ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

Факультет математики, фізики, комп'ютерних наук і технологій

Кафедра математики та інформатики

ДИПЛОМНА РОБОТА

на тему: **«МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»**

Студентки 2 курсу ММ групи

Освітньої програми Математика

Спеціальності 111 Математика

Галузі знань 11 Математика та статистика

Ступеня вищої освіти магістр

Ігнатко Віти Василівни

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент Бак Сергій Миколайович

Розширена шкала__________________________

Кількість балів: _____ Оцінка: ECTS ________

Голова комісії_______ _________________

(підпис) (ініціали, прізвище)

Члени комісії _____________ ______________________

(підпис) (ініціали, прізвище)

_____________ ______________________

(підпис) (ініціали, прізвище)

_____________ ______________________

(підпис) (ініціали, прізвище)

Вінниця 2020

АНОТАЦІЯ

У дипломній роботі описано класичні хвильові нелінійні рівняння, які мають солітонні розв'язки: рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння синус-Ґордона.

Розкрито зміст методу оберненої задачі розсіювання вивчаються нелінійні хвильові рівняння, які розв'язуються за допомогою методу оберненої задачі розсіювання. Наведено застосування методу оберненої задачі розсіювання до розв'язування класичних нелінійних рівнянь.

Ключові слова: рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння синус-Ґордона, метод оберненої задачі розсіювання.

Тема дипломної роботи англійською мовою: Group properties of the Bargman-Michel-Telegdi system of differential equations

ANNOTATION

: The method of the inverse scattering problem and its application

The thesis describes the classical wave nonlinear equations that have soliton solutions: the Corteweg de Vries equation, the nonlinear Schrödinger equation, the sine-Gordon equation.

The content of the method of the inverse scattering problem is revealed. Nonlinear wave equations are studied, which are solved by the method of the inverse scattering problem. The application of the method of the inverse scattering problem to the solution of classical nonlinear equations is presented.

Keywords: Korteweg-de Vries equation, non-linear Schrödinger equation, sine-Gordon equations, inverse scattering method.

Зміст

ВСТУП

При описі багатьох фізичних, хімічних, біологічних та багатьох інших процесів і явищ, які оточують нас у реальному житті використовуються нелінійні математичні моделі на основі нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Детальне дослідження нелінійних математичних моделей є надзвичайно важливим для розуміння фізичної природи та особливостей таких процесів і явищ. Одним з найважливіших прийомів їх дослідження є пошук можливих аналітичних розв’язків.

Побудувати точну математичну певного процесу не легко, проте складнішим завданням є знайдення правильного розв’язку поставленої задачі. Завдяки розробленим новітнім аналітичним методам розв’язання нелінійних еволюційних рівнянь у частинних похідних досягнуто значного прогресу у даному напрямку.

Розрізняють нелінійні рівняння, що мають точні розв’язки і рівняння, які не мають точних розв’язків. Перші з них називаються повністю інтегрованими нелінійними еволюційними рівняннями, або рівняннями, що мають точні N-солітонні розв’язки.

Характерною особливістю цих рівнянь є існування розв’язків у вигляді відокремлених хвиль (солітонів). Виявляється, що солітонні розв’язки можна отримати не лише для однієї відокремленої хвилі, а й для довільної кількості відокремлених хвиль, що рухаються з різними швидкостями, мають різні амплітуди і зазнають взаємних зіткнень.

Однією з властивостей відокремлених хвиль є те, що вони багато в чому подібні до частинок. Так, при зіткненні дві відокремлені хвилі, як здається не проходять одна через одну, як звичайні лінійні хвилі, а відштовхуються одна від одної подібно тенісним шарикам. Саме завдяки цьому відокремлена хвиля, що володіє такими властивостями, отримала назву солітон, що підкреслює її корпускулярний характерю

Одним з найефективніших методів дослідження повністю інтегрованих нелінійних систем, тобто рівнянь солітонного типу, який дозволяє знайти N-

солітонні розв’язки, є метод оберненої задачі розсіювання. Для демонстрації застосування цього методу ми обрали найбільш поширені нелінійні рівняння солітонного типу: рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння *sin*-Гордона.

Рівняння Кортевега-де Фріза є найбільш відомою математичною моделею, яка має універсальний фізичний зміст і описує різноманітні явища, що відбуваються в середовищах зі слабкою дисперсією та нелінійністю, має вигляд

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0. \qquad (1.1.1)$$

Рівняння КдФ побудоване як рівняння, що описує довгі хвилі на мілкій воді.

Застосування КдФ: хвилі різної природи, розповсюдження імпульсів у оптико-хвильових системах, акустичні хвилі в кристалах, іонно-звукові хвилі в плазмі.

Нелінійне рівняння Шредінгера як і рівняння КдФ широко використовується при вивченні розповсюдження хвиль в різних областях фізики. НРШ відіграє важливу роль у теорії нелінійних хвиль з дисперсією та кубічною не лінійністю і має вигляд:

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0, \qquad (1.1.2)$$

де функція $u(x,t)$ комплекснозначна, а $|u|^2 = u\bar{u}.$

Його назва походить від того, що воно співпадає по формі з квантово-механічним рівнянням Шредінгера з потенціалом пропорційним $|u|^2$, хоча його фізичний зміст насправді далекий від квантової механіки одночастинних систем.

Застосування НРШ: розповсюдження світлових пучків у нелінійній оптиці електромагнітних хвиль та хвиль Ленгмюра в плазмі.

Широко відоме у нелінійній фізиці *рівняння sin-Гордона,* яке використовується при аналізі властивостей елементарних частинок та теоретичному описі багатьох ефектів у фізиці твердого тіла, має вигляд

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin u, \qquad (1.1.3)$$

або у канонічній формі

$$u_{xt} = \sin u.$$

Вперше це рівняння з’явилося у диференціальній геометрії як точна модель, що описує поверхню сталої від’ємної кривизни. У фізиці твердого тіла рівняння *sin*-Гордона було введене Френкелем і Конторовою, які запропонували модель одновимірної дислокації в кристалі на основі цього рівняння.

Застосування рівняння *sin*-Гордона: динаміка локалізованих збуджень намагніченості і в магнітних матеріалах, джозефсонівські контакти в напівпровідниках, динаміка дислокацій у фізиці твердого тіла, поширення хвиль розширення в біологічних (ліпідних) мембранах, тощо.

Інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь є складною задачею.

Серед нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних існує цілий клас фізично значимих рівнянь, які є повністю інтегрованими. Для цих рівнянь вдається розв’язати задачу Коші, і у якості одного з важливих результатів побудувати багатосолітонні розв’язки та знайти закони збереження, що надає теорії цих рівнянь певну завершеність і витонченість. Є низка розроблених аналітичних та чисельних методів розв’язання таких рівнянь.

Метод оберненої задачі розсіювання належить до аналітичних методів, який грунтується на представленні нелінійного рівняння як умови сумісності двох лінійних рівнянь. За своїми можливостями метод оберненої задачі є своєрідним узагальненим перетворенням Фур’є для лінійних систем на випадок нелінійних рівнянь у частинних похідних.

Характерною рисою інтегрованих методом оберненої задачі нелінійних рівнянь є існування у них спеціальних точних розв’язків – солітонів. Під солітоном розуміють розв’язок нелінійного еволюційного рівняння, яке в кожен момент часу локалізовано в деякій області простору, причому розміри цієї області з плином часу залишається обмеженими, а рух центру області можна інтерпретувати як рух частинки. Відкриття солі тонних розв’язків пов’язане із розв’язанням рівнянням КдФ. В 1967 році Гарднер, Грін, Крускал і Міура запропонували нестандартний підхід, заснований на можливості зв’язати нелінійне рівняння КдФ з лінійним одновимірним рівнянням Шредінгера для стаціонарних станів: розв’язок рівняння КдФ відіграє роль потенціалу стаціонарного рівняння Шредінгера, а час розглядається як параметр. Солітон є однієї з модифікацій рівнянь КдФ

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

описує відокремлену хвилю виду

$$u_s(x,t) = 3\nu \cdot ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{\nu}(x - \nu t - x_0)}{2}\right)$$

і однозначно визначається двома параметрами: швидкістю $\nu > 0$ і положенням максимуму в фіксований момент часу $t = 0, x = x_0$. Це рівняння має також *n*-солітонні розв’язки , які при великому часі $(t \to \pm\infty)$ можна наближено записати у вигляді суми *n* доданків $u_s(x,t)$, кожне з яких характеризується своєю швидкістю ν_i і положенням центру $\nu_{0i}^{\pm}$. Для *n*-солітонів рішення набір швидкостей до зіткнення $(t \to -\infty)$ і після зіткнення $(t \to +\infty)$ залишається незмінним, виникають тільки зрушення центрів солитонов $x_{0i}^{+} \neq x_{0i}^{-}$.

Об’єктом дослідження є обернена задача розсіювання.

Предметом дослідження є знаходження розв’язків солітонного типу нелінійних рівнянь, таких як рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння *sin*-Гордона, за допомогою методу оберненої задачі розсіювання.

Методи дослідження. В дипломній роботі використано метод оберненої задачі розсіювання, методи математичного аналізу та лінійної алгебри.

Метою дослідження є розкриття с методу оберненої задачі розсіюванн і знаходження розв’язків нелінійних рівнянь за допомогою цьогоі.

Завдання дослідження:

1) описати класичні хвильові нелінійні рівняння, які мають солітонні розв’язки;
2) розкрити зміст методу оберненої задачі розсіювання;

3) продемонструвати застосування методу оберненої задачі розсіювання до розв’язування класичних нелінійних рівнянь.

Публікації та апробація результатів дипломної роботи. Результати дипломної роботи опубліковані в працях [6, 7] і доповідалась на Регіональній науково-практичній конференції «Актуальні проблеми математики, фізики, комп’ютерних наук і технологій».

Структура роботи. Дипломна робота складається зі вступу, трьох розділів (з висновками до них), загальних висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг – 63 сторінки.

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. 2017. Вип. 16. С. 21-29.

2. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. 2018. Вип. 18. С. 5-13.

3. Герасимчук В.С. Метод оберненої задачі розсіювання та його застосування: навч. посібник. Київ: НТУУ «КПІ», 2015. 96 с.

4. Гладка З.М. Метод оберненої задачі розсіювання для рівняння Кортверега-де Фріза з початковими даними типу сходинки: автореф. дис. на здобуття наукового ступення канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03 Харків, 2016. 19 с.

5. Дубровский В.Г. Элементарное введение в метод обратной задачи и теория солитонов: курс лекций. Новосибирск: НГТУ, 1997. 88 с.

6. Ігнатко В. Обернена задача розсіювання для оператора Шредінгера. *Актуальні проблеми математики, фізики, комп'ютерних наук і технологій: зб. наук. пр*. 2020. Вип. 17. С. 41-44.

7. Ігнатко В.В., Бак С.М., Ковтонюк М.М. Метод оберненої задачі розсіювання. *Науково-популярний альманах «Математика та інформатика навколо нас».* 2020. Вип. 4. С. 51-57.

8. Новокшенов В. Ю. Введение в теорию солитонов. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 96 с.

9. Косевич А.М. Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механіку. К.Наукова думка, 1989. 304 с.

10. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.Ижевск:ИКИ, 2004. – 352 с.

11. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005.256 с.

12. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Эволюция нелинейных волновых пакетов в гидродинамической системе "слой-полупространство" с учетом поверхностного натяжения. *Математичні методи та фізико-механічні поля.*2001. В.44, N2.- С. 113- 122.

13. Сироїд І.П. Комплексний метод оберненої задачі розсіяння і дослідження несамоспряжених пар Лакса для системи Кортверега-де Фріза. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, 2005. 191с.

14. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 432 с.

15. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 69, №4. P.509-520.

16. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2019. Vol. 52, № 2. P. 176-184.

17. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.

18. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75-87.

19. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Український математичний вісник*. 2020. Т.17, №3. С. 301-312.

20. Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method of solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys.Rew.Lett.* 1967. Vol.19. P. 1095-1097.

21. Korteweg D. J., de Vries G. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves. *Phil. Mag*. 1895. № 39. P. 422–433.

22. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communs Pure and Appl. Math*. 1968. Vol. 21, № 15. P. 467–490.

23. Vakhnenko, V. O., Parkes E.J. Solutions associated with discrete and continuous spectrums in the inverse scattering method for the vakhnenko-parkes equation. *Progress of Theoretical Physics*. 2012. Vol.127, № 4. P. 593 – 613.

24. Vakhnenko, V. O., Parkes E.J. Approach in theory of nonlinear evolution equations: the Vakhnenko-Parkes equation. *Advances in Mathematical Physics*. 2016. Vol.2016, P. 39

25. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of “solutions” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett*. 1965. Vol. 15. P. 240–243.