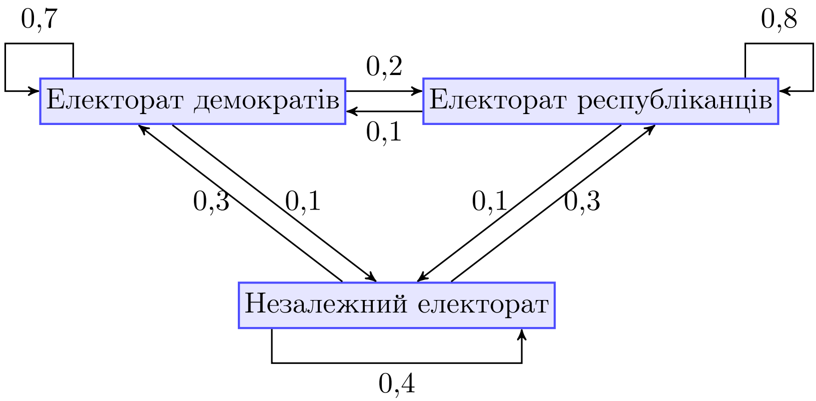


Рис. 4.1. Зміни в голосуванні від одних виборів до наступних

Якщо виходити з припущення, що «переміщення» відсотків залишається постійним упродовж багатьох років від одних виборів до наступних, то послідовність векторів, яка задає результати голосування, утворює марківський ланцюг. Припустимо, що результати одних виборів задано вектором

$$\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}40 \\ 0{,}05 \end{bmatrix}.$$

Встановити результати наступних двох виборів. Як можна спрогнозувати результати виборів у віддаленому майбутньому при такому процесі?

Розв'язання. Результат наступних виборів описано вектором $\vec{\mathbf{x}}_1$; ще наступних після цього — вектором $\vec{\mathbf{x}}_2$:

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = P\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}10 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}80 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}40 \\ 0{,}05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}440 \\ 0{,}445 \\ 0{,}115 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{x}}_2 = P\vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}10 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}80 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}440 \\ 0{,}445 \\ 0{,}115 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3870 \\ 0{,}4785 \\ 0{,}1345 \end{bmatrix}.$$

Для розуміння того, чому вектор $\vec{\mathbf{x}}_1$ справді відображає результат наступних виборів, припустимо, що з 1000 осіб, які голосували у перших виборах, 550 були за демократів (Д), 400 — за республіканців (Р) і 50 — за незалежних (Н) (згідно з вектором початкового стану $\vec{\mathbf{x}}_0$). На наступних виборах, 70% з 550 будуть голосувати знову за Д, 10% з 400 будуть переміщуватися від Р до Д, і 30% з 50 осіб, що голосували на перших виборах за Н, будуть голосувати за Д. Тому, загальні голоси за кандидата Д будуть становити

$$0{,}70 \cdot 550 + 0{,}10 \cdot 400 + 0{,}30 \cdot 50 = 385 + 40 + 15 = 440.$$

Тому 44% голосів наступного разу будуть за кандидата Д. Аналогічні обчислення проводяться і для інших координат вектора $\vec{\mathbf{x}}_1$, для координат у $\vec{\mathbf{x}}_2$ і т. д.

Для того, щоб оцінити, що буде відбуватися на виборах з підтримкою виборцями партій у віддаленому майбутньому при такій моделі, нам потрібно знайти стаціонарний вектор матриці

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}10 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}80 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \end{bmatrix}.$$

Для цього знайдемо розв'язки системи $(P - I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}30 & 0 \\ 0{,}20 & -0{,}20 & 0{,}30 & 0 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & -0{,}60 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -6 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -15 & 0 \\ 0 & -4 & 15 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ми отримали систему

$$\begin{cases} x_1 = \frac{9}{4}x_3, \\ x_2 = \frac{15}{4}x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Одним з її розв'язків є вектор $\begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix}$, тому стаціонарним вектором матриці P є

$$\vec{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{9}{28} \\ \frac{15}{28} \\ \frac{4}{28} \end{bmatrix}.$$

Тому у віддаленому майбутньому при цій моделі голоси виборців будуть розподілятись так:

$$\vec{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 9/28 \\ 15/28 \\ 4/28 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 32\% \text{ за демократів} \\ 54\% \text{ за республіканців} \\ 14\% \text{ за незалежних} \end{array}$$

■

Застосування марківських ланцюгів до вирішення бізнес-питань.

Приклад 3. У невеликому місті США підприємець вивчає можливість і перспективи бізнесу по відкриттю ресторана з українською кухнею. Для цього впродовж певного часу проводилося опитування жителів міста. На даний час у місті є три місця, де можна поїсти: китайський та мексиканський ресторани і італійська піцерія. Кожний житель міста харчується у одному з цих трьох місць або вдома.

Результати опитування показали, що серед тих людей, які в даний момент часу харчуються в китайському ресторані, 20% наступного разу підуть у мексиканський ресторан, 20% — будуть їсти вдома, 30% — відвідають піцерію. З тих, хто обідає у мексиканському ресторані, 10% наступного разу підуть до піцерії, 25% — у китайський ресторан, 25% — будуть їсти вдома.

З тих, хто сьогодні відвідує піцерію, наступного разу 30% харчуватимуться вдома, 30% — підуть у китайський ресторан, а 10% — у мексиканський. Нарешті з тих, хто їсть вдома, наступного разу 20% підуть у китайський ресторан, 25% — у мексиканський, 30% — у піцерію.

Оцінити перспективи розподілу жителів міста по місцях їхнього харчування у віддаленому майбутньому.

Розв'язання. Отримані у опитуванні дані можна записати у вигляді такої таблиці

Д	К	М	П	
0,25	0,20	0,25	0,30	Д
0,20	0,30	0,25	0,30	К
0,25	0,20	0,40	0,10	М
0,30	0,30	0,10	0,30	П

Тут перший стовпець представляє розподіл тих, які харчувалися вдома, за тим, куди вони підуть їсти наступного разу. Другий стовпець вказує аналогічний розподіл тих, які їли у китайському ресторані, третій стовпець — тих, які відвідали мексиканський, четвертий — тих, які харчувалися в італійській піцерії. У кожному стовпці сума елементів рівна 1.

Описана у прикладі ситуація є марківським ланцюгом з перехідною матрицею

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}25 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}40 & 0{,}10 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix}.$$

Припустимо, що на початку кожен житель міста обідає вдома, тобто вектор початкового стану $\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. У наступний спостережний період, скажімо, у кінці першого тижня, вектор стану буде таким

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = P\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}20 \\ 0{,}25 \\ 0{,}30 \end{bmatrix}.$$

Оскільки перехідна матриця P є регулярною, то для неї існує стаціонарний вектор. Ним є один з розв'язків рівняння

$$(P - I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Розв'язавши це рівняння, ми отримаємо

$$\vec{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}26 \\ 0{,}23 \\ 0{,}26 \end{bmatrix}.$$

Отже, можна зробити висновок, що з часом розподіл людей по чотирьох точках харчування близький до рівномірного. Тепер, знаючи приблизно кількість всіх потенціальних клієнтів, підприємець може зробити оцінку перспектив свого бізнесу. ■

Розглянемо ще один приклад.

Приклад 4. Припустимо, що прибуток від роботи сина або доньки, які починають працювати, залежить від доходів батьків. Нехай ця залежність задано такою матрицею перетворень:

Заробітки батьків	Н	С	В	
Заробіток	0,5	0,2	0,1	Н
сина чи дочки	0,3	0,6	0,4	С
на своїй роботі	0,2	0,2	0,5	В

Тут: Н — низький заробіток, С — середній заробіток і В — високий заробіток.

1. Якою є ймовірність того, що внук сім'ї з низьким рівнем заробітку буде мати високий рівень прибутку?

2. Яка частина населення через достатньо тривалий проміжок часу буде мати низький рівень заробітку?

Розв'язання. Описана ситуація є марківським ланцюгом, перехідна матриця якого є:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Нехай $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Тоді

$$\vec{x}_1 = P\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} \text{ і } \vec{x}_2 = P\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}33 \\ 0{,}41 \\ 0{,}26 \end{bmatrix}.$$

Тому ймовірність того, що внук сім'ї з низьким заробітком буде мати високий рівень прибутку дорівнює 0,26.

б) Оскільки P є регулярною матрицею, то ми можемо знайти P^n для великих n. За допомогою комп'ютера було обчислено кілька степенів:

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0{,}2449080417 & 0{,}2449021368 & 0{,}244824538 \\ 0{,}4693793597 & 0{,}4693852646 & 0{,}4693990427 \\ 0{,}2857125986 & 0{,}2857125986 & 0{,}2857185035 \end{bmatrix}$$

і

$$P^{100} = \begin{bmatrix} 0{,}2448979592 & 0{,}2448979592 & 0{,}2448979592 \\ 0{,}4693877551 & 0{,}4693852646 & 0{,}4693990427 \\ 0{,}2857142857 & 0{,}2857142857 & 0{,}2857142857 \end{bmatrix}$$

За теоремою 4.5 стовпці матриці P прямують до вектора рівноваги $\vec{\mathbf{q}}$. Тому

$$\vec{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0{,}245 \\ 0{,}469 \\ 0{,}286 \end{bmatrix}$$

і через тривалий час близько 29% населення буде мати низький рівень прибутку. ■

Марківські ланцюги і прогнозування погоди.

Спостерігаючи за погодою у певних регіонах можна помітити, що погода сьогодні зазвичай значною мірою залежить від того, якою вона була вчора. Це говорить нам, що процес зміни погоди може бути змодельовано марківським ланцюгом. Розглянемо такий приклад.

Приклад 5. У високогір'ї Карпат погода є чи не головною турботою населення. Неофіційне вивчення погоди у цьому регіоні ранньою весною виявило такі спостереження:

- Майже неможливо мати ясну погоду два дні поспіль.
- Якщо сьогодні ясна погода, то наступного дня напевно йтиме сніг або дощ.
- Якщо сьогодні йде сніг або дощ, то ми маємо значні шанси мати таку ж саму погоду наступного дня.
- Якщо снігова або дощова погода змінюється на іншу, то це відбувається з однаковою ймовірністю.

1. Записати матрицю перехідних імовірностей моделі цієї системи.

2. Якщо сьогодні сприятлива погода, то якою є ймовірність такої ж погоди через тиждень?

3. Чи можна передбачити ймовірність сприятливої, дощової та снігової погоди через місяць?

Розв'язання. а) Оскільки за нашим припущенням погода завтра залежить лише від погоди сьогодні, то ми маємо справу з марківським процесом. Перехідною матрицею цієї системи є

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{Я} & \text{Д} & \text{С} \end{array} \\
T = & \begin{bmatrix} 0 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Я} \\ \text{Д} \\ \text{С} \end{array}
\end{array}
$$

де літери Я, Д і С позначають ясну погоду, дощ і сніг відповідно.

б) Якщо сьогодні ясний день, то вектор початкового стану

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Я} \\ \text{Д} \\ \text{С} \end{array}.$$

Після семи днів вектор стану буде

$$\vec{x}_7 = T^7\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}19995 & 0{,}20001 & 0{,}20001 \\ 0{,}40002 & 0{,}40002 & 0{,}39996 \\ 0{,}40002 & 0{,}39996 & 0{,}40002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}19995 \\ 0{,}40002 \\ 0{,}40002 \end{bmatrix}.$$

Тому ймовірність того, що через тиждень буде ясна погоду становить близько 20%.

в) Оскільки матриця перехідних імовірностей є регулярною, то існує стаціонарний вектор. Для його знаходження ми розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(T - I)\vec{\mathbf{x}} = 0$, яка має таку головну матрицю

$$\begin{bmatrix} -1 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Зведення до східчастої форми приводить до матриці

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Загальний розв'язок цієї системи:

$$\begin{bmatrix} 0{,}5t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Тому стаціонарний імовірнісний вектор:

$$\vec{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Через тривалий час (наприклад, один місяць) ймовірність того, що буде ясна погода, становить 20%, йтиме дощ — 40%, випадатиме сніг — також 40%. ■

Вправи

1. У Великобританії вивчався розподіл людей за професіями високого рівня (управлінці і професіонали — люди інтелектуальної праці), середнього рівня (контролери і кваліфіковані робітники) та низького рівня (некваліфіковані). Для визначення мобільності між цими рівнями було опитано близько 2000 людей. Їм було поставлено запитання: «На професії якого рівня ви перебуваєте зараз і на якому рівні був ваш батько, коли вам було 14 років?» Результати опитування були такими.

$$\begin{array}{c|ccc} \text{Професія батька} & \text{В} & \text{С} & \text{Н} & \\ \hline \begin{array}{c}\text{Професія}\\ \text{сина чи дочки}\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{ccc} 0{,}60 & 0{,}29 & 0{,}16 \\ 0{,}26 & 0{,}37 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}34 & 0{,}57 \end{array}\right]} & \begin{array}{c}\text{В}\\ \text{С}\\ \text{Н}\end{array} \end{array}$$

Наприклад, дитина працівника низького рівня з імовірністю 0,27 стає працівником середнього рівня. Відзначимо, що марківська модель допускає (і, як показують соціологічні дані, це виглядає коректно), що робота батьків має прямий вплив на роботу дитини, а професія дідусів і бабусь такого прямого впливу не має.

Встановити, як буде змінюватися протягом п'яти наступних поколінь розподіл нащадків за класами професій, якщо початковий розподіл за класами респодентів-батьків є таким:

$$\begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}32 \\ 0{,}56 \end{bmatrix}.$$

2. Кожного року 10% жителів деякого міста від'їжджають на проживання у інші регіони країни. Крім цього, кожного року 1% людей з усієї країни переїжджають для проживання у це місто.

1) Скласти перехідну матрицю для цієї ситуації.

2) Починаючи з початкового розподілу, коли 30% населення країни живе у цьому місті, встановити розподіл населення протягом 10 років.

3) Провести аналогічні обчислення, як і в п. 2, якщо на початку 20% населення країни живе у цьому місті.

3. Кожного дня студент або здоровий, або хворий. З тієї кількості студентів, які сьогодні здорові, 95% будуть здоровими завтра. З тієї кількості студентів, які хворі сьогодні, 55% будуть продовжувати хворіти завтра.

1) Якою є стохастична матриця для цієї ситуації?

2) Припустимо, що 20% студентів хворі у понеділок. Яка частина студентів вірогідно будуть хворіти у вівторок? У середу?

3) Якщо студент здоровий сьогодні, то якою є ймовірність того, що він буде здоровим через два дні після цього?

4) Знайти вектор рівноваги для цього марківського ланцюга.

5) Якою є ймовірність того, що через багато днів конкретний студент буде хворіти? Чи залежить відповідь від того, чи є цей студент хворим сьогодні?

4. На першому курсі університету є 200 студентів спеціальності «Математика» і 350 студентів спеціальності «Фізика». Кожний рік деякі студенти змінюють спеціальність з математики на фізику і навпаки.

Ймовірність того, що студент залишається математиком дорівнює 0,92; ймовірність того, що студент з фізики переходить на математику дорівнює 0,04. Вважаючи, що зміна відбувається тільки між цими двома спеціальностями, дайте відповідь на такі запитання:

1) Якою є матриця перехідних імовірностей?

2) Скільки студентів-математиків буде на другому курсі?

3) Скільки студентів-фізиків буде на третьому курсі?

5. У деякому місті в 2016 році проживало 400 тисяч жителів, а у його передмісті — 20 тисяч жителів. Багаторічна статистика за попередні роки показує, що 0,2% міського населення переїзджджає на проживання у передмістя (решта залишаються у місті) та 1% приміського населення переїздить на постійне місце проживання у місто (решта залишаються жити у передмісті). Як в майбутньому зміниться чисельність населення в цьому місті та передмісті?

6. Щодня погода у деякому місті є однією з трьох: ясною, хмарною або дощовою. Якщо сьогодні погода ясна, то вірогідність того, що погода буде ясною завтра становить 60%, хмарною — 30%, дощовою — 10%. Якщо сьогодні погода є хмарною, то вона буде ясною наступного дня з ймовірністю 0,4 і залишиться хмарною з імовірністю 0,3. Нарешті, якщо сьогодні погода дощова, то вона стане ясною завтра з імовірністю 0,4 і хмарною — з ймовірністю 0,5.

1) Якою є стохастична матриця для цієї ситуації?

2) Припустимо, що вірогідність мати сьогодні ясну погоду становить 50%, хмарну — також 50%. Якою є вірогідність мати завтра дощову погоду?

3) Прогноз погоди стверджує, що з вірогідністю 40% погода в понеділок буде хмарною, а з вірогідністю 60% — дощовою. Якими є шанси мати ясну погоду в середу?

2. Лінійна алгебра і генетика

Однією з основних властивостей живих організмів є спадковість — здатність живих організмів передавати особинам наступного покоління морфоанатомічні, фізіологічні, біохімічні особливості своєї організації, формування яких контролюється окремими елементарними чинниками — генами, що передаються від покоління до покоління. Ген є дискретною одиницею спадковості, за допомогою якої відбувається запис, зберігання і передача генетичної інформації в ряду поколінь. Сукупність генів становить **генотип** — усі матеріальні структури клітини, що виконують функції спадковості. Генотип контролює формування всіх ознак організмів. Генетика є наукою про спадковість і мінливість організмів. Вона вивчає принципи зберігання, передачі і реалізації генетичної інформації в низці наступних поколінь, розкриває закони індивідуального розвитку організмів, закони виникнення нових ознак у них. Гени зумовлюють успадкування статі, кольору очей, волосся для людей і тварин, форму листя і колір пелюсток для рослин.

Деякі проблеми у генетиці можуть бути розв’язані за допомогою марківських ланцюгів.

Існує декілька типів спадковості. Одним з них є гібридизація — схрещування організмів, різних за спадковістю (генотипом). При цьому виникають нові комбінації генів, які забезпечують поширення спадкової мінливості в потомстві гібридів.

Розглянемо варіант з простими (соматичними, або нестатевими) клітинами, зокрема аутосомний тип. У відповідності з аутосомною спадковістю кожна характерна риса нащадка визначається двома генами: *домінантним* (позначається A) і *рецесивним* (позначається a). У кожного індивідуума є ці два типи генів: AA, aa або Aa (aA є генетично те ж саме, що і Aa).

Розглянемо колір очей у людини. Відомо, що, наприклад, коричневий колір очей спричинюється домінантним геном A, а блакитний — рецесивним a. При поєднанні AA і Aa колір очей буде визначати домінантний ген, а при поєднанні aa колір очей буде блакитний.

Кожний нащадок успадковує один ген від кожного з батьків. По даних генотипах батьків ми можемо визначити вірогідність генотипу нащадків. Припустимо, що у деякій популяції тварин початковий розподіл генотипів задано вектором

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} AA \\ Aa \\ aa \end{array} .$$

Тут компоненти вектора представляють ймовірності генотипів AA, Aa і aa на початку. Розглянемо варіанти поєднання генів: AA, Aa і aa з AA. Нас цікавить імовірність нащадка отримати поєднання AA, Aa або aa у кожному з цих випадків.

Розглянемо об'єднання батьківських генів AA з AA. Оскільки нащадок буде мати один ген від кожного з батьків, то він буде типу AA. Тому ймовірності появи AA, Aa і aa у результаті є 1, 0 і 0 відповідно. Всі нащадки будуть мати коричневий колір очей.

Далі розглянемо об'єднання генів Aa з AA. Беручи один ген від кожного з батьків, ми маємо ймовірності AA (якщо нащадок бере A від кожного з батьків), aA (якщо бере a від першого з батьків і A від другого з батьків). Тому ймовірності появи AA, Aa і aa у результаті є $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ і 0 відповідно. Всі нащадки знову будуть мати коричневі очі.

Розглядаючи останнє схрещення генотипу aa з AA ми бачимо, що існує тільки ймовірність aA. Тому ймовірності появи

AA, Aa і aa у результаті є 0, 1 і 0 відповідно. Нащадок не буде мати блакитних очей.

Таким чином, нащадок людини з генотипом AA буде мати лише коричневий колір очей.

Тепер перевіримо як ймовірності початкових генотипів будуть змінюватися від одного покоління до наступного. Нехай $\vec{x}_n$ буде вектором розподілу генотипів у n-ому потомстві. Як зазначено вище, ймовірності генотипів AA, Aa і aa у першому потомстві можуть бути представлені так $1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}$, $0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$ і $0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}$ відповідно. Іншими словами, $\vec{\mathbf{x}}_1 = A\vec{\mathbf{x}}_0$, де

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} AA \\ Aa \\ aa \end{array}$$

називається *еволюційною матрицею*. Взагалі $\vec{\mathbf{x}}_n = A\vec{\mathbf{x}}_{n-1}$. Таким чином ми маємо

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{x}}_4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{16} \\ \frac{1}{16} \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots$$

Як бачимо, тип aa зникає після початкового покоління, тому ймовірність типу Aa стає меншою і меншою у кожному наступному поколінні. Очевидно, що ця послідовність векторів прямує до вектора

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} AA \\ Aa \\ aa \end{array}$$

у віддаленому майбутньому.

Приклад 1. Одна з лабораторій аграрного університету досліджує, що корови з генотипом AA можуть давати кращу якість молока, ніж інші генотипи. Вчені зацікавлені у дослідженні частки нащадків корів з генотипом AA. Якщо у лабораторії обирають для схрещення тільки генотип AA з іншими генотипами, то якими є ймовірності того, що нащадок буде мати генотипи AA, Aa або aa?

Розв'язання. Для аналізу проблеми ми розглянемо три випадки (як і вище). Описані в умові спостереження можна записати у таблицю:

Генотип батьків			Генотип нащадка
AA – AA	AA – Aa	AA – aa	
1	1/2	0	AA
0	1/2	1	Aa
0	0	0	aa

Отримуємо еволюційну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Припустимо, що у початковій популяції корів усі три генотипи присутні порівну, тобто початковий вектор розподілу є таким:

$$\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Через один рік розподіл стане таким:

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = A\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Після того, як пройшов ще один рік, вектор розподілу можна отримати так:

$$\vec{\mathbf{x}}_2 = A\vec{\mathbf{x}}_1 = A(A\vec{\mathbf{x}}_0) = A^2\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Через n років:

$$\vec{\mathbf{x}}_n = A^n\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} & \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^{n+1}} & 1-\frac{1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

При зростанні n матриця A^n наближається до матриці

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тому $\vec{\mathbf{x}}_n = A^n\vec{\mathbf{x}}_0$ буде наближатися до

$$\vec{\mathbf{x}}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

■

Припустимо, нас цікавить кількість корів з генотипами AA, Aa і aa через 20 років. Для цього слід обчислити значення $A^{20}\vec{\mathbf{x}}_0$. Це можна здійснити, використовуючи *зведення матриці до діагонального вигляду*. Якщо матрицю A можна подати у вигляді $A = PDP^{-1}$, де D — діагональна матриця (тоді говорять, що матриця A є діагоналізуємою), то

$$A^k = PD^kP^{-1} \quad k \in \mathbb{N}$$

і

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Для того, щоб матриця n-ого порядку A була діагоналізуємою необхідно, щоб вона мала n лінійно незалежних власних векторів. При цьому діагональними елементами матриці D є власні значення матриці A (враховуючи кратність), а стовпцями матриці P — відповідні їм лінійно незалежні власні вектори.

Для матриці A, яка розглядалася у попередньому прикладі, власні значення дорівнюють

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 0,$$

а відповідні їм власні вектори:

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Діагональна матриця

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad P = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1 & \vec{\mathbf{v}}_2 & \vec{\mathbf{v}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тому

$$\vec{\mathbf{x}}_n = A^n \vec{\mathbf{x}}_0 = PD^n P^{-1} \vec{\mathbf{x}}_0 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вправи

1. Побудувати математичну модель схрещення гібридного нащадка з іншими генотипами.

2. На експериментальній фермі велика колекція квітів містить всі можливі генотипи AA, Aa і aa з початковим розподілом a_0, b_0, c_0. (тобто $\vec{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$). Припустимо, що кожна квітка у колекції запилилася з квіткою генотипу AA.

1) Знайти вираз $\vec{\mathbf{x}}_n$ розподілу можливих генотипів колекції після n генерацій.

2) Повторити завдання 1) у припущенні, що кожна квітка у колекції запилилася з квіткою генотипу Aa.

3) Повторити завдання 1) у припущенні, що кожна квітка у колекції запилилася з квіткою такого ж генотипу як сама.

4) Повторити завдання 1) у припущенні, що кожна квітка колекції у початковій генерації запилилася з квіткою генотипу

Aa, кожна квітка першої генерації запилилася з квіткою генотипу AA, кожна квітка другої генерації запилилася з квіткою генотипу aa і така модель запилення продовжується.

3. Моделювання динаміки популяцій

Популяція — це сукупність особин одного виду рослин або тварин, які протягом тривалого часу (великої кількості поколінь) населяють певну ділянку навколишнього середовища.

Одну з найпопулярніших моделей для опису динаміки зміни чисельності популяцій було запропоновано американським екологом Полом Леслі у середині XX століття[1]. Але широко матричні методи почали застосовуватися у математичній екології після виходу роботи Лефковича[2].

До виходу праць Леслі і Лефковича моделі вивчення популяцій базувались на методах диференціального числення. Проте при розрахунках на практиці часто доводиться мати справу з дискретними величинами. Крім того, розвиток багатьох популяцій (наприклад, лісів помірного поясу) має яскраво виражений сезонний характер. Тому часто для характеристики популяцій та для практичних розрахунків більш ефективні не методи диференціального та інтегрального числення, а методи дискретної математики. Модель Леслі описує динаміку зміни кількості самок в популяції. При цьому популяція розбивається на n вікових груп, однакових за тривалістю, і складається матриця

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

У цій матриці через s_i позначено *виживання* представників i-ої вікової групи (тобто ймовірність того, що особа i-ої групи

---

[1]Leslie P. H. On the use of matrices in certain population mathematics // Biometrika. — 1945. — Vol. 33. — P. 183–212.

[2]Lefkovitch L. P. The study of population growth in organisms grouped by stages // Biometrics. — 1965. — Vol. 21. — P. 1–18.

виживе і перейде до $(i+1)$-ої групи); через b_i — параметри народжуваності представників i-ої групи (b_i є середньою кількістю осіб, що народжує самка з i-го вікового класу). При множенні цієї матриці на вектор-стовпець $\vec{\mathbf{x}}_k$, координатами якого є кількості осіб різних вікових стадій у час k (від першої стадії — новонароджених малят, до n-ої стадії — найстарших особин), отримуємо кількість особин різного віку через певний проміжок часу (наприклад, через один рік).

Різницеве рівняння

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = L\vec{\mathbf{x}}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

з матрицею (4.1) прийнято називати стадійно-матричною **моделлю Леслі**; L називається **матрицею Леслі**. Матриця Леслі є невід'ємною, причому хоча б один елемент першого рядка відмінний від нуля; коефіцієнти виживання задовольняють нерівність $0 < s_i \leqslant 1$. Має місце таке твердження.

Теорема 4.7. *Кожна матриця Леслі має єдине додатне власне значення, а відповідний цьому значенню власний вектор має додатні координати.*

Більше того, за теоремою Перрона–Фробеніуса це єдине додатне власне значення λ матриці Леслі є ще й *домінантним*, тобто якщо λ' — деяке інше її власне значення (дійсне або комплексне), то $|\lambda'| < \lambda$. Це домінантне власне значення, як ми побачимо нижче, можна трактувати як коефіцієнт росту популяції.

Якщо додатне власне значення матриці Леслі менше одиниці, то популяція приречена на вимиранння, якщо більше одиниці — відбувається необмежений ріст популяції. При цьому швидкість зростання популяції буде визначатися домінантним власним числом. При такому динамічному описі популяції необхідно передусім враховувати відмінності в здатності особин до розмноження. З цією метою, їх, зазвичай, виділяють у три групи: прегенеративних (молодих, які не здатні до розмноження), генеративних (здатних до розмноження) і постгенеративних (тих, що втратили здатність до розмноження). У залежності від особливостей життєвого циклу конкретного виду і за наявності надійних діагностичних ознак кожна з цих великих груп розбивається на більш дрібні вікові підгрупи. Необхідно відзначити, що поділ популяції на вікові групи виправдане з практичної точки зору у тих випадках, коли організми даного виду мають ознаки, які дозволяють визначити точно вік особи (наприклад, у випадку популяції лісів, вік окремого дерева можна точно визначити за допомогою річних кілець)[1].

Нехай матриця L є діагоналізуємою з n лінійно незалежними власними векторами $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ і відповідними власними значеннями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Для зручності, будемо вважати, що власні вектори розміщено так, що $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$. Це означає, що $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$ є базисом для $\mathbb{R}^n$, і будь-який початковий вектор $\vec{\mathbf{x}}_0$ однозначно можна записати у вигляді

$$\vec{\mathbf{x}}_0 = c_1\vec{\mathbf{v}}_1 + \cdots + c_n\vec{\mathbf{v}}_n. \tag{4.2}$$

Оскільки $\vec{\mathbf{v}}_i$ — власні вектори, то

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{x}}_1 = L\vec{\mathbf{x}}_0 &= c_1 L\vec{\mathbf{v}}_1 + \cdots + c_n L\vec{\mathbf{v}}_n \\ &= c_1\lambda_1\vec{\mathbf{v}}_1 + \cdots + c_n\lambda_n\vec{\mathbf{v}}_n\end{aligned}$$

Взагалі,

$$\vec{\mathbf{x}}_k = c_1(\lambda_1)^k\vec{\mathbf{v}}_1 + \cdots + c_n(\lambda_n)^k\vec{\mathbf{v}}_n \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

Приклади, які ми наводимо далі, ілюструють, що трапляється у (4.3) при $k \to \infty$.

Виживання популяції плямистих сов.

Приклад 1. У 1990 році північна плямиста сова стала центром всенародного обговорення про експлуатацію і неправильне використання величавих лісів північного заходу США.

Вчені-екологи запевняли федеральний уряд в тому, що сова приречена на вимирання, якщо продовжиться масова вирубка у віковічних лісах, які були переважним ареалом проживання

[1]Детальніше з такими дослідженнями можна познайомитися у посібниках з математичної екології та окремих статтях (див., наприклад, Логофет Д. О., Белова И. Н. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения. — Фундаментальная и прикладная математика. — 2007, Т. 13, № 4. — С. 145 –164.)

цих сов. Зі свого боку, деревообробна індустрія, передбачаючи втрату від 30 до 100 тисяч робочих місць в результаті нових урядових обмежень на вирубки, аргументувала, що сова не буде класифікована як «вимираючий вид» і, навпаки, наводили численні публікації учених у свою підтримку.

Перед математичними екологами постало завдання дослідити динаміку розвитку популяції плямистих сов у цьому випадку.

Вивчення цієї проблеми здійснювалось під керівництвом проф. Р. Ламберсона. Вчені визначали популяцію в щорічних інтервалах, позначені у часі через $k = 0, 1, 2, \ldots$. Вважаючи, що відношення самок і самців є $1 : 1$ у кожній життєвій стадії, вони вирішили обмежитись дослідженням лише популяції самок. Популяція в рік k була описана вектором $\vec{\mathbf{x}}_k = (a_k, b_k, c_k)$, де a_k, b_k і c_k — число самок в ранній, середній і дорослій стадіях відповідно. Використовуючи масиви даних спостережень, вчені розглянули таку матричну модель, подібну до моделі Леслі:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix}.$$

Тут кількість новонароджених самок у $k+1$-ому періоді становить 0,33 від числа дорослих у k-ому періоді (базується на середньому показнику народжуваності для совиної пари). З цих новонароджених лише 18% доживають до наступної стадії; також 71% молодих сов та 94% дорослих виживають і зараховуються в наступному періоді як дорослі особини. Частка у 18% у лісах Каліфорнії така низька тому, що через суцільну вирубку лісів з середньостатистичних 60% сов з ранньої стадії життя, які там залишали гнізда, лише 30% знаходили нове місце для гніздування.

Власними значеннями для матриці

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{bmatrix}$$

є $\lambda_1 \approx 0{,}98$, $\lambda_2 \approx -0{,}02 + 0{,}21i$ і $\lambda_3 \approx -0{,}02 - 0{,}21i$. Відзначимо, що всі три власні значення за абсолютною величиною є меншими за одиницю ($|\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = (-0{,}02)^2 + (0{,}21)^2 = 0{,}0445$), що узгоджується з теоремою Перрона–Фробеніуса.

Припустимо, що матриця L діє на комплексному векторному просторі $\mathbb{C}^3$. Тоді, оскільки L має три різних власних значення, то три відповідних власних вектори є лінійно незалежними і утворюють базис простору $\mathbb{C}^3$. Позначимо власні вектори через $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$ і $\vec{\mathbf{v}}_3$. Тоді загальний розв'язок рівняння $\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = L\vec{\mathbf{x}}_k$ (використовуючи вектори у $\mathbb{C}^3$) є таким:

$$\vec{\mathbf{x}}_k = c_1(\lambda_1)^k\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2(\lambda_2)^k\vec{\mathbf{v}}_2 + c_3(\lambda_3)^k\vec{\mathbf{v}}_3.$$

Якщо $\vec{\mathbf{x}}_0$ — дійсний початковий вектор, то дійсними також будуть усі вектори $\vec{\mathbf{x}}_k = L\vec{\mathbf{x}}_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, не дивлячись на те, що кожен з них виражається сумою комплексних векторів. Разом з тим, кожний член справа у останній рівності є наближенням нульового вектора, оскільки всі власні значення за величиною менші за одиницю. Тому послідовність $\vec{\mathbf{x}}_k$ наближається до нульового вектора також. Таким чином, ця модель передбачає, що популяція сов зрештою зникне.

Чи є надія для цієї популяції сов?

Приклад 1 (продовження). Якщо зменшити вирубку лісів до рівня, щоб 50% молодих сов, які покинули гніздо, могли знайти нове місце для гніздування, то $(2,1)$-елемент у матриці L стане рівним 0,3 замість 0,18. У такому випадку власні значення для L будуть такими: $\lambda_1 = 1{,}01$, $\lambda_2 = -0{,}03 + 0{,}26i$ і $\lambda_3 = -0{,}03 - 0{,}26i$. Тут $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{(-0{,}03)^2 + (0{,}26)^2} < 1$.

Власний вектор для λ_1 наближено є $\vec{\mathbf{v}}_1 = (10, 3, 31)$. Нехай $\vec{\mathbf{v}}_2$ і $\vec{\mathbf{v}}_3$ є (комплексні) вектори для λ_2 і λ_3. У цьому випадку, розв'язок рівняння стає

$$\vec{\mathbf{x}}_k = c_1(1{,}01)^k\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2(-0{,}03 + 0{,}26i)^k\vec{\mathbf{v}}_2 + c_3(-0{,}03 - 0{,}26i)^k\vec{\mathbf{v}}_3.$$

При збільшенні k другий і третій вектори-доданки наближаються до нуля. Тому $\vec{\mathbf{x}}_k$ стає більше і більше подібним до (дійсного) вектора $c_1(1{,}01)^k\vec{\mathbf{v}}_1$ – першого доданка. Можна показати, що константа c_1 у початковому розкладі $\vec{\mathbf{x}}_0$ є додатною, коли координати вектора $\vec{\mathbf{x}}_0$ невід'ємні. Тому популяція сов буде повільно зростати з довготерміновим коефіцієнтом 1,01.

Власний вектор $\vec{\mathbf{v}}_1$ описує остаточний розподіл сов на життєвих стадіях. На кожну 31-у дорослу сову буде припадати близько десяти молодих і три юні сови.

Система «хижак-жертва».

Склад популяції зумовлюється не випадковою комбінацією індивідів, а певними взаємовідношеннями виду з комплексом умов навколишнього середовища. Будь-які популяції існують лише у взаємодії з довкіллям. Типи різних взаємодій вивчаються математичною екологією. Найпоширенішими і добре вивченими є міжвидова *конкуренція*, яка характеризується пригніченням одного виду іншим (чисельність одного з видів зростає з меншою швидкістю), *симбіозу*, зокрема такої форми як мутуалізм (взаємокорисні відносини симбіонтів, коли види сприяють збільшенню кількості один одного) та *«хижак-жертва»*, коли чисельність виду-жертви зростає повільніше, а виду-хижака — швидше. Вперше глибоке математичне дослідження закономірностей динаміки взаємодії популяцій було дано в книзі італійського математика Віто Вольтерра[1] «Математична теорія боротьби за існування» (1931). Він запропонував описувати взаємодію видів за допомогою систем диференціальних рівнянь.

Наведемо приклад останнього типу взаємодії, який досліджується за допомогою методів лінійної алгебри, зокрема, з використанням власних значень і власних векторів матриці.

Найбільшими хижаками, від якого потерпають лісові миші, є сови. Приклад 2 використовує лінійну динамічну систему для моделювання фізичної системи співіснування сов і мишей (насправді модель є нереалістичною у деяких аспектах, але вона може дати стартовий поштовх для вивчення більш складних нелінійних моделей).

Приклад 2. Позначимо щомісячні популяції сов і лісових мишей через $\vec{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} C_k \\ P_k \end{bmatrix}$ (тут k позначає час у місяцях, C_k — кількість сов у регіоні вивчення, P_k — кількість мишей, що

[1]Vito Volterra (1860–1940) — італійський математик.

виміряні у тисячах). Припустимо, що має місце такий зв'язок:

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= 0,5C_k + 0,4P_k, \\ P_{k+1} &= -p \cdot C_k + 1{,}1P_k, \end{aligned} \tag{4.4}$$

де p — додатний специфічний параметр. Доданок $0{,}5C_k$ у першому рівнянні вказує на те, що, не поїдаючи лісових мишей, тільки половина сов буде зберігатися кожний місяць. Доданок $1{,}1P_k$ у другому рівнянні вказує на те, що без сов популяція мишей буде збільшуватися на 10% щомісяця. Коли мишей дуже багато, то доданок $0{,}4P_k$ приводить до того, що популяція сов зростає, тоді як від'ємний член $-p \cdot C_k$ вимірює кількість мишей, які стали здобиччю сов (фактично $1000p$ є середньою кількістю мишей, які впольовані однією совою за один місяць). Визначити еволюцію цієї системи, коли параметр p дорівнює 0,104, тобто одна сова за один місяць з'їдає 104 миші.

Розв'язання. Систему (4.4), яка описує взаємозв'язок даних популяцій можна записати у вигляді

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k \quad \text{де} \quad A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ -p & 1{,}1 \end{bmatrix}.$$

Для $p = 0{,}104$ власні значення матриці A дорівнюють $\lambda_1 = 1{,}02$ і $\lambda_2 = 0{,}58$, а відповідні їм власні вектори:

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Початковий вектор $\vec{\mathbf{x}}_0$ запишемо у вигляді $\vec{\mathbf{x}}_0 = c_1\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\vec{\mathbf{v}}_2$. Тоді, для $k \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}_k &= c_1(1{,}02)^k\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2(0{,}58)^k\vec{\mathbf{v}}_2 = \\ &= c_1(1{,}02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2(0{,}58)^k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При зростанні k вираз $(0{,}58)^k$ наближається до нуля. Вважатимемо, що $c_1 > 0$. Тоді для достатньо великих k:

$$\vec{\mathbf{x}}_k \approx c_1(1{,}02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Крім цього для великих k:

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} \approx c_1(1{,}02)^{k+1} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = (1{,}02)c_1(1{,}02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \approx 1{,}02\vec{\mathbf{x}}_k. \tag{4.6}$$

Апроксимація у (4.6) говорить, що зрештою обидві координати у $\vec{\mathbf{x}}_k$ (чисельності сов і мишей) зростають з коефіцієнтом 1,02, тобто щомісячно популяції зростають на 2%. Згідно з (4.5), $\vec{\mathbf{x}}_k$ приблизно кратний вектору $(10, 13)$. Тому координати у $\vec{\mathbf{x}}_k$ близькі до такого ж відношення як 10 до 13. Це означає, що через тривалий час на кожні 10 сов припадатиме близько 13 тисяч мишей. ■

Приклад 3. Нехай є заповідна територія (парк) з тваринами, яких ми хочемо захистити. Огорожа відсутня, тому тварини можуть вільно заходити в парк, або виходити з нього. Загальна кількість тварин, які потрібно захистити — 110 000. Кожний рік 10% тварин залишають парк і 1% тварин заходять у нього. Чи можемо ми встановити стабільний рівень чисельності тварин для цього парку, тобто чи існує такий рівень популяції тварин, при якому кількість тих тварин, які залишають парк, дорівнює кількості тих, які приходять у парк упродовж року?

Розв'язання. Нехай у рік n чисельність тварин у парку дорівнює p_n, а за його межами — r_n. Тоді:

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}01r_n, \\ r_{n+1} = 0{,}1p_n + 0{,}99r_n. \end{cases}$$

Ми можемо записати цю систему у такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} p_{n+1} \\ r_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.01 \\ 0.1 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_n \\ r_n \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad \vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k.$$

Стабільність чисельності тварин в парку та за його межами означає, що $p_{n+1} = p_n$ і $r_{n+1} = r_n$. Тоді матричне рівняння $\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k$ перетворюється у $\vec{\mathbf{q}} = A\vec{\mathbf{q}}$ і потрібно знайти стаціонарний вектор марківського ланцюга з матрицею перехідних імовірностей A.

Розв'язуючи рівняння $\vec{\mathbf{q}} = A\vec{\mathbf{q}}$ знаходимо, що $p = 0{,}1r$ і стаціонарний вектор $\vec{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{10}{11} \end{bmatrix}$. Оскільки $p + r = 110\,000$, то отримуємо, що стабільним є стан, коли у парку $p = 10\,000$, а за його межами — $r = 100\,000$ тварин, які підлягають захисту. ■

Вправи

1. Як зміниться початкова популяція тварин у заповідному парку, про який говорилося у прикладі 3, якщо популяція цих тварин буде щорічно зменшуватися на 11%?

2. Що станеться з початковою популяцією тварин у заповідному парку (див. приклад 3) у випадку збільшення популяції на 1%?

3. Припустимо, що заповідний парк частково огорожений (див. приклад 3). Тепер щорічно тільки 5% тварин з парку залишають його територію (тоді як 1% тварин ззовні парку заходять на його територію). Чи може за цих умов підтримуватися стабільний рівень тварин у заповіднику?

4. Деякий вид птахів проживає лише у Канаді, США та Мексиці. Спостереження показують, що кожного року 4% канадських птахів перелітають до США, а потім 1% з них летять у Мексику. Також щорічно 6% птахів США перелітають до Канади, а 4% — до Мексики. З Мексики кожного року 10% птахів перелітають до США, а в Канаду вони не прилітають.

1) Скласти матрицю перехідних імовірностей для описаної ситуації.

2) Чи стабілізується коли-небудь популяція цих птахів? Знайти всі стабільні стани для всіх країн.

5. Побудувати стадійно-матричну модель для виду тварин, які мають дві життєві стадії: ранню (до 1 року) і дорослу. Припустимо, що доросла самка щорічно народжує в середньому 1,6 молодих самок. Кожного року 30% молодих тварин виживають і стають дорослими; також виживає 80% дорослих тварин. Нехай $\vec{\mathbf{x}}_k = (a_k, b_k)$, де a_k, b_k є відповідно кількості молодих і дорослих самок у рік k.

1) Побудувати матрицю A таку, що $\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = A\vec{\mathbf{x}}_k$ для $k \geqslant 0$.

2) Показати, що популяція зростає, обчислити коефіцієнт росту популяції і знайти відношення молодих тварин до дорослих через досить велику кількість років.

3) Припустимо, що на початку існує 15 молодих і 10 дорослих особин у популяції. Побудувати чотири графіки зміни популяції впродовж восьми років: кількості молодих особин популяції, дорослих особин, загальної чисельності популяції та відношення молодих особин до дорослих. Коли відношення у п. 4 здається стабільним?

6. У лісах з дугласової ялиці сова харчується переважно летягами. Припустимо, що система «хижак-жертва» для цих двох популяцій моделюється матрицею $A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ -p & 1{,}2 \end{bmatrix}$. Показати, що у випадку, коли параметр p дорівнює 0,325, обидві популяції зростають. Оцінити довготерміновий коефіцієнт росту популяцій і остаточне відношення сов і летяг.

7. Показати, що коли параметр p у вправі 6 дорівнює 0,5, то обидві популяції сов і летяг зрештою загинуть. Знайти значення параметра p, при якому популяції сов і летяг наближаються до постійних рівнів. Яким є відношення розмірів популяцій у цьому випадку?

8. У 30-х роках XX століття досліджувалась популяція синіх китів. Внаслідок тривалого періоду вагітності (близько одного року), особливостей шлюбного періоду і міграції синього кита самка може народжувати потомство один раз на два роки. Тому було прийнято розподіл китів на такі вікові групи: менше двох років, 2–3 роки, 4–5 років, 6–7 років, 8–9 років, 10–11 років, 12 та більше років. Матриця для моделювання динаміки популяції наступна:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}19 & 0{,}44 & 0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}45 \\ 0{,}77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}77 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}77 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}77 & 0 \end{bmatrix}.$$

Встановити чи стає популяція синіх китів вимираючою у цій моделі. Якщо популяція не стає вимираючою, то визначити відсотки кожного класу у стабільній популяції.

9. Певний вид жуків живе щонайбільше три роки. Розділимо самок жуків на три класи: молоді (до 1 року), юні (віком 1–2 роки) та дорослі (старші за 2 роки). Молоді самки яєць не відкладають. Юні в середньому народжують по 4 самки, а дорослі — в середньому по 3. Коефіцієнт виживання молодих жуків становить 50% (тобто ймовірність того, що молода самка стане юною дорівнює 0,5), а юних — 25%. Припустимо, що ми почали з популяції, в якій 100 самок жуків: 40 молодих, 40 юних і 20 дорослих. Передбачити, як буде змінюватись популяція жуків у наступні 5 років.

10. Підраховано, що самка метелика, що живе на модрині, відкладає 200 яєць, з яких личинками стають 170. З цих 170 личинок гусеницями стає 34, з яких лише 3,5 перетворюється в лялечки, а з лялечок в метелики — лише 2,5 особини з кожної 200-яєчної кладки. Решта гине від хвороб, комах-паразитів, птахів тощо. Але із тих п'яти метеликів, що залишаються від двох кладок, лише два знову відкладуть яйця, оскільки 1–2 метелики загинуть, один — виявиться самцем, а одна самка може і не спаруватись. Скласти модель Леслі, яка описуватиме динаміку цієї популяції метеликів.

Розділ 5

Несумісні системи лінійних рівнянь

При розв'язуванні різних прикладних задач часто виникають несумісні системи лінійних рівнянь. Вчені в процесі своїх досліджень збирають дані, які, як правило, містять експериментальну похибку. Після цього науковці намагаються знайти функціональні залежності між змінними величинами, які фігурують у дослідах. Вони вивчають ці дані та висувають у якості гіпотез математичні моделі для них у вигляді функціональних залежностей між змінними.

Звичайно найпростішими у дослідженнях властивостей є многочлени невеликих степенів. Для знаходження коефіцієнтів таких многочленів можна використовувати метод, який ми ілюстрували у § 4 розділу 2. Але у більшості випадків такий метод приводить до несумісної системи лінійних рівнянь виду $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

Застосування методу інтерполяційних многочленів для опрацювання даних, відомого з теорії многочленів, приводить до многочленів високих степенів, якщо цих даних багато.

При вивченні несумісних систем лінійних рівнянь застосовують апроксимацію методом найменших квадратів. Ідея такої підгонки даних належить Карлу Фрідріху Гауссу. У 1801 році молодий Гаусс займався створенням методів обробки астрономічних досліджень. Він використав цей метод для встановлення орбіти малої планети Церера. Через 40 днів після того як астероїд був відкритий, він зник позаду сонця. Гаусс передбачив, коли астероїд з'явиться і вказав його розташування на небі. Орбіта Церери лежить між орбітами Марса і Юпітера та період обертання її навколо Сонця складає 4,6 року. Точність передбачення Гаусса вразила науковців того часу.

Теоретичні відомості

Нехай $\vec{\mathbf{u}}$ і $\vec{\mathbf{v}}$ — вектори-стовпці з $\mathbb{R}^n$. Тоді $\vec{\mathbf{u}}^T$ є $1 \times n$ матриця і матричний добуток $\vec{\mathbf{u}}^T\vec{\mathbf{v}}$ є 1×1-матриця, яку ми записуємо просто як дійсне число (скаляр) без дужок і воно рівне сумі добутків однойменних координат даних векторів. Число $\vec{\mathbf{u}}^T\vec{\mathbf{v}}$ називається **скалярним добутком** $\vec{\mathbf{u}}$ і $\vec{\mathbf{v}}$ та позначається так: $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$.

Довжиною вектора $\vec{\mathbf{u}}$ з $\mathbb{R}^n$ називається число

$$||\vec{\mathbf{u}}|| = \sqrt{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}}}.$$

Вектор, довжина якого дорівнює 1, називається *одиничним.*

Відстанню між векторами $\vec{\mathbf{u}}$ і $\vec{\mathbf{v}}$ називається довжина вектора $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$:

$$\mathrm{dist}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = ||\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}||.$$

Два вектори $\vec{\mathbf{u}}$ і $\vec{\mathbf{v}}$ з $\mathbb{R}^n$ називаються **ортогональними** (один до іншого), якщо $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$. Множина векторів $\{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_p\}$ з $\mathbb{R}^n$ називається *ортогональною*, якщо кожна пара різних векторів з множини є ортогональною:

$$\vec{\mathbf{u}}_i\cdot\vec{\mathbf{u}}_j = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Базис векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається *ортогональним*, якщо він є ортогональною множиною. Ортогональний базис $\mathbb{R}^n$ називається *ортонормованим*, якщо його вектори є одиничними.

Якщо вектор $\vec{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n$ є ортогональним до кожного вектора підпростору W простору $\mathbb{R}^n$, то $\vec{\mathbf{z}}$ називається *ортогональним до* W. Множина всіх векторів $\vec{\mathbf{z}}$, які є ортогональними до W, називається **ортогональним доповненням** до W і позначається через $W^{\perp}$. Має місце таке важливе твердження.

Теорема 5.1 (Теорема про ортогональний розклад). *Нехай W — підпростір $\mathbb{R}^n$. Тоді кожний вектор $\vec{\mathbf{y}}$ з $\mathbb{R}^n$ може бути записаний єдиним чином у вигляді*

$$\vec{\mathbf{y}} = \hat{\vec{\mathbf{y}}} + \vec{\mathbf{z}}, \tag{5.1}$$

де $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$ належить W і $\vec{\mathbf{z}}$ належить $W^{\perp}$. Фактично, якщо $\{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_p\}$ — довільний ортогональний базис для W, то

$$\hat{\vec{\mathbf{y}}} = \frac{\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{u}}_1}{\vec{\mathbf{u}}_1\cdot\vec{\mathbf{u}}_1}\vec{\mathbf{u}}_1 + \cdots + \cdots + \frac{\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{u}}_p}{\vec{\mathbf{u}}_p\cdot\vec{\mathbf{u}}_p}\vec{\mathbf{u}}_p \tag{5.2}$$

і $\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{y}} - \hat{\vec{\mathbf{y}}}$.

Вектор $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$ у рівності (5.1) називається **ортогональною проекцією $\vec{\mathbf{y}}$** на W і позначається як $\mathrm{proj}_W\,\vec{\mathbf{y}}$; вектор $\vec{\mathbf{z}}$ називається **компонентою $\vec{\mathbf{y}}$, ортогональною до** W (див. рис. 5.1).

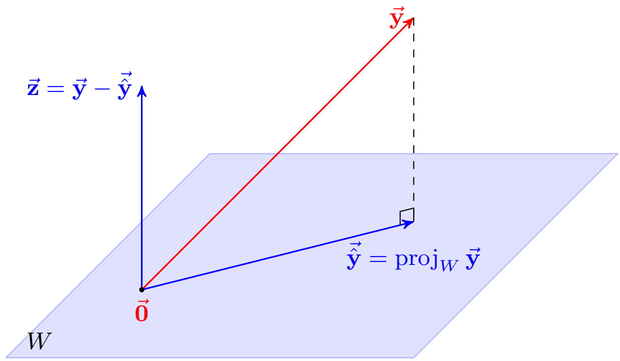


Рис. 5.1. Ортогональна проекція $\vec{\mathbf{y}}$ на W.[1]

Коли $W = L(\vec{\mathbf{u}})$ (лінійна оболонка вектора $\vec{\mathbf{u}}$) є одновимірним підпростором, то формула для $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$ є такою:

$$\hat{\vec{\mathbf{y}}} = \mathrm{proj}_{L(\vec{\mathbf{u}})}\vec{\mathbf{y}} = \frac{\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{u}}}{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}}}\vec{\mathbf{u}}.$$

[1] В подальших рисунках цього розділу вектори будуть зображатись точками, а не направленими відрізками.

Єдиність розкладу (5.1) показує, що ортогональна проекція $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$ залежить тільки від W і не залежить від окремого базису, використаного у (5.2).

Теорема 5.2 (Теорема Піфагора). *Якщо вектори $\vec{\mathbf{u}}$ і $\vec{\mathbf{v}}$ ортогональні, то має місце рівність*

$$||\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}||^2 = ||\vec{\mathbf{u}}||^2 + ||\vec{\mathbf{v}}||^2.$$

Повертаючись до рисунку 5.1, ми можемо записати теорему Піфагора у такому вигляді:

$$||\vec{\mathbf{y}}||^2 = ||\vec{\mathbf{y}} - \hat{\vec{\mathbf{y}}}||^2 + ||\hat{\vec{\mathbf{y}}}||^2.$$

Теорема 5.3 (Теорема про найкращу апроксимацію). *Нехай W є підпростором $\mathbb{R}^n$, $\vec{\mathbf{y}}$ — довільний вектор з $\mathbb{R}^n$, $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$ — ортогональна проекція $\vec{\mathbf{y}}$ на W. Тоді $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$ є найближчим вектором у W до $\vec{\mathbf{y}}$ в тому розумінні, що*

$$||\vec{\mathbf{y}} - \hat{\vec{\mathbf{y}}}|| < ||\vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{v}}|| \tag{5.3}$$

для всіх $\vec{\mathbf{v}}$ з W відмінних від $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$.

Вектор $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$ у теоремі 5.3 називається **найкращою апроксимацією** вектора $\vec{\mathbf{y}}$ елементами W. У наступних параграфах ми будемо обговорювати задачі, де даний вектор $\vec{\mathbf{y}}$ повинен бути замінений або *апроксимований* вектором $\vec{\mathbf{v}}$ у деякому фіксованому підпросторі W. Відстань від $\vec{\mathbf{y}}$ до $\vec{\mathbf{v}}$, задана через $||\vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{v}}||$, може розглядатись як «похибка» при використанні $\vec{\mathbf{v}}$ замість $\vec{\mathbf{y}}$. Теорема 5.3 стверджує, що ця помилка є мінімальною, коли $\vec{\mathbf{v}} = \hat{\vec{\mathbf{y}}}$.

Нерівність (5.3) веде до нового доведення, що $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$ не залежить від конкретного ортогонального базису використаного для його обчислення. Якщо різні ортогональні базиси для W були використані для побудови ортогональної проекції $\vec{\mathbf{y}}$, то ця проекція $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$ повинна також бути найближчою точкою у W до $\vec{\mathbf{y}}$.

Доведення. Візьмемо вектор $\vec{\mathbf{v}}$ з W відмінний від $\hat{\vec{\mathbf{y}}}$ (див. рис. 5.2). Тоді $\hat{\vec{\mathbf{y}}} - \vec{\mathbf{v}}$ належить W. За теоремою 5.1 про ортогональний розклад, $\vec{\mathbf{y}} - \hat{\vec{\mathbf{y}}}$ є ортогональним до W. Зокрема, $\vec{\mathbf{y}} - \hat{\vec{\mathbf{y}}}$

є ортогональним до $\hat{\vec{\mathbf{y}}} - \vec{\mathbf{v}}$ (який належить W). Оскільки

$$\vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{y}} - \hat{\vec{\mathbf{y}}}) + (\hat{\vec{\mathbf{y}}} - \vec{\mathbf{v}}),$$

то за теоремою Піфагора маємо

$$||\vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{v}}||^2 = ||\vec{\mathbf{y}} - \hat{\vec{\mathbf{y}}}||^2 + ||\hat{\vec{\mathbf{y}}} - \vec{\mathbf{v}}||^2.$$

На рисунку 5.2 відмічена довжина кожної сторони трикутника справа. Тепер $||\hat{\vec{\mathbf{y}}} - \vec{\mathbf{v}}||^2 > 0$, оскільки $\hat{\vec{\mathbf{y}}} - \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, звідки одразу встановлюємо нерівність (5.3). □

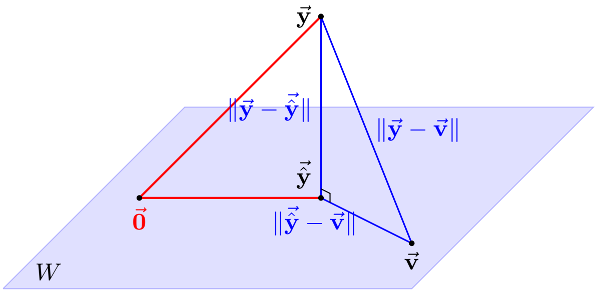


Рис. 5.2. Ортогональна проекція $\vec{\mathbf{y}}$ на W є найближчою точкою у W до $\vec{\mathbf{y}}$.

Якщо $m \times n$ матриця A має лінійно незалежні стовпці $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_n$, то застосувавши процес ортогоналізації Грама[1]–Шмідта[2] з нормуванням до системи векторів $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_n$, отримаємо корисну *факторизацію* матриці A. Ця факторизація широко використовується для різних обчислень.

Теорема 5.4 (QR-факторизація матриці). *Кожна $m \times n$ матриця з лінійно незалежними стовпцями може бути подана у вигляді QR, де Q — $m \times n$ матриця, стовпці якої утворюють ортонормований базис для стовпцевого простору* $\operatorname{Col} A$ *і R є верхньотрикутною матрицею n-го порядку з додатними елементами на її діагоналі.*

[1]Jorgen Pedersen Gram (1850–1916) — датський математик.

[2]Erhard Schmidt (1876–1959) — німецький математик.

1. Апроксимація методом найменших квадратів

Розглянемо несумісну систему m лінійних рівнянь $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ з n невідомими. При заміні вектора $\vec{\mathbf{b}}$ у цій системі на інший вектор з простору $\mathbb{R}^n$ ми можемо отримати сумісну систему (наприклад, при $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$). Виникає питання про можливість заміни вектора $\vec{\mathbf{b}}$ на найближчий до нього вектор з простору $\mathbb{R}^n$. Таку заміну прийнято називати **апроксимацією**.

Приклад 1. У несумісній системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2, \end{cases}$$

замінити стовпець вільних членів на найближчий вектор у $\mathbb{R}^2$ так, щоб отримана система мала розв'язок.

Розв'язання. Головною матрицею коефіцієнтів цієї системи є $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Очевидно, що при заміні стовпця вільних членів на вектор, у якого однакові координати отримаємо сумісну систему.

Як відомо, $\operatorname{Col} A = \{A\vec{\mathbf{x}} \colon \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2\}$ є лінійною оболонкою стовпців матриці A. У даному випадку

$$\operatorname{Col} A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

є бісектрисою першого і третього координатних кутів і вектор $\vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ не лежить на ній. Тоді відстань від точки $(1, 2)$, яку визначає вектор $\vec{\mathbf{b}}$, до довільної точки (y, y) на цій прямій (яка визначається вектором $\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$) знаходиться за формулою $\sqrt{(y-1)^2 + (y-2)^2}$. Ця відстань буде найменшою, коли найменшою буде сума квадратів, яка є підкореневим виразом у формулі. Очевидно також, що найближчою точкою, до точки $(1, 2)$ є її ортогональна проекція на $\operatorname{Col} A$ (див. рис. 5.3).

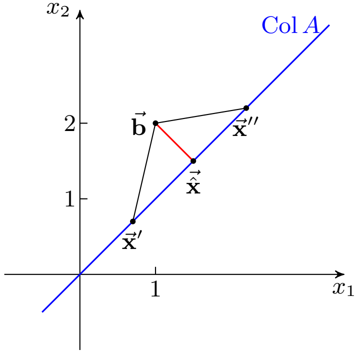


Рис. 5.3. Вектор $\vec{\mathbf{b}}$ є ближчим до $A\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ ніж до $A\vec{\mathbf{x}}$ для іншого $\vec{\mathbf{x}}$

Нехай (a, a) — координати цієї найближчої точки. Тоді за теоремою Піфагора:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{a^2 + a^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(a-1)^2 + (a-2)^2}\right)^2.$$

Після спрощення отримаємо

$$5 = 2a^2 + (a-1)^2 + (a-2)^2, 4a^2 - 6a = 0, \quad a \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\}.$$

Отже, найближча точка на прямій $\mathrm{Col}\,A$ має координати $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ і вона перебуває на відстані $\frac{\sqrt{2}}{4}$ від точки $(1, 2)$. Тому, шуканою заміною є вектор з координатами $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. ■

Аналогічні міркування можна провести для несумісної системи лінійних рівнянь з більшою кількістю рівнянь та невідомих. Однак уявити собі геометрію у такому випадку буде значно важче.

Загальна постановка вказаної задачі для несумісної системи лінійних рівнянь $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ є такою:

Знайти вектор $A\vec{\mathbf{x}}$, *для якого відстань* $||\vec{\mathbf{b}} - A\vec{\mathbf{x}}||$ *є мінімальною.*

Вказану задачу ми називатимемо *найменшо-квадратною* (англ. least squares problem).

Означення 5.1. Нехай A — $m \times n$ матриця, $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$. **Найменшо-квадратним розв'язком** системи $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ є вектор $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ з $\mathbb{R}^n$ такий, що

$$||\vec{\mathbf{b}} - A\hat{\vec{\mathbf{x}}}|| \leqslant ||\vec{\mathbf{b}} - A\vec{\mathbf{x}}||$$

для всіх $\vec{\mathbf{x}}$ з $\mathbb{R}^n$.

Найбільш важливим аспектом найменшо-квадратної задачі є те, що незалежно від того, як ми обираємо вектор $\vec{\mathbf{x}}$, вектор $A\vec{\mathbf{x}}$ обов'язково належатиме стовпцевому простору $\mathrm{Col}\,A$. Ми шукаємо $\vec{\mathbf{x}}$, який робить $A\vec{\mathbf{x}}$ найближчою точкою у $\mathrm{Col}\,A$ до $\vec{\mathbf{b}}$ (див. рис. 5.4).

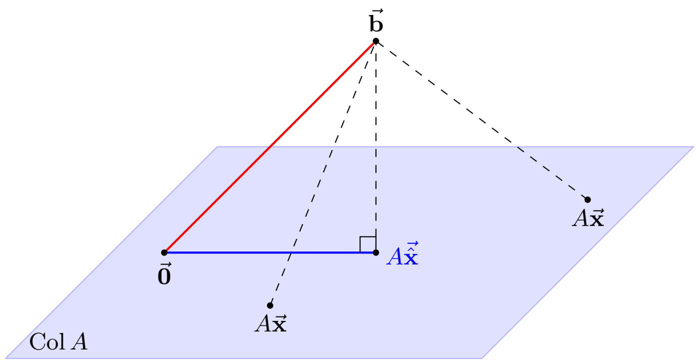


Рис. 5.4. Вектор $\vec{\mathbf{b}}$ є ближчим до $A\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ ніж до $A\vec{\mathbf{x}}$ для іншого $\vec{\mathbf{x}}$.

Звичайно, якщо $\vec{\mathbf{b}}$ належить $\mathrm{Col}\,A$, то система $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ має розв'язок і він є «найменшо-квадратним розв'язком».

У наведеному вище прикладі 1 ми бачили, що найменшо-квадратний розв'язок несумісної системи лінійних рівнянь з двома невідомими існує та його можна обчислити. Цілком природно виникають питання про існування такого розв'язку у будь-якої несумісної системи лінійних рівнянь, їхню кількість та метод його знаходження.

Нехай маємо несумісну систему m лінійних рівнянь з n невідомими, яка у матричній формі має вигляд $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$. Має місце таке твердження.

Теорема 5.5. *Множина найменшо-квадратних розв'язків* $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ *співпадає з непорожною множиною розв'язків системи*

$$A^T A\vec{\mathbf{x}} = A^T\vec{\mathbf{b}}. \tag{5.4}$$

Доведення. Нехай

$$\hat{\vec{\mathbf{b}}} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}A}\vec{\mathbf{b}}.$$

За теоремою 5.3 вектор $\hat{\vec{\mathbf{b}}}$ є найкращою апроксимацією $\vec{\mathbf{b}}$ елементами стовпцевого простору $\mathrm{Col}\,A$.

Тоді $\hat{\vec{\mathbf{b}}}$ належить стовпцевому простору A. Це означає, що система $A\vec{\mathbf{x}} = \hat{\vec{\mathbf{b}}}$ є сумісною і існує $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ у $\mathbb{R}^n$ такий, що

$$A\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \hat{\vec{\mathbf{b}}}. \tag{5.5}$$

Оскільки $\hat{\vec{\mathbf{b}}}$ є найближчою точкою у $\mathrm{Col}\,A$ до $\vec{\mathbf{b}}$, то вектор $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ є найменшо-квадратним розв'язком $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ тоді і тільки тоді, коли $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ задовольняє (5.5). Такий вектор $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ з $\mathbb{R}^n$ має своїми координатами числа, які будуть будувати $\hat{\vec{\mathbf{b}}}$ з стовпців A (див. рис. 5.5).

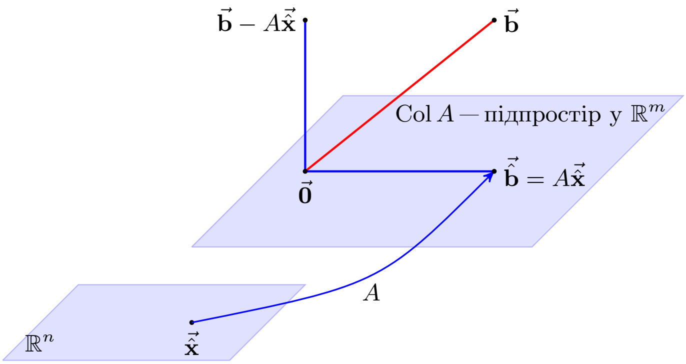


Рис. 5.5. Найменшо-квадратний розв'язок $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ належить $\mathbb{R}^n$.

Припустимо, що $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ задовольняє $A\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \hat{\vec{\mathbf{b}}}$. За теоремою 5.1 про ортогональний розклад $\vec{\mathbf{b}} - \hat{\vec{\mathbf{b}}}$ є ортогональним до $\mathrm{Col}\,A$. Тому

$\vec{\mathbf{b}} - A\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ є ортогональним до кожного стовпця $A = [\vec{\mathbf{a}}_1\ \vec{\mathbf{a}}_2\ \ldots\ \vec{\mathbf{a}}_n]$. Для довільного стовпця $\vec{\mathbf{a}}_j$ матриці A $\vec{\mathbf{a}}_j \cdot (\vec{\mathbf{b}} - A\hat{\vec{\mathbf{x}}}) = 0$, тобто $\vec{\mathbf{a}}_j^T(\vec{\mathbf{b}} - A\hat{\vec{\mathbf{x}}}) = 0$. Оскільки кожний $\vec{\mathbf{a}}_j^T$ є рядком у A^T, то

$$A^T(\vec{\mathbf{b}} - A\hat{\vec{\mathbf{x}}}) = \vec{\mathbf{0}}. \tag{5.6}$$

Тому

$$A^T\vec{\mathbf{b}} - A^TA\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \vec{\mathbf{0}},$$
$$A^TA\hat{\vec{\mathbf{x}}} = A^T\vec{\mathbf{b}}.$$

Ці обчислення показують, що кожний найменшо-квадратний розв'язок рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ задовольняє рівняння

$$A^TA\vec{\mathbf{x}} = A^T\vec{\mathbf{b}}. \tag{5.7}$$

Отже, множина найменшо-квадратних розв'язків є непорожньою і кожний такий розв'язок $\hat{\mathbf{x}}$ задовольняє рівняння (5.7).

Припустимо, що $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ задовольняє $A^TA\vec{\mathbf{x}} = A^T\vec{\mathbf{b}}$. Тоді $\hat{\mathbf{x}}$ задовольняє (5.6), яке показує, що $\vec{\mathbf{b}} - A\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ ортогональний до рядків A^T, і тому ортогональний до стовпців A. Оскільки стовпці A породжують $\operatorname{Col} A$, то вектор $\vec{\mathbf{b}} - A\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ є ортогональним до всіх векторів з $\operatorname{Col} A$. Тому рівність

$$\vec{\mathbf{b}} = A\hat{\vec{\mathbf{x}}} + (\vec{\mathbf{b}} - A\hat{\vec{\mathbf{x}}})$$

є розкладом $\vec{\mathbf{b}}$ на суму вектора з $\operatorname{Col} A$ і вектора, ортогонального до $\operatorname{Col} A$. За єдиністю ортогонального розкладу $A\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ повинен бути ортогональною проекцією $\vec{\mathbf{b}}$ на $\operatorname{Col} A$. Тобто, $A\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \hat{\vec{\mathbf{b}}}$ і $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ є найменшо-квадратним розв'язком. Таким чином, теорема доведена повністю. $\square$

Матричне рівняння (5.4) представляє собою систему рівнянь, які називаються **нормальними рівняннями** для $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$. Розв'язок системи (5.4) часто позначають через $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$.

Коли найменшо-квадратний розв'язок $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ використано для створення $A\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ як апроксимації до $\vec{\mathbf{b}}$, то відстань від $\vec{\mathbf{b}}$ до $A\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ називається **найменшо-квадратною похибкою** цієї апроксимації.

З першої частини доведення останньої теореми випливає таке твердження.

Наслідок. *Несумісна система завжди має найменшо-квадратний розв'язок.*

Приклад 2. Знайти найменшо-квадратний розв'язок $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ системи з прикладу 1 та найменшо-квадратну похибку цієї апроксимації.

Розв'язання. Для матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ маємо $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Тоді

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тому рівняння $A^T A\vec{\mathbf{x}} = A^T\vec{\mathbf{b}}$ стає таким

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

або

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Загальним розв'язком цієї системи є $x_1 = x_2 + \frac{3}{2}$ з вільною змінною x_2. Тоді найменшо-квадратний розв'язок дорівнює

$$\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

При цьому найближчим вектором до $\vec{\mathbf{b}}$ у $\operatorname{Col} A$ є

$$A\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\vec{\mathbf{b}} - A\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

і найменшо-квадратна помилка такої апроксимації дорівнює $||\vec{\mathbf{b}} - A\hat{\vec{\mathbf{x}}}|| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (порівняйте з отриманим раніше результатом у прикладі 1). ■

У розглянутому нами прикладі матриця $A^T A$ не є оборотною і система мала безліч найменшо-квадратних розв'язків.

Наступна теорема дає корисний критерій для встановлення, коли існує тільки один найменшо-квадратний розв'язок несумісної системи $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

Теорема 5.6. *Матриця A^TA є оборотною тоді і тільки тоді, коли стовпці A є лінійно незалежними. У цьому випадку рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ має тільки один найменшо-квадратний розв'язок $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ і він задається формулою*

$$\hat{\vec{\mathbf{x}}} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{\mathbf{b}}. \tag{5.8}$$

Приклад 3. Знайти найменшо-квадратний розв'язок рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ та } \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Стовпці матриці A лінійно незалежні. Тоді найменшо-квадратний розв'язок можна знайти за формулою (5.8). Виконаємо необхідні обчислення.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix};$$

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Нарешті

$$\hat{\vec{\mathbf{x}}} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{\mathbf{b}} = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 4 & -20 & -4 \\ -4 & 16 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} -184 \\ 168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{7} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$. ■

Зауваження. Формула (5.8) для $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ є корисною, в основному, для теоретичних досліджень. При ручних обчисленнях вона зручна тільки тоді, коли $A^T A$ є оборотною матрицею другого порядку.

Існують інші способи обчислення найменшо-квадратних розв'язків.

Наступний приклад показує, як знайти найменшо-квадратний розв'язок системи $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, коли стовпці A є ортогональними.

Приклад 4. Знайти найменшо-квадратний розв'язок $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ при

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки стовпці $\vec{\mathbf{a}}_1$ і $\vec{\mathbf{a}}_2$ матриці A є ортогональними, то ортогональна проекція $\vec{\mathbf{b}}$ на $\operatorname{Col} A$ задається так (дивись теорему 5.1):

$$\hat{\vec{\mathbf{b}}} = \frac{\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}}_1}{\vec{\mathbf{a}}_1\cdot\vec{\mathbf{a}}_1}\vec{\mathbf{a}}_1 + \frac{\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}}_2}{\vec{\mathbf{a}}_2\cdot\vec{\mathbf{a}}_2}\vec{\mathbf{a}}_2 = \frac{8}{4}\vec{\mathbf{a}}_1 + \frac{45}{90}\vec{\mathbf{a}}_2; \tag{5.9}$$

$$\hat{\vec{\mathbf{b}}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1/2 \\ 7/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5/2 \\ 11/2 \end{bmatrix}$$

Тепер, коли $\hat{\vec{\mathbf{b}}}$ відомо, ми можемо розв'язати $A\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \hat{\vec{\mathbf{b}}}$. Але це тривіально, оскільки ми уже знаємо, що коефіцієнти у (5.9) є компонентами $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$. Отже,

$$\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 8/4 \\ 45/90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

■

У деяких випадках нормальні рівняння для найменшо-квадратних задач можуть бути *погано обумовлені*; тобто маленькі помилки у обчисленнях елементів A^TA можуть іноді спричиняти відносно великі помилки у розв'язку $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$. Якщо стовпці A є лінійно незалежними, то найменшо-квадратний розв'язок часто може бути обчисленим більш надійно за допомогою QR-розкладу (QR-факторизації) матриці A.

Теорема 5.7. *Для заданої $m \times n$ матриці A з лінійно незалежними стовпцями нехай $A = QR$ є її QR-факторизацією (див. теорему 5.4). Тоді для кожного вектора $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ має єдиний найменшо-квадратний розв'язок, заданий формулою*

$$\hat{\vec{\mathbf{x}}} = R^{-1}Q^T\vec{\mathbf{b}}. \tag{5.10}$$

Доведення. Нехай $\hat{\vec{\mathbf{x}}} = R^{-1}Q^T\vec{\mathbf{b}}$. Тоді

$$A\hat{\vec{\mathbf{x}}} = QR\hat{\vec{\mathbf{x}}} = QRR^{-1}Q^T\vec{\mathbf{b}} = QQ^T\vec{\mathbf{b}}.$$

За теоремою 5.4, стовпці Q утворюють ортонормальний базис для $\operatorname{Col} A$. Тому $QQ^T\vec{\mathbf{b}}$ є ортогональною проекцією $\hat{\vec{\mathbf{b}}}$ вектора $\vec{\mathbf{b}}$ на $\operatorname{Col} A$. Тоді рівність $A\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \hat{\vec{\mathbf{b}}}$ показує, що $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ є найменшо-квадратний розв'язок $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$. Єдиність $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ слідує з теореми 5.6. □

Зауваження. Оскільки R у теоремі 5.7 є верхньотрикутною, то $\hat{\vec{\mathbf{x}}}$ може бути обчислено як розв'язок рівняння

$$R\hat{\vec{\mathbf{x}}} = Q^T\hat{\vec{\mathbf{b}}}. \tag{5.11}$$

Іноді швидше розв'язати (5.11) зворотною підстановкою або рядковими перетвореннями, ніж обчислювати R^{-1} і застосовувати (5.10).

Приклад 5. Знайти найменшо-квадратний розв'язок $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ для

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Стовпці матриці A є лінійно незалежними (перевірте це!). Застосувавши до них процес ортогоналізації Грама–Шмідта та пронормувавши знайдені вектори, ми отримаємо стовпці матриці Q. Оскільки $Q^TQ = I$ тому, що стовпці Q ортонормальні, то матриця $R = Q^TA$. Провівши ці обчислення, отримаємо:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \text{ та } R = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Шукана QR-факторизація матриці A:

$$A = QR = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$Q^T\vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Найменшо-квадратний розв'язок задовольняє $R\vec{\mathbf{x}} = Q^T\vec{\mathbf{b}}$, тобто

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Це матричне рівняння розв'язати легко і маємо $\vec{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$. ■

Вправи

1. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ на лінійну оболонку векторів $\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ та $\vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Знайти QR-факторизацію матриці

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Знайти найменшо-квадратний розв'язок рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ та } \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Обчислити найменшо-квадратну похибку, асоційовану з найменшо-квадратним розв'язком, знайденим у вправі 3.

5. Знайти найменшо-квадратний розв'язок рівняння $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, використавши задану QR-факторизацію матриці:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ та } \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Лінійна регресія

У процесі проведення різного виду експериментальних досліджень доводиться накопичувати велику кількість даних і після цього опрацьовувати їх. Загальним завданням тоді є аналіз взаємозалежностей серед декількох величин, які змінюються. Такого типу аналізи вивчаються у математичній статистиці. Одним з типів аналізу, який застосовується при цьому є регресії різних видів (лінійна, багатовимірна або мультилінійна, мультиваріативна і т.д.). Для більш глибокого ознайомлення з різного типу регресіями пропонуємо сучасний підручник з економетрики [9].

Нехай у результаті проведення деякого експерименту (фізичного, астрономічного, хімічного, біологічного, екологічного і т. ін.) отримали ряд даних $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, які зобразили на координатній площині. У результаті отримали деяку розсіяну діаграму точок. Припустимо, що ці точки лежать неширокою стрічкою вздовж деякої уявної прямої. Тоді можна використати для дослідження цих даних просту лінійну регресію.

Лінійна регресія використовується для обчислення параметрів (коефіцієнтів) рівняння першого степеня відносно змінних y і x. Вираз **проста лінійна регресія** застосовується до досліджень, у яких є одна незалежна змінна x. Рівняння (або модель) для простої лінійної регресії має вигляд:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Таким є рівняння прямої (тому її названо *лінійною*), яка перетинає розсіяні точки деяким оптимальним шляхом і дозволяє обчисленням оцінити значення $\hat{y}$ (ординати на розсіяній діаграмі) для будь-якого значення абсциси x. Параметр β_0 оцінює перетин регресивної лінії з віссю ординат. Параметр β_1 характеризує кутовий коефіцієнт прямої регресії. Він також називається *регресивним коефіцієнтом*.

Коли використовується такий тип регресії, то слід бути впевненим у тому, що це є справді *лінійна модель*. Іншими словами, ми виходимо з припущення, що залежність між змінними буде адекватно описано прямою і, що вертикальна дисперсія (розсіяність, відхилення) спостережених значень вище і нижче прямої є результатом випадкового процесу. Різниця між спостережним і обчисленим (оціночним) значеннями позначається $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ та для кожного спостереження i вона може бути додатною або від'ємною, оскільки спостережені дані точки можуть лежати вище або нижче регресивної лінії. Число ε_i називається *помилкою* спостереження y_i після підгонки регресивною прямою. Включення ε_i у рівняння дозволяє описати точно значення ординати y_i для кожної точки (x_i, y_i) з множини даних. Число y_i дорівнює значенню $\hat{y}_i$ передбаченому регресивним рівнянням плюс помилка ε_i:

$$y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$

Це рівняння є лінійною моделлю взаємозв'язку. Число $\hat{y}_i$ є передбаченим або підігнаним значенням, відповідним кожному спостереженню i. Модель припускає, що відхиленням від лінійного функціонального взаємозв'язку є тільки вертикальні різниці («помилки») ε_i на значенні y_i залежної змінної і не існує помилки, пов'язаної з обчисленням x. «Помилка» є традиційним терміном, який використовується статистиками для відхилень різного типу випадкових процесів від прогнозованих.

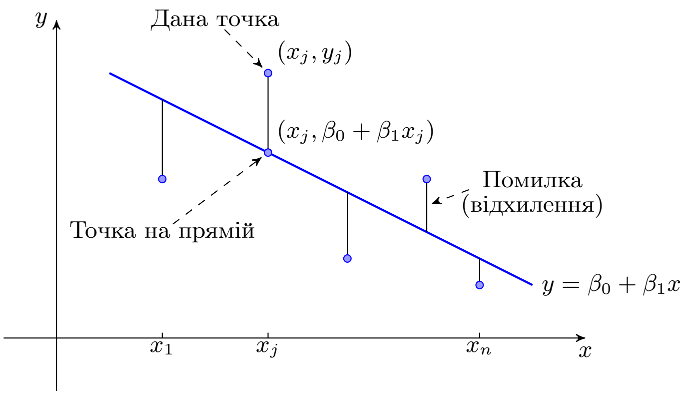


Рис. 5.6. Підгонка прямої до експериментальних даних.

На практиці, якщо відомо за гіпотезою (або у результаті вивчення розсіяної діаграми), що взаємозв'язок між двома змінними нелінійний, то можна спробувати лінеаризувати його або використати поліноміальні або нелінійні регресивні методи для моделі взаємозв'язку.

Таким чином, **метою дослідження є знаходження таких параметрів β_0 і β_1, щоб пряма $y = \beta_0 + \beta_1 x$ знаходилась в певному розумінні якомога ближче до даних експериментальних точок.**

Існує декілька шляхів виміряти наскільки «близько» пряма віддалена від даних. Звичайним вибором (переважно тому, що обчислення є простішими) є обчислення суми квадратів помилок. Вибір «найближчої» прямої при цьому означає мінімізацію суми

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2.$$

Після підстановки значень відхилень у цю суму отримаємо:

$$(y_1 - \hat{y}_1)^2 + \ldots + (y_n - \hat{y}_n)^2 =$$
$$= (y_1 - (\beta_0 + \beta_1 x_1))^2 + \ldots + (y_n - (\beta_0 + \beta_1 x_n))^2.$$

Проаналізуємо останню суму. Для цього введемо позначення, які вживаються у математичній статистиці:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$X\vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ \beta_0 + \beta_1 x_2 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 x_n \end{bmatrix}$$

і система рівнянь $X\vec{\beta} = \vec{\mathbf{y}}$ є несумісною, оскільки $\hat{y}_i \neq y_i$ для деяких i. В той же час, квадрат відстані $||X\vec{\beta} - \vec{\mathbf{y}}||$ між векторами $X\vec{\beta}$ і $\vec{\mathbf{y}}$ є в точності сумою квадратів залишків. Отже, значення $\vec{\beta}$, яке мінімізує відстань між $X\vec{\beta}$ і $\vec{\mathbf{y}}$ також мінімізує записану вище суму. Тому *обчислення найменшо-квадратного розв'язку системи рівнянь $X\vec{\beta} = \vec{\mathbf{y}}$ еквівалентне знаходженню вектора $\hat{\vec{\beta}}$, який визначає регресивну пряму.* Такий метод знаходження вектора $\hat{\vec{\beta}}$, який визначає регресивну пряму $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$, називають у статистиці **методом найменших квадратів**, а його координати — *коефіцієнтами регресії.* Визначену вектором $\hat{\vec{\beta}}$ таку пряму називають **лінією регресії y на x.**

Якщо в процесі дослідів можливі помилки вимірів змінної x, а не y, то просто замінюємо координати даних (x_j, y_j) перед нанесенням точок і обчисленням регресивної прямої. Якщо обидві координати є предметом можливих помилок, то можна вибрати пряму, яка мінімізує суму квадратів відстаней від точок до прямої.

Як відомо з попереднього параграфа вектор $\vec{\beta}$ є розв'язком системи нормальних рівнянь $X^T X\vec{\beta} = X^T\vec{\mathbf{y}}$. Оскільки

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n & x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \end{bmatrix},$$

$$X^T X\vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} n\beta_0 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\beta_1 \\ \beta_0(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\beta_1 \end{bmatrix}$$

та

$$X^T\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + \ldots + y_n \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \end{bmatrix},$$

то остання система набуває вигляд

$$\begin{cases} n\beta_0 + \beta_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n, \\ \beta_0(x_1 + \cdots + x_n) + \beta_1(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \end{cases}$$

Далі, якщо ввести позначення

$$\sum x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \sum x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\sum y = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \sum xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

то система нормальних рівнянь може бути записана так:

$$\begin{cases} n\beta_0 + \beta_1 \sum x = \sum y, \\ \beta_0 \sum x + \beta_1 \sum x^2 = \sum xy. \end{cases}$$

В останньому вигляді ця система частіше зустрічається у статистиці. Крім цього, статистики вводять вектор помилок $\vec{\varepsilon} = \vec{\mathbf{y}} - X\vec{\beta}$. Його координатами є помилки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Тоді загальне рівняння простої лінійної регресії має вигляд

$$\vec{\mathbf{y}} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}.$$

При підгонці даних спостережень іншими лініями (не прямими) буде змінюватися матриця X. Вона називається **матрицею плану**. Коли X і $\vec{\mathbf{y}}$ визначені, то метою є мінімізувати довжину $\vec{\varepsilon}$, яка досягається знаходженням найменшоквадратного розв'язку рівняння $X\vec{\beta} = \vec{\mathbf{y}}$. У цьому випадку найменшо-квадратний розв'язок $\hat{\vec{\beta}}$ є розв'язком нормальних рівнянь

$$X^T X\vec{\beta} = X^T\vec{\mathbf{y}}.$$

Зауваження. У статистиці використовують такі позначення:

SS(R)=$||X\hat{\vec{\beta}}||^2 = ||\hat{\vec{\mathbf{y}}}||^2$ — сума квадратів значень регресії;

SS(E)=$||\vec{\mathbf{y}} - X\hat{\vec{\beta}}||^2$ — сума квадратів помилок (відхилень);

SS(T)=$||\vec{\mathbf{y}}||^2$ — сума квадратів y-значень[1].

При таких позначеннях теорема Піфагора у статистиці (дивись, наприклад, [9]) приймає вигляд:

$$\text{SS(T)}=\text{SS(R)}+\text{SS(E)}.$$

Приклад 1. Нехай у результаті експерименту отримані точки на декартовій площині $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 0)$. Знайти рівняння $y = \beta_0 + \beta_1 x$ лінії регресії y на x.

Розв'язання. У даному випадку матриця плану:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad \vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

[1]SS(R) — від «sum of squares for regression»; SS(E) — від «sum of the squares for error»; SS(T) — від «total sum of squares».

Тоді

$$X^TX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{bmatrix}.$$

$$X^T\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Нормальні рівняння:

$$\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Тому

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 74 & -16 \\ -16 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 172 \\ -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}3 \\ -0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Отже, лінія регресії y на x є $y = 4{,}3 - 0{,}71x$. ■

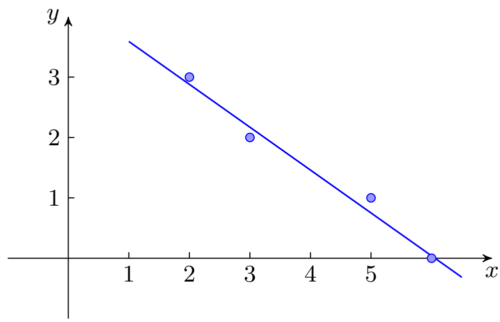


Рис. 5.7. Лінія регресії y на x є $y = 4{,}3 - 0{,}71x$.

Загальною практикою перед обчисленням лінійної регресії є знаходження середнього $\bar{x}$ початкових x-значень і утворення нової змінної $x^* = x - \bar{x}$. Говорять, що нові x-дані пербувають у **формі середнього відхилення**. У цьому випадку два стовпці матриці плану будуть ортогональними і розв'язання нормальних рівнянь значно спрощується.

Приклад 2. Знайти рівняння $y = \beta_0 + \beta_1 x$ лінії регресії y на x, яка найкраще підганяє дані точки $(2, 1)$, $(5, 2)$, $(7, 3)$, $(8, 3)$.

Розв'язання. Тут $\bar{x} = 5{,}5$. Тоді $x_1^* = x_1 - 5{,}5 = -3{,}5$, $x_2^* = -0{,}5$, $x_3^* = 1{,}5$, $x_4^* = 2{,}5$. При цих даних:

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 & -3{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \\ 1 & 1{,}5 \\ 1 & 2{,}5 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad \vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Тоді $y = \beta_0 + \beta_1(x^* + 5{,}5)$, тобто $y = (\beta_0 + 5{,}5\beta_1) + \beta_1 x^*$. Тому

$$\vec{\beta}^* = \begin{bmatrix} \beta_0 + 5{,}5\beta_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}.$$

Для розв'язання рівняння $X^*\vec{\beta}^* = \vec{\mathbf{y}}$ знайдемо розклад вектора $\vec{\mathbf{y}}$ за стовпцями матриці X^*:

$$\vec{\mathbf{y}} = \frac{9}{4}\vec{\mathbf{x}}_1 + \frac{5}{14}\vec{\mathbf{x}}_2,$$

де $\vec{\mathbf{x}}_1$ та $\vec{\mathbf{x}}_2$ є стовпці матриці X^*. Тоді

$$\vec{\beta}^* = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}.$$

Отже, $\beta_1 = \frac{5}{14}$ та $\beta_0 + 5{,}5\beta_1 = \frac{9}{4}$. Підставивши у останню рівність значення $\beta_1 = \frac{5}{14}$, отримаємо

$$\beta_0 = \frac{9}{4} - 5{,}5\beta_1 = \frac{2}{7}.$$

Таким чином, лінія регресії y на x:

$$y = \frac{2}{7} + \frac{5}{14}x.$$

■

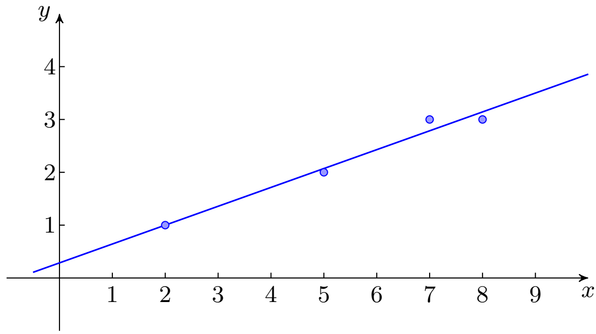


Рис. 5.8. Лінія регресії y на x $y = \frac{2}{7} + \frac{5}{14}x$.

Підгонка даних спостережень іншими кривими.

Часто у результаті спостережень нанесені на декартову площину точки $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ досить розсіяні і не лежать близько до будь-якої прямої. Виникає питання про підгонку таких точок іншими кривими. Якщо для підгонки даних використовуються функції, які мають загальну форму

$$y = \beta_0 f_0(x) + \beta_1 f_1(x) + \dots + \beta_k f_k(x),$$

де $f_0, \dots, f_k$ — відомі функції, $\beta_0, \dots, \beta_k$ — невідомі параметри, то така модель також є лінійною. Це пов'язано з тим, що всі параметри входять у вказану форму у першому степені. Виявляється, що і в такому випадку для знаходження найкращої кривої можна використати просту лінійну регресію. Продемонструємо це на наступному прикладі.

Приклад 3. Нехай маємо дані спостережень

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

і вони розміщені на декартовій площині так, що дещо нагадують нам параболу. Тоді поставимо завдання знайти найкращу апроксимацію цих даних за допомогою квадратичної функції

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2.$$

Розв'язання. Підставимо значення незалежної змінної $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у цю функцію. У результаті отримаємо значення, які швидше всього будуть відрізнятися від спостережених даних $y_1, y_2, \ldots, y_n$ для $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тоді для кожної точки (x_i, y_i), $(1 \leqslant i \leqslant n)$ можна записати рівність

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i,$$

де ε_i є різницею між спостереженим і прогнозованим значенням для незалежної змінної x_i. Таким чином, ми отримаємо систему рівностей

$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \varepsilon_1, \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 + \varepsilon_2, \\ \ldots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_n + \beta_2 x_n^2 + \varepsilon_n. \end{cases}$$

Фактично ми отримали систему з n лінійних рівнянь з трьома невідомими параметрами і потрібно знайти їх так, щоб загальна помилка була найменшою, тобто сума

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2$$

повинна бути найменшою.

Введемо такі позначення:

$$\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix}, \; \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \; \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Зрештою ми знову приходимо до рівняння

$$\vec{\mathbf{y}} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}.$$

Найменшо-квадратний розв'язок несумісної системи $\vec{\mathbf{y}} = X\vec{\beta}$ є шуканою найкращою апроксимацією даних спостережень за допомогою квадратичної функції. ■

Вправи

1. Знайти рівняння $y = \beta_0 + \beta_1 x$ лінії регресії y на x, яка найкраще підганяє дані точки $(1, 0), (2, 1), (4, 2), (5, 3)$.

2. Звичайний експеримент забезпечує дані

$$(1; 1{,}8), (2; 2{,}7), (3; 3{,}4), (4; 3{,}8), (5; 3{,}9).$$

Описати модель, яка створює найменшо-квадратну підгонку цих точок за допомогою функції виду

$$f(x) = \beta_1 x + \beta_2 x^2.$$

А. Задати матрицю плану, спостережний вектор і невідомий параметричний вектор.

Б. Знайти асоційовану найменшо-квадратну криву для даних.

Така функція може виникати, наприклад, як прибуток від продажу x одиниць товару, коли кількість товару, що запропоновано для продажу, впливає на ціну, яка буде поставлена на товар.

3. Проста крива, яка часто дає хорошу модель для різноманітних цін компаній, як функція рівня продаж x, має форму $f(x) = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$. Вільного члена немає тому, що фіксовані ціни не включено.

А. Задати матрицю плану і параметричний вектор для лінійної моделі, яка веде до найменшо-квадратної підгонки записаного вище рівняння з даними $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Б. Знайти найменшо-квадратну криву записаного вище вигляду для підгонки даних $(4; 1{,}58)$, $(6; 2{,}08)$, $(8; 2{,}5)$, $(10; 2{,}8)$, $(12; 3{,}1)$, $(14; 3{,}4)$, $(16; 3{,}8)$, $(18; 4{,}32)$ зі значеннями у тисячах. Зобразити дані точки і графік кубічної апроксимації на координатній площині.

4. Звичайний експеримент забезпечує дані $(1; 7{,}9), (2; 5{,}4)$ і $(3; -0{,}9)$. Описати модель, яка створює найменшо-квадратну підгонку цих точок за допомогою функції вигляду

$$y = A \cos x + B \sin x.$$

5. Дано множину точок $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$ і $(5, 1)$.

А. Знайти пряму, яка найкраще підганяє ці точки.

Б. Знайти квадратичну криву, яка найкраще підганяє ці точки.

В. На вашу думку, яка з ліній — пряма чи парабола — дає краще наближення до даних? Чому?

6. Для вимірювання злітної характеристики літака горизонтальна позиція літака була виміряна кожної секунди з $t = 0$ до

$t = 12$. Позиції (у футах[1]) були такими: 0; 8,8; 29,9; 62,0; 104,7; 159,1; 222,5; 380,4; 471,1; 571,1; 686,8; 809,2.

А. Знайти найменшо-квадратну кубічну криву $y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$ для цих даних.

Б. Використати результати п. А для оцінки швидкості літака в момент часу $t = 4{,}5$ секунди.

3. Багатовимірна регресія та зважені найменші квадрати

Багатовимірна регресія.

Природним узагальненням моделі простої лінійної регресії з двома змінними є багатовимірна регресійна модель (модель множинної регресії).

У процесі різних досліджень доводиться мати справу з кількома незалежними змінними, які впливають на результат. У процесі вимірювання кожної з них допускаються свої помилки. Методи апроксимації, які застосовуються у таких випадках називають багатовимірними регресіями. У загальному вигляді така модель має форму

$$y = \beta_0 f_0(x_1, \ldots, x_k) + \beta_1 f_1(x_1, \ldots, x_k) + \cdots + \beta_k f_k(x_1, \ldots, x_k) + \varepsilon_k, \tag{5.12}$$

де $x_1, \ldots, x_k$ — незалежні змінні та $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ — невідомі параметри. Як і у випадку простої лінійної регресії мета апроксимації залишається такою самою: підібрати невідомі параметри $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ так, щоб різниця між спостереженими і очікуваними даними була найменшою.

Як і у випадку однієї незалежної змінної доводиться теорема Гаусса–Маркова про те, що найкращу апроксимацію для цієї моделі дає розв'язок $\hat{\vec{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T \vec{\mathbf{y}}$ системи нормальних рівнянь для несумісної системи рівнянь $X\vec{\beta} = \vec{\mathbf{y}}$ при умові, що матриця $X^T X$ є оборотною (дивись [9]).

Проілюструємо багатовимірну модель на прикладі моделі з двома незалежними змінними.

[1] 1 фут=30,48 см.

Припустимо, що експеримент залучає дві незалежних змінних u і v та одну залежну змінну y. Просте рівняння для прогнозу y від u і v має форму

$$y = \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 v. \tag{5.13}$$

Більш загальне прогнозне рівняння має форму

$$y = \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 u^2 + \beta_4 uv + \beta_5 v^2. \tag{5.14}$$

Ці рівняння використовуються у геології, наприклад, для моделі ерозії поверхні, льодовикових зон, забруднення ґрунтів та ін. У таких випадках, найменшо-квадратна підгонка називається *поверхневою тенденцією.*

Рівняння (5.13) і (5.14) ведуть до лінійної моделі тому, що вони є лінійними відносно невідомих параметрів (навіть не дивлячись на добуток u і v). Взагалі, лінійна модель буде виникати завжди, коли y буде прогнозуватися рівнянням виду

$$y = \beta_0 f_0(u, v) + \beta_1 f_1(u, v) + \cdots + \beta_k f_k(u, v),$$

де $f_0, \dots, f_k$ — відомі функції довільного виду, $\beta_0, \dots, \beta_k$ — невідомі параметри.

Приклад 1. У географії локальні моделі місцевості конструюються з даних $(u_1, v_1, y_1), \dots, (u_n, v_n, y_n)$, де u_j, v_j і y_j є широтою, довготою і висотою, відповідно. Описати лінійну модель, що базується на (5.13), яка дає найменшо-квадратну підгонку до таких даних. Розв'язок називається *найменшо-квадратною площиною* (див. рис. 5.9).

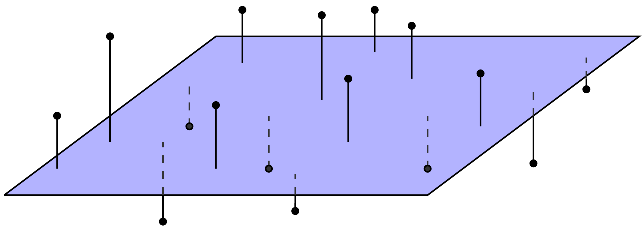


Рис. 5.9. Найменшо-квадратна площина.

Розв'язання. Ми очікуємо, що дані задовольняють наступним рівнянням:

$$\begin{gathered} y_1 = \beta_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 \nu_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 u_2 + \beta_2 \nu_2 + \varepsilon_2, \\ \vdots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 u_n + \beta_2 \nu_n + \varepsilon_n. \end{gathered}$$

Ця система має матричну форму $\vec{\mathbf{y}} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}$, де

$$\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{— спостережний вектор,}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & \nu_1 \\ 1 & u_2 & \nu_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_n & \nu_n \end{bmatrix} \text{— матриця плану,}$$

$$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \text{— параметричний вектор,}$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \text{— вектор помилок (відхилень).}$$

■

Приклад 1 показує, що лінійна модель для множинної регресії має таку ж абстрактну форму, як модель для простої регресії у попередніх прикладах. Лінійна алгебра дає нам силу для розуміння загальних принципів, які стоять позаду всіх лінійних моделей. Як тільки X визначена правильно, то нормальні рівняння для $\vec{\beta}$ мають аналогічну матричну форму, не дивлячись на те скільки змінних залучено. Тому, для будь-якої багатовимірної моделі, де $X^T X$ є оборотною, найменшо-квадратний розв'язок $\hat{\vec{\beta}}$ задається так: $(X^T X)^{-1} X^T \vec{\mathbf{y}}$.

Зважені найменші квадрати.

У процесі проведення експериментів може виявитися так, що довіра до вимірювань проведених у різний час або у різних точках не однакова. Іншими словами, одним даним ми довіряємо більше ніж іншим. Це може трапитися також і з довірою до приладів, якими проводиться вимірювання. На декартовій площині розсіювання таких даних буде набагато більшим у порівнянні з іншими точками. Виникає питання про врахування таких огріхів у процесі знаходження найкращої апроксимації.

До цих пір при розгляді арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$ ми розглядали стандартний скалярний добуток векторів. Це був приклад найпростішого евклідового векторного простору. Але з курсу лінійної алгебри відомо, що скалярний добуток можна задавати різними способами. Тоді ми отримуємо інші евклідові векторні простори. Наприклад, у просторі $\mathbb{R}^2$ скалярний добуток векторів $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ та $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ можна визначити так:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}^T \vec{\mathbf{v}} = 2u_1v_1 + 3u_2v_2.$$

Тоді можна записати рівність

$$||\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}|| = 2(u_1 - v_1)^2 + 3(u_2 - v_2)^2,$$

яка дає підказку як поступити у тих випадках, коли ми менше довіряємо деяким даним експерименту.

Нехай ми отримали ряд даних експерименту $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, для яких маємо такі коефіцієнти довіри: $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Ці числа є додатними. Визначимо тепер у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ скалярний добуток так:

$$\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = \omega_1 x_1 y_1 + \omega_2 x_2 y_2 + \cdots + \omega_n x_n y_n. \tag{5.15}$$

Тоді

$$\mathrm{SS(E)} = ||\vec{\varepsilon}||^2 = ||\vec{\mathbf{y}} - \hat{\vec{\mathbf{y}}}||^2 = \omega_1^2(y_1 - \hat{y}_1)^2 + \cdots + \omega_n^2(y_n - \hat{y}_n)^2. \tag{5.16}$$

Нехай W — діагональна матриця з (додатними) $\omega_1, \ldots, \omega_n$ на її діагоналі, тоді

$$W\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 y_1 \\ \omega_2 y_2 \\ \vdots \\ \omega_n y_n \end{bmatrix}.$$

Помітимо, що j-ий доданок у (5.16) може бути записаний як

$$w_j^2 (y_j - \hat{y}_j)^2 = (w_j y_j - w_j \hat{y}_j)^2.$$

Це означає, що SS(E) у (5.16) є квадратом довжини у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ з скалярним добутком (5.15) вектора $W\vec{\mathbf{y}} - W\vec{\hat{\mathbf{y}}}$, який ми записуємо як $||W\vec{\mathbf{y}} - W\vec{\hat{\mathbf{y}}}||^2$.

Тепер припустимо, що апроксимаційний вектор $\vec{\hat{\mathbf{y}}}$ буде побудовано з стовпців матриці плану WX. Тоді ми знайдемо $\vec{\hat{\beta}}$ такий, що робить $WX\vec{\hat{\beta}} = W\vec{\hat{\mathbf{y}}}$ якомога ближчим до $\vec{\mathbf{y}}$. При цьому вимірюванні близькості зваженою помилкою є:

$$||W\vec{\mathbf{y}} - W\vec{\hat{\mathbf{y}}}||^2 = ||W\vec{\mathbf{y}} - WX\hat{\beta}||^2.$$

Тому $\vec{\hat{\beta}}$ є найменшо-квадратний розв'язок рівняння

$$WX\vec{\hat{\beta}} = W\vec{\mathbf{y}}.$$

Нормальні рівняння для найменшо-квадратного розв'язку мають вигляд

$$(WA)^T (WA)\vec{\beta} = (WA)^T W\vec{\mathbf{y}}.$$

Приклад 2. Знайти пряму $y = \beta_0 + \beta_1 x$, яка найкраще підганяє дані $(-2, 0), (-1, 0), (0, 2), (1, 4), (2, 4)$ у двох випадках:

А. Всі дані мають однакову надійність.

Б. Вважаючи, що перша і остання точки є наполовину надійніші у порівнянні з іншими.

Розв'язання. Як і у попередньому параграфі запишемо:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

А. Нескладні обчислення показують, що

$$X^T X = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad X\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

і система нормальних рівнянь є такою:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Наближений розв'язок нормального рівняння (з точністю до двох цифр): $\beta_0 = 2$ і $\beta_1 = 1{,}2$. Таким чином, лінія регресії y на x є

$$y = 2 + 1{,}2x.$$

Б. Для зваженого найменшо-квадратного розв'язку задачі виберемо W з діагональними елементами 1, 2, 2, 2 і 1. Помножимо зліва на W матрицю X і вектор $\vec{\mathbf{y}}$:

$$WX = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad W\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Для нормального рівняння обчислимо

$$(WX)^T WX = \begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad (WX)^T W\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 26 \\ 20 \end{bmatrix}$$

і розв'яжемо нормальне рівняння

$$\begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок нормального рівняння є (з точністю до двох цифр) $\beta_0 = 1{,}98$ і $\beta_1 = 1{,}67$. Отже, при таких умовах очікувана пряма має рівняння

$$y = 1{,}98 + 1{,}67x.$$

Пропонуємо зобразити ці дві прямі на рисунку самостійно і порівняти їх. ■

На завершення цієї теми пропонуємо зацікавленому читачу звернутися до посібника [10], у якому викладено також застосування найменшо-квадратних задач до аналізу тенденцій у вимірюванні даних та апроксимації за допомогою рядів Фур'є.

Вправи

1. Бюджетне обстеження впродовж року п'яти випадково вибраних сімей дало такі результати (у тис. гривень):

Сім'я	Заощадження, y	Прибуток, u	Майно, v
1	3,0	40	60
2	6,0	55	36
3	5,0	45	36
4	3,5	30	15
5	1,5	30	90

Розгляньте регресію у формі $y = \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 v$, та дайте відповіді на такі завдання.

а) Оцінити регресію y на u і v.

б) Спрогнозуйте заощадження сім'ї, яка має прибуток 40 тисяч гривень і майно на суму 25 тисяч гривен.

в) Припустимо, що прибуток сім'ї зріс на 10 тисяч гривен у той час, коли вартість майна не зросла. Оцінити, як зростуть її заощадження.

г) Оцінити, як зростуть заощадження сім'ї, якщо її прибуток зріс на 5 тисяч гривен, а вартість майна зросла 15 тисяч гривен.

д) Знайти суму квадратів відхилень (помилок).

2. Знайти пряму $y = \beta_0 + \beta_1 x$, яка найкраще підганяє дані $(-2, 3)$, $(-1, 5)$, $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$. Відомо, що помилки у вимірах y-значень останніх двох даних точок більші ніж у інших точках. Довіра до цих даних складає половину від довіри до решти даних. Якою буде лінія регресії y на x, якщо взяти коефіцієнти довіри рівними 2, 2, 2, 1, 1? Порівняйте отримані результати.

3. Повернемося до даних у вправі 6 з попереднього параграфа на сторінці 226, що стосуються злітних характеристик літака. Припустимо, що помилки можливих вимірів стали більшими при зростанні швидкості. Нехай W — діагональна матриця, діагональними елементами якої є $1; 1; 1; 0{,}9; 0{,}9; 0{,}8; 0{,}7; 0{,}6; 0{,}5; 0{,}4; 0{,}3; 0{,}2; 0{,}1$. Знайти кубічну криву, яка підганяє дані з мінімальною зваженою найменшоквадратною помилкою і використати її для оцінки швидкості літака, коли $t = 4{,}5$ секунди.

Література

1. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел / С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Б. І. Хацет. — К. : Вища школа, 1974. — Ч. 1. — 464 с.
2. Завало С. Т. Алгебра и теория чисел / С. Т. Завало, В. Н. Костарчук, Б. И. Хацет. — К. : Вища школа, 1974. — Ч. 1. — 400 с.
3. Калужнін Л. А. Лінійні простори / Л. А. Калужнін, В. А. Вишенський, Ц. О. Шуб. — К. : Вища школа, 1971. — 344 с.
4. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел / Л. Я. Куликов. — М. : Высшая школа, 1979. — 559 с.
5. Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : Наука, 1974. — 296 с.
6. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. — М. : 1966. — 280 с.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Физматгиз, 1967. — 576 с.
8. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховничий, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2009. — 224 с.
9. Магнус Я. Р. Эконометрика / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. — М. : «Дело», 2004. — 576 с.

10. Lay D. C. Linear Algebra and its Applications, 3-rd ed. / D. C. Lay. — Boston, 2005. — 560 p.
11. Hefferon J. Linear Algebra / J. Hefferon. — Saint Michael's College Colchester, Vermont, 2008. — 445 p.
12. Poole D. Linear Algebra: A Modern Introduction, 2-nd ed. / D. Poole. — Brooks/Cole, 2006. — 712 p.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

РОКІЦЬКИЙ Іван Олександрович
ПАНАСЕНКО Олексій Борисович

Застосування лінійної алгебри

Навчальний посібник