в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного і оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін.

Список використаних джерел

1. Крамаренко С. Г. Відкритий урок // Інтерактивні техніки навчання як засіб розвитку творчого потенціалу учнів / Крамаренко С.Г. – Київ, 2002.
2. Пироженко Л. Інтерактивні технології навчання: теорія, досвід: Методичний посібник. / Л. Пироженко, О. Пометун. – Київ, 2007.
3. Нісімчук А. С. Сучасні педагогічні технології / А. С. Нісімчук, О. С. Падалка, О. Т. Шпак. – Київ, 2000.
4. Пометун О. І. Науково-методичний посібник / За ред. О.І. Пометун. - К.: А.С.К., 2003.
5. Ющенко Л. Ф. Розвиток творчих компетентностей учнів на уроках математики через використання інтерактивних методик і технологій навчання. [Електронний ресурс] / Л. Ф. Ющенко. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: https://naurok.com.ua/metodichna-rozrobka-rozvitok-tvorchih-kompetentnostey-uchniv-na-urokah-matematiki-cherez-vikoristannya-interaktivnih-metodik-i-tehnologiy-navchannya-142842.html.

FORMATION OF MATHEMATICAL COMPETENCIES OF PUPILS BY USING INTERACTIVE TECHNOLOGIES

Abstract. *The importance of introducing interactive technologies in mathematics lessons is revealed in the article.*

Keywords. *Mathematical competence, interactive technologies.*

Світлана Ткаченко

ПЕРЕВАГИ БАЙЄСІВСЬКОГО ПІДХОДУ ДО ПЕРЕВІРКИ СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Анотація. *В статті розглянуто байєсівський підхід до перевірки статистичних гіпотез та обґрунтовано основні переваги байєсівського підходу в порівнянні з класичним (частотним) підходом.*

Ключові слова*: гіпотеза, статистичні гіпотези, перевірка статистичних гіпотез, теорема Байєса, байєсівський критерій, байєсівський підхід.*

Постановка проблеми. Усі наукові дослідження направлені на отримання достовірних результатів, які відображають дійсність, де неминучим є перехід від менш достовірних фактів до більш достовірних. Таким чином з’являються гіпотези – припущення вченого про існування деякої закономірності. Будь-яке припущення не може вважатися правильним без доведення, що веде за собою появу нових наукових теорій. Довести істинність гіпотези або спростувати її можна оперуючи фактами, яким у більшості випадків притаманна статистична природа, а відтак науковець, спираючись на відому інформацію, при доведенні істинності свого теоретичного припущення має перетворити його в так звану статистичну гіпотезу.

Статистична гіпотеза – це припущення щодо певних властивостей статистичної сукупності – закону розподілу або окремих параметрів розподілу випадкової величини. Типове завдання перевірки статистичних гіпотез виникає тоді, коли необхідно зробити вибір між двома альтернативами, взаємозаперечними рішеннями. Формально будь-яку з цих альтернатив можна піддати перевірці і за результатами перевірки або прийняти, або відхилити [1].

На практиці з двох протилежних гіпотез за основну (нульову) вибирають ту, наслідки відхилення якої більш вагомі. Перевірка статистичних гіпотез неминуче пов’язана з ризиком прийняття помилкового рішення [1]:

ризик I – відхилити правильну нульову гіпотезу;

ризик II – прийняти нульову гіпотезу, коли насправді правильною є альтернативна.

Ці ризики взаємопов’язані – зменшення ймовірності одного є причиною збільшення ймовірності іншого. Так як уникнути ризиків практично неможливо, а їхні наслідки, зазвичай досить неоднозначні, то в кожному конкретному дослідженні є доцільним намагання мінімізувати той ризик, який пов’язаний з найбільшими втратами.

Критерій, за яким нульову статистичну гіпотезу відхиляють або не приймають, називають статистичним критерієм. За допомогою статистичних критеріїв розв’язують різні типи завдань, зокрема, порівняння вибіркових характеристик з певними стандартами (нормативами), перевірка сукупності на однорідність чи нормальність розподілу, розкриття причинно-наслідкових зв’язків, тенденцій розвитку тощо [1]. Однак і тут виникають проблеми, адже насправді жоден статистичний критерій не може дати нам абсолютної впевненості в істинності гіпотез, які досліджуються. Тому, щоб отримати обґрунтовані висновки щодо досліджуваних об’єктів на основі наявних фактів, необхідно володіти не лише знаннями щодо основних принципів статистичних критеріїв, але і сферою, де той чи інший конкретний критерій доцільно використовувати для отримання найбільш точного результату.

Найбільш використовуваними підходами до перевірки статистичних гіпотез є частотний (традиційний, класичний) підхід та байєсівський підхід. Частотний підхід довгий час мав значну кількість прихильників в порівнянні з байєсівським підходом, який деякі дослідники вважали суб’єктивним (це стосувалося лише використання підходу до перевірки статистичних гіпотез, з математичної точки зору теорема Байєса, на якій ґрунтується підхід, не містить ніяких суперечностей). Пояснюється це тим, що байєсівський підхід передбачає використання деякої апріорної (передтестової) ймовірності того, що вибрана гіпотеза достовірна, сенс якої може бути не відразу зрозумілим.

Тому метою даної статті є розгляд байєсівського підходу до перевірки статистичних гіпотез та виявлення основних переваг використання цього підходу в порівнянні з частотним методом.

Виклад основного матеріалу. Частотний підхід (який ще називають перевіркою за допомогою p-значення) – це апарат перевірки статистичних гіпотез, який базується на частотному означенні ймовірності, тобто ймовірності як границі відносної частоти спостереження деякої події в серії однорідних незалежних випробувань. p-значення дорівнює ймовірності отримати результат, який є принаймні не меншим за спостережуваний за умови істинності нульової гіпотези. Дуже важливою для визначення істинності гіпотези є правильна інтерпретація p-значення. Якщо $p = 0{,}08$, то ми можемо певною мірою вважати, що ймовірність того, що нульова гіпотеза істинна складає всього *8%*, однак водночас ми не можемо стверджувати, що звідси слідує те, що нульова гіпотеза хибна з ймовірністю 92% чи навіть більше. Це пов’язано з тим, що p-значення вираховується згідно з припущенням істинності нульової гіпотези. Тому вона не є критерієм для визначення хибності нульової гіпотези. З цієї логічної помилки слідує хибне уявлення про те, що про істинність нульової гіпотези можна судити лише по результатам дослідів [5]. В сучасній статистиці для досягнення більшої точності більш значна увага приділяється не p-значенню, а довірчим інтервалам.

Існує ідея про можливість універсального використання p-значення, але вона заснована на помилковому припущенні про те, що одне й те саме явище можна одночасно розглядати в найближчій і віддаленій перспективі. У першому випадку оцінюють достовірність результатів окремого дослідження за допомогою індуктивного методу. У другому випадку використовують дедукцію, аналізуючи дані окремого експерименту разом з іншими наслідками, які можуть виникнути при його ймовірному повторенні. Об’єднавши обидва ці підходи, можна було б пов’язати дедукцію (об’єктивний розрахунок ймовірності) з індукцією (висновок про наукову цінність окремого досвіду). Але це в принципі неможливо, оскільки результат окремого досвіду (найближча перспектива) може бути включений в аналіз даних різних серій дослідів (віддалена перспектива) [5].

Класичним прикладом тому служить вивчення застосування двох методів лікування (*А* і *Б*) у 6 хворих. Метод *А* перевершував по ефективності метод *Б* у перших 5 хворих, але для шостого пацієнта ефективнішим виявився метод *Б*. Слідуючи міркуванням R. Royall, припустимо, що даний експеримент проводять два дослідника. Не маючи уявлення про наміри один одного, вони вибрали одних і тих же хворих, але організували свої роботи по-різному [7]. Перший вирішив дослідити 6 хворих і отримав *р*-значення 0,11. Другий вирішив припинити дослідження, коли буде показано перевагу методу *Б* (в групі, що не перевищує 6 хворих), і отримав *р*-значення 0,03 (див. [5, 6]). При одних і тих же хворих, одних і тих же методах лікування, результати були отримані абсолютно різні (і, можливо, зроблені різні висновки). Все це сталося тільки тому, що дослідники по-різному уявляли собі результати гіпотетичних повторних експериментів. Те ж саме можна продемонструвати на прикладі довірчих інтервалів. Таким чином, результат не може бути єдиним у своєму роді (окремий експеримент, найближча перспектива) і в той же час – непомітним членом групи взаємозамінних результатів (серія експериментів, віддалена перспектива) [6, 7].

Байєсівський підхід – це апарат перевірки статистичних гіпотез, який базується на байєсівському означенні ймовірності, де враховуються деякі апріорні факти про об’єкт чи явище, що досліджується.

Формула Байєса має дві складові: показник, що характеризує дані досліду (байєсівський критерій), і показник, що характеризує впевненості в істинності гіпотези. Виглядає формула наступним чином (рис. 1):

$$\text{апріорні шанси істинності нульової гіпотези} \times \text{байєсівський критерій} = \text{шанси істинності нульової гіпотези}$$

Рис. 1

Байєсівський критерій при цьому дорівнює (рис. 2):

$$\frac{\text{ймовірність отримання даних при умові істинності нульової гіпотези}}{\text{ймовірність отримання даних при умові істинності альтернативної гіпотези}}$$

Рис. 2

Байєсівський критерій показує, наскільки кожна з двох гіпотез відповідає отриманим даним. Та з них, яка краще описує дані, має більше доводів в сторону своєї істинності. На відміну від величини *р,* використання байєсівського критерію теоретично обґрунтовано і допустимо як при перевірці гіпотез, так і в процесі прийняття рішень. Байєсівський критерій дозволяє пов’язати об’єктивну ймовірність з доведенням та суб’єктивну ймовірність, і може розглядатися з усіх трьох точок зору. Припустимо, що байєсівський критерій дорівнює $\frac{1}{2}$. Зміст цього твердження можна висловити трьома способами [4]:

1. З точки зору об’єктивної ймовірності: ймовірність отримати результати, що спостерігаються, за умови істинності нульової гіпотези в 2 рази менша, ніж ймовірність отримати їх за умови істинності альтернативної гіпотези;

2. З точки зору індуктивного доведення: доведення в 2 рази слабше підтримує нульову гіпотезу, ніж альтернативну;

3. З точки зору суб'єктивної ймовірності: шанси того, що нульова гіпотеза істинна по відношенню до шансів того, що істинною є альтернативна гіпотеза, після отримання результатів досліду зменшилися в 2 рази.

Існує чимало відмінностей між байєсівським критерієм і величиною *p*. Перш за все, байєсівський критерій відображає не ймовірність, а відношення ймовірностей, і його значення коливається від нуля до нескінченності. Він передбачає наявність двох гіпотез, звідки випливає, що, спростовуючи нульову гіпотезу, ми стверджуємо про істинність альтернативної гіпотези. Байєсівський критерій залежить тільки від ймовірності отримання результатів конкретного досвіду і не враховує віддалену перспективу, яку повинна описати величина *p*. Тому на нього не впливають фактори, які не пов'язані безпосередньо з отриманими даними і від яких залежить величина *p* (наприклад, умови припинення експерименту) [4].

Розглянемо яким чином здійснюється перевірка статистичних гіпотез за допомогою байєсівського підходу [3].

Нехай $(x_1,...,x_n)$ – вибірка з генеральної сукупності ξ з законом розподілу $f(x,\theta)$ відомим з точністю до невідомого параметра θ :

$$(x_1,...x_n)|\theta: \ L(x_1,...,x_n|\theta).$$

Перевіримо нульову гіпотезу H_0 про приналежність невідомого параметра θ до деякої множини Θ_0 проти альтернативної гіпотези H_1 про приналежність параметра θ до деякої множини Θ_1, де

$$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing, \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta.$$

Припустимо, що ми володіємо деякою апріорною інформацією про розподіл ймовірності параметра θ :

$$\pi_0 = \Pr\{\theta \in \Theta_0\}, \pi_1 = \Pr\{\theta \in \Theta_1\}.$$

Нехай $\Pr(H_0), \Pr(H_1)$ – апріорні ймовірності істинності гіпотез H_0 і H_1 відповідно.

Нехай $p_0 = \Pr\left\{\theta \in \Theta_0 \mid X_{[n]}\right\}, p_1 = \Pr\left\{\theta \in \Theta_1 \mid X_{[n]}\right\}$ – апостеріорні ймовірності за даними спостереження $(x_1,...,x_n)$ того, що параметр θ належить множинам, які відповідають нульовій гіпотезі p_0 і альтернативній гіпотезі p_1. Апріорні шанси H_0 проти H_1 – π_0/π_1, апостеріорні – p_0/p_1.

Байєсівським критерієм B_{01} гіпотези H_0 проти гіпотези H_1 називається відношення апостеріорних шансів до апріорних шансів:

$$B_{01} = \frac{p_0/p_1}{\pi_0/\pi_1} = \frac{p_0 \cdot \pi_1}{p_1 \cdot \pi_0}.$$

Так як $\pi_1 = 1 - \pi_0$ і $p_1 = 1 - p_0$, маємо:

$$B_{01} = \frac{p_0 \cdot (1-\pi_0)}{(1-p_0) \cdot \pi}, B_{10} = \frac{1}{B_{01}}.$$

У випадку двох простих гіпотез $\Theta_0 = \theta_0, \Theta_1 = \theta_1$ апостеріорні ймовірності:

$$p_i \propto \pi_i \cdot p(x_1,...,x_n|\theta_i), i = 0,1.$$

Тоді $\dfrac{p_0}{p_1} = \dfrac{\pi_0 \cdot p\left(x_1,...,x_n \mid \theta_0\right)}{\pi_1 \cdot p\left(x_1,...,x_n \mid \theta_1\right)}$ і байєсівський критерій має вигляд:

$$B_{01} = \frac{p\left(x_1,...,x_n \mid \theta_0\right)}{p\left(x_1,...,x_n \mid \theta_1\right)},$$

що є просто відношенням правдоподібності.

В загальному випадку функція правдоподібності за умови істинності гіпотези $H_i, i = 0,1$ має вигляд:

$$L\left(x_1,..., x_n \mid H_i\right) = \int_{\Theta_i} \left(x_1,...,x_n \mid \theta\right) \cdot \pi_i\left(\theta\right) d\theta,\ i = 0,1.$$

Байєсівський критерій гіпотези H_0 проти гіпотези H_1 у такому разі:

$$B_{01} = \frac{L\left(x_1,...,x_n \mid H_0\right)}{L\left(x_1,...,x_n \mid H_1\right)}.$$

Апостеріорний розподіл гіпотез при цьому:

$$\Pr\left(H_0 \mid x_1,...,x_n\right) = \frac{\Pr\left(H_0\right) \cdot L\left(x_1,...,x_n \mid H_0\right)}{\Pr\left(H_0\right) \cdot L\left(x_1,...,x_n \mid H_0\right) + \Pr\left(H_1\right) \cdot L\left(x_1,...,x_n \mid H_1\right)},$$

$$\Pr\left(H_1 \mid x_1,...,x_n\right) = 1 - \Pr\left(H_0 \mid x_1,...,x_n\right).$$

Формулу для байєсівського критерію можна переписати у вигляді:

$$\frac{\Pr\left(H_0 \mid x_1,...,x_n\right)}{\Pr\left(H_1 \mid x_1,...,x_n\right)} = \frac{\Pr\left(H_0\right)}{\Pr\left(H_1\right)} \cdot B_{01},$$

звідки отримуємо таке співвідношення:

$$\Pr\left(H_0 \mid x_1,...,x_n\right) = \left[1 + \frac{\Pr\left(H_1\right)}{\Pr\left(H_0\right)} \cdot \frac{1}{B_{01}}\right]^{-1}.$$

Зробимо висновки з отриманих апостеріорних ймовірностей. Нульова гіпотеза приймається, якщо:

$$\Pr\left(H_0 \mid x_1,...,x_n\right) > \Pr\left(H_1 \mid x_1,...,x_n\right).$$

Для оцінки байєсівського критерію використовують таку шкалу [3]:

B_{01}	Сила доведення
$\left[1,3\right]$	непомітна
$\left(3,10\right]$	суттєва
$\left(10,30\right]$	сильна
$\left(30,100\right]$	дуже сильна
>100	вирішальна

Вирішальним є вибір між a_0: «приймаємо H_0» і a_1: «приймаємо H_1».

Розглянемо 0-1 функцію втрат:

$$L(\theta, a_i) = \begin{cases} 0, \theta \in \Theta_i \\ 1, \theta \in \Theta_j, j \neq i \end{cases}.$$

Оптимальне правило мінімізує очікувані апостеріорні втрати:

$$E_{\pi(\theta|X_{[n]})}(L(\theta, a_1)) = \int L(\theta, a_1) \cdot \pi(\theta \mid X_{[n]}) d\theta = \Pr(H_0 \mid x_1, ..., x_n),$$

$$E_{\pi(\theta|X_{[n]})}(L(\theta, a_0)) = \int L(\theta, a_0) \cdot \pi(\theta \mid X_{[n]}) d\theta = \Pr(H_1 \mid x_1, ..., x_n).$$

Тоді віддаємо перевагу $a_0 > a_1$ тоді і тільки тоді, коли

$$E_{\pi(\theta|X_{[n]})}(L(\theta, a_0)) < E_{\pi(\theta|X_{[n]})}(L(\theta, a_1)),$$

що рівносильно:

$$\Pr(H_1 \mid x_1, ..., x_n) < \Pr(H_0 \mid x_1, ..., x_n),$$

тобто обираємо найбільш ймовірну гіпотезу.

Розглянемо $0 - K_i$ функцію втрат:

$$L(\theta, a_i) = \begin{cases} 0, \theta \in \Theta_i \\ K_i, \theta \in \Theta_j, j \neq i \end{cases}.$$

Оптимальним результатом є a_1 (відхиляємо H_0) тоді і тільки тоді, коли:

$$\frac{\Pr(H_0 \mid x_1, ..., x_n)}{\Pr(H_1 \mid x_1, ..., x_n)} < \frac{K_0}{K_1}.$$

Противники байєсівського підходу критикують спосіб представлення зовнішньої інформації – розподіл апріорних ймовірностей – за те, що він висловлює думку дослідника, а ця думка в першу чергу повинна мати доведення. Доведення, по суті, може містити такі відомості [5]:

- результати досліджень з тієї ж тематики;
- результати досліджень, в яких вивчалися подібні механізми;
- результати досліджень, присвячені природі досліджуваного явища;
- відомості про проміжні випадки, які спостерігалися в даному експерименті і свідчать на користь запропонованої гіпотези.

Тільки перший з перерахованих компонентів передбачає просте порівняння або підсумовування результатів. Всі інші відомості вимагають ту або іншу форму екстраполяції причинно-наслідкових зв’язків. При включенні в аналіз байєсівського критерію стає очевидним, що тільки таким шляхом можна робити висновки на підставі результатів статистичного аналізу [4].

При використанні частотного підходу найбільшу складність має формування висновків на підставі результатів окремого експерименту: заперечення цінності зовнішньої інформації створює серйозні практичні і логічні проблеми. Однак метод Байєса, запропонований для індуктивної обробки даних окремого експерименту, теж не гарантує, що висновки, в яких сьогодні дослідник упевнений на 97%, будуть такими ж завтра. Справа в тому, що розподіл апріорних ймовірностей не кращим чином відображає наші знання (або недолік знань), а теорема Байєса є недосконалою моделлю пізнання [8].

Висновки. В статистиці, як і в реальному житті, немає методів, що дозволяють оцінити конкретну ситуацію і одночасно передбачити, яким чином зміниться наше ставлення до цієї ситуації в майбутньому. Ні *p*-значення, ні перевірка гіпотез не в змозі зв'язати висновки, зроблені в окремому експерименті, з числом помилок, які будуть допущені в серії досліджень. Цей зв'язок можна виявити, тільки оцінивши доказовість даних за допомогою байєсівського критерію і об'єднавши її з усією наявною інформацією з даного питання.

Список використаних джерел

1. Єріна А. М. Перевірка статистичних гіпотез як елемент наукового дослідження [Електронний ресурс] / А. М. Єріна – Режим доступу до ресурсу: https://bit.ly/2z0PDXL.
2. Битюков С. И. Применение статистических методов для поиска новой физики на Большом Адронном Коллайдере [Електронний ресурс] / С. И. Битюков, Н. В. Красников. – 2011. – Режим доступу до ресурсу: https://bit.ly/2xknpH4.
3. Буре В. М. Байесовский подход [Електронний ресурс] / В. М. Буре, Л. В. Грауэр. – 2013. – Режим доступу до ресурсу: https://bit.ly/3bWWrEx.
4. Goodman S.N. Towards evidence-based medical statistics: 1: The Bayes factor. Ann Intern Med 1999; 130: 1005 – 13.
5. Goodman S.N. Towards evidence-based medical statistics: 1: The P value fallacy. Ann Intern Med 1999; 130: 995—1004.
6. *Goodman S.N.* p-Values, hypothesis tests, and likelihood: implications for epidemiology of a neglected historical debate. Am J Epidemiol 1993; 137: 485 – 96.
7. *Royall R.* Statistical Evidence: A Likelihood Primer. Monographs on Statistics and Applied Probability #71. London: Chapman and Hall; 1997.
8. *Rubin D.* Bayesianly justifiable and relevant frequency calculations for the applied statistician. Annals of Statistics 1984; 12: 1151—72.

ADVANTAGES OF THE BAYESIAN APPROACH TO THE TESTING OF STATIC HYPOTHESES

Abstract. *The article reviewed the Bayesian approach to testing statistical hypotheses and substantiated the main advantages of the Bayesian approach in comparison with the classical (frequency) approach.*

Keywords: *hypothesis, statistical hypotheses, statistical hypotheses testing, Bayes theorem, Bayes factor, Bayesian approach.*

Вікторія Удоденко

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ІКТ ПРИ ВИВЧЕННІ ТРИКУТНИКІВ В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

Анотація. *У статті йдеться про використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках геометрії в 7-9 класах. Розкрито переваги та недоліки використання ІКТ на уроках. Розповідається на яких етапах уроку які інформаційно-комунікаційні технології доцільно використовувати.*

Ключові слова. *інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ), презентація, тестові технології, GeoGebra.*

Актуальність дослідження. На даний момент комп'ютер використовується у всіх галузях, особливо в освітній. Застосування ІКТ на уроці геометрії робить його цікавішим та повчальнішим. На таких уроках в учнів розвивається пізнавальний інтерес та допитливість, підвищується мотивацію до навчання.

Мета роботи: розглянути методичні особливості використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні геометрії в основній школі.

З впровадженням комп'ютеризації в усіх сферах діяльності, людський мозок, а тим паче дитячий краще сприймає новий матеріал за допомогою різноманітних сучасних носіїв інформації. Діти краще сприймають та запам'ятовують отриману інформацію з екранів телебачення, моніторів комп'ютера та з телефонів, ніж з книг та плакатів.