Сергій Бак, Галина Ковтонюк, Сергій Шацовний

ІСНУВАННЯ КВАЗІПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В ДИСКРЕТНИХ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

Анотація. *У статті вивчаються дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера з нелокальною взаємодією. Встановлено умови існування квазіперіодичних біжучих хвиль в таких рівняннях. Для цього використано метод критичних точок.*

Ключові слова: *дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера, нелокальна взаємодія, квазіперіодичні біжучі хвилі, критичні точки.*

Однією з найзахопливіших областей прикладної математики є вивчення динаміки поширення інформації. Когерентні структури, такі як солітони, кінки, вихори тощо, відіграють ключову роль як носії енергії у багатьох нелінійних фізичних системах. Сфери їх застосування включають нелінійну оптику, зокрема, динаміку спрямованих хвиль у неоднорідних оптичних структурах та фотонних кристалах, атомну фізику, динаміку крапель конденсату Бозе-Ейнштейна (БЕК) у періодичних потенціалах, фізику конденсованих середовищ, зокрема, системи джозефсонівських контактів, та біофізику з її різними моделями подвійної спіралі ДНК. Аналіз і моделювання цих фізичних ситуацій базуються на нелінійних еволюційних рівняннях, які виводяться з основних фізичних законів, таких як нелінійні рівняння Максвелла з періодичними коефіцієнтами. Зокрема, системи нелінійних рівнянь Шредінгера другого порядку, як неперервні, так і дискретні, використовуються у нелінійній фізиці для розв'язування ряду експериментальних та теоретичних задач. Просторова нелокальність також природно проявляється в описі БЕК, де вона відображає скінченний діапазон взаємодії між бозонами. Вимоги до математичних методів для аналізу цих моделей найкраще задовольняються шляхом розробки спеціалізованих методик, які дозволяють визначати локальну поведінку розв'язків поблизу таких структур. Дискретність простору, тобто існування основної просторової ґрати, є критично важливою для структурної стабільності цих просторово локалізованих нелінійних збуджень.

Дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера належать до широкого класу дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем. До таких систем також належать дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона та системи типу Фермі-Пасти-Улама. Важливими класами розв'язків таких систем є біжучі і стоячі хвиль. В працях [1-4; 7-9; 11-13; 16] вивчалися біжучі і стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона та системах типу Фермі-Пасти-Улама з локальною взаємодією. Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама з нелокальною взаємодією вивчались в працях [5; 6; 17]. В статтях [14; 15; 18-20] вивчалися стоячі хвилі в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера з локальною взаємодією, а в статті [10] – біжучі хвилі в дискретних рівняннях типу Шредінгера з нелокальною взаємодією з кубічною нелінійністю та її узагальненням.

У цій статті вивчаються дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера з нелокальною взаємодією:

$$i\dot{\psi}_n = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \Delta_j \psi_n + f(|\psi_n|^{2p})\psi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де $\psi_n = \psi_n(t) \in \mathbb{C}$ – хвильова функція, $\Delta_j \psi_n \coloneqq \psi_{n+j} + \psi_{n-j} - 2\psi_n$ є одновимірними дискретними операторами Лапласа. Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку. Зауважимо, що в системі (1) розглядається більш загальна нелінійність, ніж в [10].

Всюди далі припускається, що виконуються такі умови:

(i) $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ для $\mathbb{R}^+ \coloneqq [0, \infty)$, $f(0) = 0$ і $a_j \in \mathbb{R}$ з $\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty$;

(ii) *існують сталі* $s > 0$, $\mu > 1$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ і $\overline{r} > 0$ *такі, що*

$$|f(r)| \le c_1(r^s + 1), \qquad c_2(r^{s+1} - 1) \le F(r), \qquad \mu F(r) - \overline{r} < f'(r)r$$

для будь-якого $r \ge 0$, де $F(r) = \int_0^r f(z)\,dz$. *Крім того,* $\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{f(r)}{r^{\tilde{s}}} < \infty$ *для деякої сталої* $\tilde{s} > 0$.

Звичайно, ми припускаємо, що не всі a_j дорівнюють нулю. Зазначимо, що будь-який поліном $f(r) = p_1 \mathrm{r} + \cdots + p_s r^s,\ s \in \mathbb{N}$ з $p_s > 0$ задовольняє ці умови. Крім того, рівняння (1) можна переписати в стандартній формі:

$$i\dot{\psi}_n = \sum_{m \neq n} a_{|m-n|} |\psi_m - \psi_n|^2 + f(|\psi_n|^{2p})\psi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Добре відомо, що (2) зберігає два динамічні інваріанти:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi_n|^2 \ - \ \text{норма},$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{1}{2} \sum_{m \neq n} a_{|m-n|} |\psi_m - \psi_n|^2 + F(|\psi_n|^{2p}) \right] - \ \text{енергія}.$$

Нас цікавлять розв'язки системи (2) у вигляді біжучих хвиль:

$$\psi_n(t) = u(n - ct), \tag{3}$$

де функція $u(z)$ називається профілем хвилі ($z = n - ct$), а стала $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – її швидкістю, з квазіперіодичною профільною функцією $u(z)$, тобто такою, що задовольняє умову

$$u(z + T) = e^{2\pi r i} u(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Підставляючи біжучу хвилю (3) в систему (2), одержуємо рівняння:

$$ciu' + \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \Delta_j u(z) + f(|u(z)|^{2p}) u(z) = 0, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

де $\Delta_j u(z) \coloneqq u(z + j) + u(z - j) - 2u(z)$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) \coloneqq 4 \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \sin^2 \left[\frac{x}{2} j \right].$$

Зауваження 1. Очевидно, що $\Phi \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}), \Phi$ є непарною, $\Phi(2\pi k) = 0$ для будь-якого $(k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, і$(\Phi(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Якщо $\sum_{j \in \mathbb{N}} j |a_j| < \infty$, то $\Phi \in C(R, R)$, і якщо $\sum_{j \in \mathbb{N}} j^2 |a_j| < \infty$, то $\Phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Відповідно, область визначення функції $\Phi(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ є або відрізком $[-\overline{R}, \overline{R}]$ або інтервалом $(-\overline{R}, \overline{R})$ з можливістю $\overline{R} = \infty$.

За допомогою методу критичних точок встановлено такий результат:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(i), (ii)$ *і* $T > 0$. *Тоді для майже кожного* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *і будь-якого раціонального* $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, *існує ненульовий розв'язок рівняння (5), який задовольняє умову (4). Більше того, для будь-якого* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *існує не більше, ніж скінченна кількість чисел* $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \dots, \overline{r_m} \in (0,1)$, *таких, що для будь-якого* $r \in (0,1) \setminus \{\overline{r_1}, \overline{r_2}, \dots, \overline{r_m}\}$ *існує ненульовий квазіперіодичний розв'язок рівняння (5). Зокрема, для будь-якого* $|c| > \overline{R}$ *і* $r \in (0,1)$, *існує такий ненульовий квазіперіодичний розв'язок у вигляді біжучої хвилі.*

Таким чином, у цій статті встановлено умови існування квазіперіодичних біжучих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера з нелокальною взаємодією.

Список використаних джерел:

1. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators. Communications in Mathematical Analy-sis. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19-26.
2. Bak S. Periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a twodi-mensional lattice. Acta Mathematica Universitatis Comenianae. 2022. Vol. 91, № 3. P. 225-234.
3. Bak S. Periodic traveling waves in the system of linearly coupled nonlinear oscillators on 2D lattice. Archivum Mathematicum. 2022. Vol. 58, № 1. P. 1-13.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Periodic traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2d-lattice. Mat. Stud. 2023. Vol. 60, № 2. P. 180-190.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Solitary traveling waves in Ferm-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2D-lattice. Український математичний вісник. 2024. Т. 21, № 1. С. 1-15.
6. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
7. Bates P.W., Zhang C. Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst*. 2006. Vol. 16, № 1. P. 235-252.
8. Braun O.M., Kivshar Y.S. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model. *Physics Repts*. 1998. Vol. 306. P. 1-108.
9. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel-Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.
10. Fečkan M., Rothos V. Traveling Waves of Discrete Nonlinear Shrödinger Equations with Nonlocal Interactions. Applicable Analysis. 2010. Vol. 89, № 9. P. 1387-1411.
11. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 2013. Vol. 33, №6. P. 2389-2401.

12. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*, 2006. Vol. 216. P. 327-345.

13. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 205-211.

14. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*, 2006. Vol. 19. P. 27–40.

15. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*. 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.

16. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. London-Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.

17. Pankov A. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam chains with nonlocal interaction. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2019. Vol. 12, № 7. P. 2097-2113.

18. Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A*, 2008. Vol. 464. P. 3219–3236.

19. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2017. Вип. 16. С. 21-29.

20. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії*, 2010. Т. 33, №1. С. 78–84.

EXISTENCE OF QUASI PERIODIC TRAVELING WAVES IN DISCRETE NONLINEAR SCHRÖDINGER-TYPE EQUATIONS

Abstract. *The article studies discrete nonlinear Schrödinger-type equations with nonlocal interactions. Conditions for the existence of quasi periodic traveling waves in such equations are established. The critical points method is used for this purpose.*

Keywords: *discrete nonlinear Schrödinger-type equations, nonlocal interaction, quasi periodic traveling waves, critical points.*