Сергій Бак, Галина Ковтонюк, Богдан Лисак

ПЕРІОДИЧНІ БІЖУЧІ ХВИЛІ В СИСТЕМАХ ТИПУ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА ІЗ НАСИЧУВАНИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Анотація. *У статті встановлено умови існування періодичних біжучих хвиль в системі типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійностями на двовимірній ґратці.*

Ключові слова: *система Фермі-Пасти-Улама, двовимірна ґратка, періцодичні біжучі хвилі, критичні точки, насичувані нелінійності.*

Розглянемо систему типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n,m}(t) &= W_1'(q_{n+1,m}(t)-q_{n,m}(t)) - W_1'(q_{n,m}(t)-q_{n-1,m}(t)) + \\ &+ W_2'(q_{n,m+1}(t)-q_{n,m}(t)) - W_2'(q_{n,m}(t)-q_{n,m-1}(t)), (n,m)\in\mathbb{Z}^2,\end{aligned} \tag{0}$$

де $q_{n,m}(t)$ – координата (n,m)- ї частинки в момент часу t, $W_1, W_2 \in C^1(\mathbb{R})$ – потенціали взаємодії сусідніх частинок. Будемо вивчати такі системи із так званими *насичуваними нелінійностями.* Це означає, що на нескінченності $W_i'(r)$ ростуть як $const\cdot r$, тобто потенціали $W_i(r)$ є асимптотично квадратичними на нескінченності $(i=1,2)$.

Будемо шукати розв'язки системи (1) у вигляді біжучих хвиль:

$$q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct), \tag{0}$$

де $\vec{l}(\cos\varphi,\sin\varphi)$ – *фіксований хвильовий вектор*, який задає напрям поширення хвилі. Нагадаємо, що функція $u(s)$ неперервного аргументу $s\in\mathbb{R}$ називається *профілем* біжучої хвилі. Стала c представляє собою *швидкість* хвилі. Якщо $c>0,$ то хвиля зміщується вправо, якщо $c<0,$ то вліво. Підставляючи біжучу хвилю (2) в систему (1), для профілю $u(s)$ біжучої хвилі маємо рівняння

$$\begin{aligned}c^2u''(s) &= W_1'(u(s+\cos\varphi)-u(s)) - W_1'(u(s)-u(s-\cos\varphi)) + \\ &+ W_2'(u(s+\sin\varphi)-u(s)) + W_2'(u(s)-u(s-\sin\varphi)),\end{aligned} \tag{0}$$

де $s = n\cos\varphi + n\sin\varphi - ct.$

Всюди далі під розв'язком рівняння (3) розуміється функція $u\in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}),$ яка задовольняє це рівняння.

Періодична хвиля має періодичні профілі відносних зміщень, тобто періодичну похідну профілю:

$$u'(s+2k) = u'(s), s\in\mathbb{R}\,, \tag{0}$$

де $k>0$ – деяке число. Нагадаємо, що профіль такої хвилі не обов'язково періодичний.

Всюди далі припускається, що виконуються такі умови:

(i) $W_i(r) = \dfrac{c_i^2}{2}r^2 + f_i(r),$ *де* $c_i \in\in \mathbb{R},$ $f_i\in C^1(\mathbb{R}),$ *причому* $f_i(0)=f_i'(0)=0$ *і* $f_i'(r)=o(r)$ *при* $r\to 0,$ $i=1,2;$

(ii) *існує скінченна границя* $\lim\limits_{r\to\pm\infty}\dfrac{f_i'(r)}{r}=l$ *та функції* $g_i(r)=f_i'(r)-l$ *обмежені* $(i=1,2);$

(iii) $f_i(r)\ge 0$ *для всіх* $r\in\mathbb{R}$ *і для будь-якого* $r_0>0$ *існує* $\delta_0=\delta_0(r_0)>0$ *таке, що*

$$\frac{1}{2}rf_i'(r) - f_i(r) \ge \delta_0$$

для $|r| \ge r_0$ $(i=1,2)$.

Зауваження 1. *Зроблені припущення зокрема означають, що функції* $f_i(r)$ *зростаючі при* $r \ge 0$ *і спадні при* $r \le 0$, *а* $G_i(r) < 0$ *для всіх* $r \ne 0$, $i=1,2$.

Для спрощення записів покладемо

$$h_i(r) := f_i'(r) = lr + g_i(r),\ i=1,2,$$

та

$$G_i(r) := \int_0^r g_i(\rho)d\rho,\ i=1,2,$$

і додатково припустимо, що виконується одна з двох умов:

(iv_2) $G_i(r) \to -\infty$ *при* $r \to \pm\infty$ $(i=1,2)$;

або

(v_2) $c^2\left(\dfrac{\pi n}{k}\right)^2 - 4\left(c_1^2+l\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi n}{2k}\cos\varphi\right) - 4\left(c_2^2+l\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi n}{2k}\sin\varphi\right) \ne 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$.

Позначимо через E_k гільбертів простір

$$E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u'(s+2k) = u'(s),\ u(0)=0\}$$

зі скалярним добутком

$$(u,v)_k = \int_{-k}^{k} u'(s)v'(s)ds$$

і відповідною нормою $\|u\|_k = (u,u)^{\frac{1}{2}}$. Нагадаємо, що за теоремою вкладення

$$E_k \subset C([-k,k]),$$

де $C([-k,k])$ – простір неперервних функцій на $[-k,k]$. Через $\|\cdot\|_{k,*}$ позначимо норму на просторі E_k^*, який є спряженим (дуальним) до простору E_k. Фактично E_k є 1-ковимірним підпростором гільбертового простору

$$\tilde{E}_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u'(s+2k) = u'(s)\}$$

із

$$\int_{-k}^{k} u'(s)v'(s)ds + u(0)v(0)$$

у якості скалярного добутку. На цьому просторі означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s+\cos\varphi) - u(s) = \int_s^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s+\sin\varphi) - u(s) = \int_s^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau.$$

Ці оператори є обмеженими лінійними операторами, зо задовольняють нерівності (див.|3|, Лема 6.1)

$$\|Au\|_{L^\infty(-k,k)} \le l_1(k)\cdot\|u\|_k,\ \|Au\|_{L^2(-k,k)} \le |\cos\varphi|\cdot\|u\|_k,$$

$$\|Bu\|_{L^\infty(-k,k)} \le l_2(k)\cdot\|u\|_k,\ \|Bu\|_{L^2(-k,k)} \le |\sin\varphi|\cdot\|u\|_k,$$

де

$$l_1(k)=\begin{cases}|\cos\varphi|\sqrt{\left[\dfrac{1}{2k}\right]+1}, & 0<2k<1,\\ |\cos\varphi|, & 2k\ge 1,\end{cases}$$

та

$$l_2(k)=\begin{cases}|\sin\varphi|\sqrt{\left[\dfrac{1}{2k}\right]+1}, & 0<2k<1,\\ |\sin\varphi|, & 2k\ge 1,\end{cases}$$

де $\left[\dfrac{1}{2k}\right]$ – ціла частина $\dfrac{1}{2k}$.

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u)=\int_{-k}^{k}\left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2-\frac{c_1^2}{2}(Au(s))^2-\frac{c_2^2}{2}(Bu(s))^2-f_1(Au(s))-f_2Bu(s))\right]ds. \quad (0)$$

Зауваження 2. *Неважко переконатися, що* J_k *– функціонал класу* C_1 *на* E_k*, а його похідна визначається формулою*

$$\langle J_k'(u),h\rangle=\int_{-k}^{k}\left[c^2u'(s)h'(s)-c_1^2Au(s)Ah(s)-c_2^2Bu(s)Bh(s)-\right.$$
$$\left.-f_1'(Au(s))Ah(s)-f_2'(Bu(s))\,Bh(s)\right]ds$$

для $u,h\in E_k$*. Більше того, критичні точки функціоналу* J_k *є розв'язками рівняння (3), що задовольняють умову (4).*

Таким чином, для встановлення існування розв'язків рівняння (3), що задовольняють умову (4), достатньо довести існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Для цього використано спеціальну форму теореми про гірський перевал (див. |1,2|).

Далі нам знадобиться така величина:

$$c_0=c_0(\varphi):=\sqrt{c_1^2\cos^2\varphi+c_2^2\sin^2\varphi}.$$

Основним результатом статті є теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$ *та* (iv) *або* (v). *Тоді, якщо* $\varphi\in\left[\pi n,\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$, $k>0$ *і* $c_0^2<c^2<c_0^2+l$, *то рівняння (3) має несталі як неспадні, так і незростаючі розв'язки, які задовольняють умову (4).*

Таким чином, у статті встановлено існування періодичних біжучих хвиль з неспадними і незростаючими профілями в системі типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійностями.

Список використаних джерел

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D*. 1997. Vol. 103. P. 201–250.
2. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
3. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75–87.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, № 5 (January). P. 453-462.

5. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen*. 2006. Vol. 39. P. 4955–4984.
6. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonliniear problems. *Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-1940*. 1955. Reprinted in Lect. Appl. Math. 1974. Vol. 15. 156 p.
7. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices. London–Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
8. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці: дис....докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
9. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірпній ґратці. *Математичні студії.* 2011. Т. 35, № 1. С. 60-65.
10. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірпній ґратці. *Математичні студії.* 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.

PERIODIC TRAVELING WAVES IN FERMI-PASTA-ULAM TYPE SYSTEMS WITH SATURABLE NONLINEARITIES ON A TWO-DIMENSIONAL LATTICE

Abstract. *The article establishes the conditions for the existence of periodic traveling waves in a system of the Fermi-Pasta-Ulam type with saturable nonlinearities on a two-dimensional lattice.*
Keywords: *Fermi-Pasta-Ulam system, two-dimensional lattice, periodic traveling waves, critical points, saturable nonlinearities.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

1. Прізвище, ім'я, по-батькові Лисак Богдан Володимирович
2. Науковий ступінь, вчене звання, посада, місце роботи (для викладачів) / Курс, спеціальність, місце навчання (для студентів): 1 курс (магістратура),
   111 Математика, ВДПУ.
3. Назва статті «Періодичні біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійностями на двовимірній ґратці ».
4. Контактний телефон 0966053843
5. E-mail bogdan140799@gmail.com
6. Науковий керівник: науковий ступінь, вчене звання, посада, місце роботи (для студентів)