Сергій Бак, Галина Ковтонюк, Сергій Шацовний

ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ В ЛАНЦЮГАХ ОСЦИЛЯТОРІВ ІЗ НАСИЧУВАНИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Анотація. *У статті вивчаються рівняння нескінченних ланцюгів лінійно зв’язаних нелінійних осциляторів із насичуваними нелінійностями. Встановлено умови існування стоячих хвиль в таких рівняннях. Для цього використано варіаційний метод і метод періодичних апроксимацій.*

Ключові слова: *ланцюг осциляторів, стоячі хвилі, варіаційний метод, метод періодичних апроксимацій, насичувані нелінійності.*

Вступ. Зазначимо, що під осциляторами розуміють системи, які здійснюють коливання. Вони можуть бути знайдені у багатьох фізичних системах, включаючи механічні, електричні та оптичні. Осцилятори є важливими моделями у наукових дослідженнях, оскільки вони можуть бути використані для опису різноманітних явищ, від атомів до галактик.

Найпростішим прикладом осцилятора є гармонічний осцилятор, що складається з маси, яка знаходиться на пружині та коливається з певною частотою. Рух гармонічного осцилятора описується диференціальним рівнянням другого порядку, яке називається рівнянням гармонічного осцилятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

де x – відхилення маси від положення рівноваги, ω_0 – кутова частота коливань.

Існує безліч типів осциляторів, які можна розглядати з різних точок зору, проте загалом їх можна поділити на дві основні категорії: лінійні (гармонічні) та нелінійні (ангармонічні) осцилятори.

Ланцюг зв'язаних осциляторів – це група осциляторів, які зв’язані між собою. В таких ланцюгах можуть виникати біжучі та стоячі хвилі.

Стояча хвиля – це хвиля, яка при будь-якій фазі коливань не поширюється (локалізована) у просторі. Характерною особливістю стоячої хвилі є наявність у ній вузлів (точок, у яких амплітуда хвилі дорівнює нулю) та пучностей (точок, у яких амплітуда максимальна), причому положення вузлів і пучностей залишається незмінним у просторі. Стояча хвиля утворюється в результаті накладання двох когерентних біжучих хвиль з однаковими амплітудами, які поширюються назустріч одна одній.

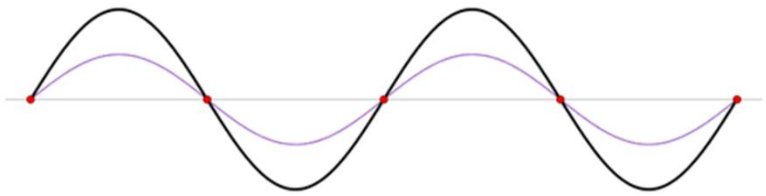

Рис. 1. Стояча хвиля

У *біжучій хвилі* (яка поширюється в просторі зі скінченною швидкістю) відбувається перенесення енергії, а в стоячій хвилі через площини, в яких розташовані вузли, енергія не перетікає.

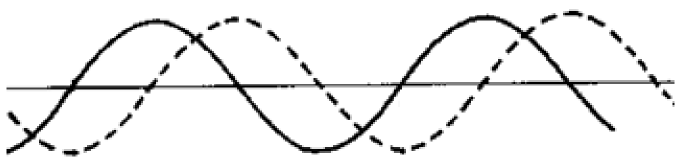

Рис. 2. Біжуча хвиля

Метою цієї статті є встановлення умов існування стоячих хвиль в нескінченному ланцюзі лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів із насичуваними нелінійностями.

Зауважимо, що в статтях [1-3; 5-7; 9; 10] досліджено питання існування біжучих хвиль різних видів в системах осциляторів. В статтях [4; 12-16] досліджувалось питання існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера. Питання існування і стійкості стоячих хвиль для рівнянь ланцюгів осциляторів з іншими видами нелінійностей вивчалося в працях [8; 11; 17; 18].

Постановка задачі та основні припущення. Будемо розглядати рівняння

$$\ddot{q}_n - a_n q_{n+1} - a_{n-1} q_{n-1} - b_n q_n + \frac{\mu |q_n|^2}{1 + |q_n|^2} q_n = 0, \qquad (1)$$

де $\mu \neq 0, a_n, b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$.

Стояча хвиля є розв'язком, який має вигляд

$$q_n = u_n \exp(-i\omega t), \tag{2}$$

де $u_n \in \mathbb{R}$ – амплітуда, а ω – частота стоячої хвилі. Тоді

$$\ddot{q}_n = i^2 w^2 u_n \exp(-i\omega t) = -w^2 u_n \exp(-i\omega t),$$

$$|\exp(-i\omega t)| = 1, \qquad |q_n| = |u_n|.$$

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (1), одержуємо рівняння

$$-\omega^2 u_n - a_n u_{n+1} - a_{n-1} u_{n-1} - b_n u_n + \frac{\mu |u_n|^2}{1 + |u_n|^2} u_n = 0, \tag{3}$$

Позначимо через $Au_n = a_n u_{n+1} - a_{n-1} u_{n-1} - b_n u_n$. Тоді рівняння (3) набуде вигляду

$$Au_n + \omega^2 u_n = \frac{\mu |u_n|^2}{1 + |u_n|^2} u_n. \tag{4}$$

Подібні рівняння є цікавими з огляду на численні фізичні застосування. Особливо цікавими є рівняння вигляду (4) з оператором

$$(Au)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + (2 + v_n) u_n = -\triangle u_n + v_n u_n,$$

де $\triangle u_n = u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n$ — одновимірний дискретний оператор Лапласа і v_n – задана дійсна послідовність (потенціал). Такі оператори виникають, наприклад, у нелінійній оптиці.

Далі будемо розглядати більш загальне рівняння

$$Au_n + \omega^2 u_n = f(u_n) \tag{5}$$

із деякою нелінійністю f та два види його розв'язків, які задовольняють відповідно умови

$$u_{n+k} = u_n, \tag{6}$$

$$\lim_{n \to \pm\infty} u_n = 0. \tag{7}$$

Позначимо через $F(t)$ є первісну функцію для функції $f(t)$, тобто $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ і припустимо, що виконуються такі умови:

(a) *Послідовності* (a_n), (b_n) *дійсних чисел N-періодичні, тобто* $a_{n+N} = a_n, b_{n+N} = b_n$ *і нижньою межею спектра оператора A є число* 0;

(b) $f(t) = o(t), t \to 0$ і $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{f(t)}{t} = l < \infty$;

(c) $f \in C^1(R)$ *і* $f(t)t < f'(t)t^2, t \neq 0$;

(d) $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}f(t)t - F(t)\right) = \infty$.

Основні результати. За допомогою варіаційного методу і методу періодичних апроксимацій одержано такі результати:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (a)-(d) і* $l - \omega^2 > 0,\ \omega \neq 0$. *Тоді для будь-якого* $k \geq 2$ *рівняння (5) має нетривіальний* k*-періодичний розв'язок* $u^{(k)}$*, який задовольняє умову (6). Крім того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (5) має два нетривіальних розв'язки* $\pm u^{(k)}$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (a)-(d) і* $l - \omega^2 > 0,\ \omega \neq 0$. *Тоді рівняння (5) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$*, який задовольняє умову (7). Крім того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (5) має два нетривіальних розв'язки* $\pm u$.

Теорема 3. *Нехай виконується умова* (a) і $\mu - \omega^2 > 0,\ \omega \neq 0$. *Тоді для будь-якого* $k \geq 2$ *рівняння (4) має два нетривіальних розв'язки* $\pm u^{(k)}$*, які задовольняють умову (6).*

Теорема 4. *Нехай виконується умова* (a) *і* $\mu - \omega^2 > 0,\ \omega \neq 0$. *Тоді рівняння (4) має два нетривіальних розв'язки* $\pm u \in l^2$*, які задовольняють умову (7).*

Таким чином, у цій статті встановлено умови існування стоячих хвиль в ланцюгах осциляторів із насичуваною нелінійністю.

Список використаних джерел:

1. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217, № 2 (August). P. 187-197.
2. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2019. Vol. 52, № 2. P. 176-184.
3. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry*. 2018. Vol. 14, № 1. P. 16-26.
4. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
5. Bates P.W., Zhang C. Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst*. 2006. Vol. 16, № 1. P. 235-252.

6. Braun O.M., Kivshar Y.S. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model. *Physics Repts*. 1998. Vol. 306. P. 1-108.

7. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel-Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.

8. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 2013. Vol. 33, №6. P. 2389-2401.

9. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*, 2006. Vol. 216. P. 327-345.

10. Kreiner C. F., Zimmer J. Travelling wave solutions for the discrete sine–Gordon equation with nonlinear pair interaction. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*. 2009. Vol. 70, № 9. P. 3146–3158.

11. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 205-211.

12. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*, 2006. Vol. 19. P. 27–40.

13. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*. 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.

14. Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A*, 2008. Vol. 464. P. 3219–3236.

15. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2017. Вип. 16. С. 21-29.

16. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії*, 2010. Т. 33, №1. С. 78–84.

17. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць*. 2021. Вип. 22. С. 5-19.

18. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика та інформатика.* Том 39, № 2. 2021. С. 7-21.

EXISTENCE OF STANDING WAVES IN THE CHAINS OF OSCILLATORS WITH SATURABLE NONLINEARITIES

Abstract. *The article studies the equations of infinite chains of linearly coupled nonlinear oscillators with saturable nonlinearities. The conditions for the existence of standing waves in such equations have been established. For this, the variational method and the method of periodic approximations were used.*

Keywords: *chain of oscillators, standing waves, variational method, method of periodic approximations, saturable nonlinearities.*