Бак С.М., Окопна Т.М.

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ КОНЦЕНТРОВАНОЇ КОМПАКТНОСТІ В ЗАДАЧІ ПРО ІСНУВАННЯ ГЕТЕРОКЛІНІЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В ДИСКРЕТНОМУ РІВНЯННІ SIN-ГОРДОНА НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Вступ. Нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. Зокрема, останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною.

Однією з найбільш популярних моделей є нескінченний ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Серед таких систем найбільш відома модель Френкеля–Конторової, вивчена в роботах Я. Френкеля та Т. Конторової 1938 року. Ця та близькі моделі з фізичної точки зору детально вивчені О. Браном, Ю. Ківшаром, Д. Хеннінгом (D. Henning), Г. Ціронісом (Tsironis G.) та ін. Математична ж сторона питання досліджена досить слабко. Відмітимо, однак, що близький клас систем Фермі–Паста–Улама вивчено досить добре такими математиками як Г. Фрісек (G. Friesecke), Дж. Ботті́с (J. Wattis), Г. Аріолі (G. Arioli), Ф. Газзола (F. Gazzola), О. Панков та ін. В значній мірі досліджено дискретні нелінійні рівняння Шредінгера такими математиками як П. Кеврекідс (P. Kevrekides), К. Расмуссен (K. Rasmussen), А. Бішоп (A. Bishop), О. Панков, М. Вейнштейн (M. Weinstein) та ін.

Подібні системи є цікавими з огляду на чисельні застосування у фізиці [4], [6], [7]. В статтях [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], [5], [10] вивчались біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. Огляд відомих результатів про подібні системи зроблено в [13].

Досить важливим класом розв'язків таких систем є біжучі хвилі. Такі розв'язки виникають в багатьох задачах. Біжучі хвилі для параболічних рівнянь в частинних похідних досить детально досліджено такими математиками як Дж. Смоллер (J. Smoller), А. Вольперт (A. Volpert) та В. Вольперт (V. Volpert). Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах

Фермі-Пасти-Улама можна знайти в роботах О. Панкова, зокрема в [13] найбільш повний огляд результатів. В той же час для ланцюгів осциляторів відомі лише дві роботи Г. Йосса (G. Iooss) та К. Кіршгаснера (K. Kirschgässner) [10], результати якої отримано методами теорії біфуркацій, а також в статтях С. М. Бака, в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], [5].

В статті [14] вивчались періодичні розв'язки для системи осциляторів розміщених на двовимірних решітках, а в статтях [2], [8], [9] – біжучі хвилі в таких системах. Зокрема, в [8] розглядалась система із непарною $2\pi-$ періодичною нелінійністю. А в [9] взагалі розглядалися лінійні осцилятори. В статті [2] одержано умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

В статті [11] вивчались гетероклінічні біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Гордона з лінійною взаємодією сусідніх атомів на одновимірній ґратці.

В даній роботі за допомогою методу критичних точок і принципу концентрованої компактності досліджено питання про існування гетероклінічних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Гордона з лінійною взаємодією на двовимірній ґратці.

Метою статті є одержання умов існування гетероклінічних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Гордона на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. У цій статті вивчається дискретне рівняння sin-Гордона, яке описує динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелійних атомів, розміщених на плоскій цілочисловій ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n, m)-го атома в момент часу t. Припускається, що кожний атом лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Рівняння руху такої системи мають вигляд:

$$\begin{aligned} c^2\ddot{q}_{n,m}(t) = c_0^2\Big(q_{n+1,m}(t) + q_{n-1,m}(t) + q_{n,m+1}(t) + q_{n,m-1}(t) - 4q_{n,m}(t)\Big) - \\ -K\sin\big(q_{n,m}(t)\big), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Його також можна записати у вигляді

$$c^2\ddot{q}_{n,m} = c_0^2 \left(\Delta q\right)_{n,m} - K\sin\left(q_{n,m}\right), \tag{2}$$

де $\left(\Delta q\right)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$ – двовимірний дискретний оператор Лапласа.

Для профілю біжучої хвилі $u\left(s\right)$, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, рівняння (2) набуде вигляду

$$\begin{gathered} c^2u''\left(s\right) = c_0^2\left(u\left(s+\cos\varphi\right) + u\left(s-\cos\varphi\right) + u\left(s+\sin\varphi\right) + u\left(s-\sin\varphi\right) - 4u\left(s\right)\right) - \\ -K\sin\left(u\left(s\right)\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Будемо розглядати випадок гетероклінічних біжучих хвиль, для знаходження профілю яких достатньо знайти розв'язок рівняння (3), який задовольняє умови

$$\lim_{s\to-\infty} u\left(s\right) = -\pi \text{ та } \lim_{s\to+\infty} u\left(s\right) = \pi. \tag{4}$$

Всюди далі під розв'язком рівняння (3) розуміється функція $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (3) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Основний результат. З рівнянням (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**) пов'язується функціонал

$$\begin{gathered} J\left(u\right) := \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{c^2}{2}\left(u'\left(s\right)\right)^2 - \frac{c_0^2}{2}\left(u\left(s+\cos\varphi\right) - u\left(s\right)\right)^2 - \right. \\ \left. -\frac{c_0^2}{2}\left(u\left(s+\sin\varphi\right) - u\left(s\right)\right)^2 + K\left(1+\cos\left(u\left(s\right)\right)\right)\right]ds. \end{gathered} \tag{5}$$

визначений на гільбертовому просторі $X := \left\{u \in H^1_{loc}\left(\mathbb{R}\right) : u' \in L^2\left(\mathbb{R}\right)\right\}$ зі скалярним добутком $\left(u, v\right)_X = u\left(0\right)v\left(0\right) + \int_{\mathbb{R}} u'\left(\tau\right)v'\left(\tau\right)d\tau$.

Позначимо через $\mathrm{M}_{-\pi,\pi} = \left\{u \in X : u\left(-\infty\right) = -\pi, u\left(+\infty\right) = \pi\right\}$.

Нехай $v_0 : \mathbb{R} \to \left[-\pi; \pi\right]$ – монотонна функція в $C^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ така, що $v_0\left(s\right) = -\pi$ для $s < -1$ і $v_0\left(s\right) = \pi$ для $s > 1$. Тоді означимо функціонал $\Psi : H^1\left(\mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$

$$\Psi(v) := J(v_0 + v).$$

Неважко переконатися, що $\Psi(v) < \infty$ для всіх $v \in H^1(\mathbb{R})$. І навпаки точку мінімуму u функціоналу J на $\mathrm{M}_{-\pi,\pi}$ можна записати у вигляді $u = v_0 + v$ для деякого $v \in H^1(\mathbb{R})$ (див. [11]). Більше того, функціонал Ψ є неперервно диференційовним на $H^1(\mathbb{R})$.

Лема 1. *Нехай* u *є критичною точкою функціоналу* Ψ *і* $u = v_0 + v \in \mathrm{M}_{-\pi,\pi} \subset X$. *Тоді* $u \in C^2(\mathbb{R})$ *є розв'язком рівняння (3), який задовольняє умови (4).*

Лема 2. *Нехай* $c^2 > c_0^2$. *Тоді точка глобального мінімуму* u_0 *функціоналу* J *на* $M_{-\pi,\pi}$ *задовольняє нерівність* $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < (2k+3)\pi$, *де*

$$k := \max\left\{\kappa \in \mathbb{N}_0 : (2\kappa + 1) \le \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - c_0^2}}\right\}.$$

Введемо скорочену версію функціоналу J для параметра $T > 1$ і $\eta \in \mathbb{R}$

$$J_T(u;\eta) := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\eta - T + \frac{1}{2} + \tau}^{\eta + T - \frac{1}{2} + \tau} \frac{c^2}{2}\left[u'(s)\right]^2 ds d\tau - \int_{\eta - T + \frac{1}{2}}^{\eta + T - \frac{1}{2}} \frac{c_0^2}{2}\left[u\left(s + \cos\varphi + \frac{1}{2}\right) - u\left(s - \frac{1}{2}\right)\right]^2 ds -$$

$$- \int_{\eta - T + \frac{1}{2}}^{\eta + T - \frac{1}{2}} \frac{c_0^2}{2}\left[u\left(s + \sin\varphi + \frac{1}{2}\right) - u\left(s - \frac{1}{2}\right)\right]^2 ds + \int_{\eta - T + \frac{1}{2}}^{\eta + T - \frac{1}{2}} K\left[1 + \cos(u(s))\right] ds.$$

Для одержання основного результату нам знадобиться наступний дискретний варіант принципу концентрованої компактності (див. [11], а також [12] в неперервному випадку).

Лема 3. *Нехай* $c^2 > c_0^2$ *і* $\inf J(u)|_{\mathrm{M}_{-\pi,\pi}} \le \theta < \infty$. *Тоді будь-яка послідовність* $(u_n) \subset M_{-\pi,\pi}$ *така, що* $\lim\limits_{n\to\infty} J(u_n) = \theta$, *має підпослідовність (як і раніше позначається* (u_n)*), яка задовольняє одній з наступних трьох умов:*

(i) *(концентрація): існує послідовність* $(\eta_n) \subset \mathbb{R}$ *така, що для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $T_0 > 0$ *таке, що для всіх* $T > T_0$

$$J(u_n) - J_T(u_n;\eta_n) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) *(розпливання): для всіх* $T > 0$*,* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}} J_T(u_n;\eta) = 0$.

(iii) *(розщеплення): існує* $\varepsilon_1 > 0$ *таке, що для кожного* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *існують послідовності* $f_n, g_n \in X$ *такі, що*

$$\left|u_n - (f_n + g_n - \pi)\right| \le \varepsilon,$$

$$\left|J(u_n) - (J(f_n) + J(g_n))\right| \le \varepsilon, \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f_n'), \operatorname{supp}(g_n')) = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} J(f_n) = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} J(g_n) = \beta,$$

для деяких $0 < \alpha, \beta < \theta$ *(*π *необхідне в першій нерівності для забезпечення* $J(f_n) < \infty$ *і* $J(g_n) < \infty$*).*

Основним результатом цієї статті є наступна теорема:

Теорема Ошибка! Текст указанного стиля в документе отсутствует.**.1.** *Нехай* $c^2 > \frac{9}{8}c_0^2$. *Тоді існує точка мінімуму* $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ *функціоналу* J *на* $M_{-\pi,\pi} \subset X$.

За лемою 1 ця точка мінімуму і є розв'язком рівняння (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**), який задовольняє умови (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

Доведення цієї теореми полягає у виключенні останніх двох випадків (ii) та (iii) принципу концентрованої компактності.

Таким чином, у цій статті одержано умови існування гетероклінічних біжучих хвиль для дискретного рівняння *sin*-Гордона на двовимірній ґратці. У найближчій перспективі планується узагальнення цих результатів на випадок нелінійної взаємодії атомів.

Анотація:

Розглядається дискретне рівняння *sin*-Гордона, яке описує динаміку нескінченного ланцюга нелінійних атомів на двовимірній ґратці. За допомогою принципу концентрованої компактності одержано результат про існування гетероклінічних біжучих хвиль.

Ключові слова: дискретне рівняння *sin*-Гордона, двовимірна ґратка, гетероклінічні біжучі хвилі, принцип концентрованої компактності.

Annotation:

We consider a discrete sine-Gordon equation that describes the dynamics of an infinite chain of nonlinear atoms on two dimensional lattice. By the concentration-compactness principle, result on existence of heteroclinic traveling waves is obtained.

Keywords: discrete sine-Gordon equation, two dimensional lattice, heteroclinic traveling waves, concentration-compactness principle.

Література:

1. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів / С. М. Бак // Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140-153.
2. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, №2. – С. 154-175.
3. Окопна Т. М. Існування біжучих хвиль у дискретному рівнянні sin-Гордона / Т. М. Окопна, В. О. Олексієнко // Актуальні проблеми сучасної науки та наукових досліджень: зб. наук. пр. – Вінниця, 2012. – Вип. 3. – С. 200-204.
4. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201-250.
5. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators / S. M. Bak // Communications in Mathematical Analysis. – 2007. – Volume 3, Number 1. – P. 19-26.

6. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. – 1998. – 306. – P. 1-108.
7. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. – Berlin: Springer, 2004. – 427 pp.
8. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319-341.
9. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – Volume 3, №1 (February). – P. 105-114.
10. Ioos G. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators / G. Ioos, K. Kirchgassner // Commun. Math. Phys. – 2000. – 211. – P. 439-464.
11. Kreiner C.-F. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine-Gordon equation with linear pair interaction / C.-F. Kreiner, J. Zimmer // Discrete and continuous dynamical systems. – Vol. 25, Number 3, November. – 2009. – P. 1-17.
12. Lions P. L. The concentration – compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II / P. L. Lions // Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire. – 1984. – 1. – P. 223-238.
13. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices / A. Pankov. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 pp.
14. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices // Functional analysis with current applications in science, technology and industry / P. Srikanth. – 1998. – Volume 377. – P. 118-122.