

**Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка**

## **МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Серія: Фізико-математичні науки**

Збірник наукових праць

**Випуск 5**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка  
2011

УДК 519.6:519.7  
ББК 22  
М34

Свідोцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:  
Серія KB № 14521-3492P від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до переліку наукових фахових видань  
ВАК України з фізико-математичних наук (постанова Президії ВАК України  
від 14 жовтня 2009 р. № 1-05/4, Бюлетень ВАК України №11, 2009)

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського  
національного університету імені Івана Огієнка,  
протокол № 7 від 30 червня 2011 року.

#### Рецензенти:

**В. І. Герасименко**, д.ф.-м.н., провідний науковий співробітник Інституту математики НАН України;

**В. В. Городецький**, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри алгебри та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

#### Редакційна колегія:

Відповідальний редактор  
**Ю. Г. КРИВОНОС**  
академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

Заст. відповідального редактора  
**А. Ф. ВЕРЛАНЬ**  
член-кор. НАПНУ, д.т.н., проф.

Відповідальний секретар  
**І. Б. КОВАЛЬСЬКА**  
к.ф.-м.н., доцент

**В. К. ЗАДІРАКА**  
член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

**В. П. КЛИМЕНКО**  
д.ф.-м.н., проф.

**І. М. КОНЕТ**  
д.ф.-м.н., проф.

**М. О. ПЕРЕСТЮК**  
академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

**Ю. В. ТЕПЛІНСЬКИЙ**  
д.ф.-м.н., проф.

**А. О. ЧИКРІЙ**  
член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

**Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки** : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: Ю. Г. Кривонос (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — 288 с.

У збірнику друкуються результати досліджень вітчизняних та закордонних науковців, що стосуються проблем застосування математичних моделей в різних галузях людської діяльності.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів, студентів.

УДК 519.6:519.7  
ББК 22

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2011  
© Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011

УДК 517.9

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця**ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ  
ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ  
ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ**

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. Отримано результат про існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші.

**Ключові слова:** нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, задача Коші, глобальний розв'язок.

**Вступ.** У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай  $q_{n,m}(t)$  — узагальнена координата  $(n, m)$ -го осцилятора в момент часу  $t$ . Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m}) + \\ + b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,m \rightarrow \pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \quad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [8], [10], [11]. У статті [14] вивчалися періодичні розв'язки для системи осциляторів на двовимірних ґратках, а в статтях [2], [3], [12] та [13] — біжучі хвилі. Питання коректності задачі Коші для ланцюгів нелінійних осциляторів (випадок одновимірної ґратки) вивчалось в [5] і [9], а для систем осциляторів на двовимірних ґратках — в [4]. Зауважимо, що в статті [4] доведено існування та єдиність глобального розв'язку для систем осциляторів із нелінійностями, зріст яких на нескінченності не вище 2-го степеня. Результат цієї статті поширює результат статті [4].

**Метою статті** є одержання умов існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці.

**Постановка задачі та основні припущення.** Потенціал  $U_{n,m}(r)$  запишемо у вигляді  $U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r)$  і покладемо  $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$ . Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (3)$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \quad (4)$$

де

$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}$ , (такі оператори вивчалися в [6, с. 597]), а нелінійний оператор  $B$  визначається формулою

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (5)$$

в просторі дійсних послідовностей  $q = \{q_{n,m}\}$  зі скалярним добутком

$$(q^{(1)}, q^{(2)}) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} q_{n,m}^{(1)} q_{n,m}^{(2)}.$$

Позначимо цей простір  $l_{2,2}$ . Скалярний добуток і норму в  $l_{2,2}$  позначатимемо  $(\cdot, \cdot)$  і  $\|\cdot\|$  відповідно.

Далі нам також знадобиться простір  $l^\infty$  — банахів простір обмежених послідовностей з нормою

$$\|q\|_{l^\infty} = \sup_{n,m \in \mathbb{Z}} |q_{n,m}|.$$

Відмітимо, що рівняння (3) у просторі  $l_{2,2}$  можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p, q), \\ \dot{q} = H'_p(p, q); \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(\|p\|^2 - (Aq, q)) + \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}),$$

де  $p = \dot{q}$ .

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від  $t$  зі значеннями в  $l_{2,2}$ .

Припускається, що виконуються умови:

(i) послідовності  $\{a_{n,m}\}$  і  $\{c_{n,m}\}$  дійсних чисел обмежені;

(ii)  $V_{n,m}(r)$  — функція класу  $C^1$  на  $\mathbb{R}$ , причому  $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$  і для будь-якого  $R > 0$  існує таке  $C = C(R) > 0$ , що для всіх  $n, m \in \mathbb{Z}$

$$|V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)| \leq C|r_1 - r_2|, \quad |r_1|, |r_2| \leq R. \quad (6)$$

З умови (i) випливає, що  $A$  є обмеженим самоспряженим оператором в  $l_{2,2}$  (див., наприклад, [6, с. 509]). А для оператора  $B$  правильна лема ([4, с. 20]):

**Лема 1.** Нехай виконується умова (ii), тоді оператор  $B$  є обмеженим оператором в  $l_{2,2}$ . Більше того, оператор  $B$  є неперервним за Ліпшицем на кожній кулі простору  $l_{2,2}$ .

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)}, \quad \dot{q}(0) = q^{(1)}. \quad (7)$$

**Основний результат.** Наведемо результати про існування та єдиність локального і глобального розв'язків для системи осциляторів, отримані в статті [4, с. 22-23]:

**Теорема 1.** Нехай виконуються умови (i) та (ii). Тоді для будь-яких  $q^{(0)} \in l_{2,2}$  і  $q^{(1)} \in l_{2,2}$  задача (4), (7) має єдиний розв'язок класу  $C^2$ , який визначений на деякому інтервалі  $(-t_0; t_0)$ .

**Теорема 2.** Нехай виконуються умови (i) та (ii) з константою  $C$ , яка не залежить від  $R$ . Тоді для будь-яких  $q^{(0)} \in l_{2,2}$  і  $q^{(1)} \in l_{2,2}$  задача (4), (7) має єдиний розв'язок класу  $C^2$ , який визначений при всіх  $t \in \mathbb{R}$ .

Посилена умова (ii) виконується для нелінійностей, зріст яких на нескінченності не вище 2-го степеня.

**Лема 2.** Нехай виконуються умови (i) та (ii). Тоді  $H(p, q)$  є функціоналом класу  $C^1$  на  $l_{2,2} \times l_{2,2}$ .

**Доведення.** Квадратичні члени  $\|p\|^2$  і  $(Aq, q)$  є, очевидно, функціоналами класу  $C^1$  (нагадаємо, що згідно (i)  $A$  — обмежений лінійний оператор). Тому достатньо показати, що

$$\varphi(q) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} V_{n, m}(q_{n, m})$$

є функціоналом класу  $C^1$  на  $l_{2, 2}$ . Нехай  $q \in l_{2, 2}$ ,  $h \in l_{2, 2}$  і  $B(q)$  визначено рівністю (5).

За формулою Лагранжа, існують такі  $\theta_{n, m} \in (0, 1)$ , що

$$\varphi(q+h) - \varphi(q) - (B(q), h) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \left[ V'_{n, m}(q_{n, m} + \theta_{n, m} h_{n, m}) - V'_{n, m}(q_{n, m}) \right] h_{n, m}.$$

Припустимо, що  $\|q\| \leq R$  і  $\|h\| \leq R$ . Тоді  $\|q\|_{l^\infty} \leq R$ ,  $\|h\|_{l^\infty} \leq R$  і згідно (ii):

$$|\varphi(q+h) - \varphi(q) - (B(q), h)| \leq C \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \theta_{n, m} |h_{n, m}|^2 \leq C \|h\|^2 = o(\|h\|).$$

Це означає, що похідна  $\varphi'(q)$  існує і  $\varphi'(q) = B(q)$ . Оскільки, за лемою 1, оператор  $B(q)$  неперервний, то  $\varphi \in C^1$ . Лему доведено.

Розглянемо гамільтонову систему з гамільтоніаном  $H$ :

$$\dot{p} = -H'_p(p, q), \quad \dot{q} = H'_q(p, q). \quad (8)$$

Оскільки  $H'_p(p, q) = p$  і  $H'_q(p, q) = -Aq + B(q)$ , то задача Коші для системи (8) еквівалентна задачі Коші для рівняння (4), а значить і для рівняння (1). Як добре відомо (див., наприклад, [1]),  $H(p, q)$  є інтегралом системи (4) (у цьому неважко переконатися). Звідси отримуємо:

**Наслідок.** В умовах (i), (ii) нехай  $q(t)$  — розв'язок рівняння (1) зі значеннями в  $l_{2, 2}$ . Тоді  $H(\dot{q}(t), q(t)) = H(q^{(1)}, q^{(0)}) = \text{const.}$

**Теорема 3.** Нехай виконуються умови (i), (ii) та оператор  $A$  недодатний, тобто  $(Aq, q) \leq 0$  для будь-якого  $q \in l_{2, 2}$ . Крім того, нехай виконується одна із наступних умов:

(a)  $V_{n, m}(r) \geq 0$  для всіх  $n, m \in \mathbb{Z}$  і  $r \in \mathbb{R}$ ;

(b) існує така неспадна функція  $h(\xi)$ , визначена для  $\xi \geq 0$ , що

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) = +\infty \text{ і } V_{n, m}(r) \geq h(|r|) \text{ для всіх } n, m \in \mathbb{Z} \text{ і } r \in \mathbb{R}.$$

Тоді для будь-яких початкових даних  $q^{(0)}, q^{(1)} \in l_{2,2}$  задача (4), (7) має єдиний розв'язок, визначений при всіх  $t \in \mathbb{R}$ .

**Доведення.** Нехай виконується умова (a) і  $q(t)$  — локальний розв'язок задачі (4), (7), що існує згідно теореми 1. Для того, щоб довести, що  $q(t)$  визначена на всій осі, достатньо показати, що функція  $\|q(t)\| + \|\dot{q}(t)\|$  залишається обмеженою на будь-якому скінченному інтервалі  $(-t_0, t_0)$  існування розв'язку (див., наприклад, [7], теорема X.74).

За наслідком з леми 2

$$H(\dot{q}(t), q(t)) = H(q^{(1)}, q^{(0)}).$$

Відповідно до умов теореми і означення гамільтоніана:

$$\frac{1}{2} \|\dot{q}(t)\|^2 \leq H(q^{(1)}, q^{(0)}).$$

Отже,  $\|\dot{q}(t)\|$  обмежена на  $(-t_0, t_0)$ . Оскільки

$$q(t) = \int_0^t \dot{q}(\tau) d\tau + q^{(0)},$$

то звідси випливає обмеженість  $\|q(t)\|$  і теорему в цьому випадку доведено.

Нехай виконується умова (b) і  $H_0 \geq 0$  таке, що  $H(q^{(1)}, q^{(0)}) \leq H_0$  і  $\bar{r} > 0$  — розв'язок рівняння  $h(r) = H_0$  (він, очевидно, існує). Із означення  $H$  та умов теореми випливає, що  $h(|q_{n,m}^{(0)}|) \leq H_0$  і, отже, на множині, де  $h(r)$  строго зростає, виконується нерівність  $|q_{n,m}^{(0)}| \leq \bar{r}$ .

На множині, де  $h(r)$  стала, виберемо  $H_0 \geq 0$  так, щоби  $\bar{r}$  було найбільшим на даній множині, тоді автоматично  $|q_{n,m}^{(0)}| \leq \bar{r}$ .

Нехай  $\psi(r)$  — функція, визначена рівністю

$$\psi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq \bar{r}, \\ -r + \bar{r} + 1, & \bar{r} \leq r \leq \bar{r} + 1, \\ 0, & r \geq \bar{r} + 1. \end{cases}$$

$$\text{Покладемо } \tilde{V}_{n,m}(r) = \int_0^r [\psi(|\rho|) V'_{n,m}(\rho) + 2(1 - \psi(|\rho|)) \rho] d\rho.$$

Неважко перевірити, що модифіковане рівняння (3) з потенціалом  $\tilde{V}_n$  задовольняє умовам теореми 2 і, отже, має глобальний розв'язок  $q(t)$  з початковими даними  $q^{(0)}, q^{(1)}$ . Елементарні обчислення показують, що  $\tilde{V}_n(r) \geq \tilde{h}(r)$ , де

$$\tilde{h}(r) = \begin{cases} h(r), & 0 \leq r \leq \bar{r}, \\ (-r + \bar{r} + 1)h(r) + \int_{\bar{r}}^r h(\rho) d\rho + 2 \left( \frac{r^3}{3} - \bar{r} \frac{r^2}{2} + \frac{\bar{r}^3}{6} \right), & \bar{r} \leq r \leq \bar{r} + 1, \\ r^2 + \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+1} h(\rho) d\rho + \left[ \frac{\bar{r}^3}{3} - \frac{(\bar{r}+1)^3}{3} \right], & r \geq \bar{r} + 1. \end{cases}$$

Для модифікованого гамільтоніана  $\tilde{H}$  маємо  $\tilde{H}(p(t), q(t)) = \tilde{H}(q^{(1)}, q^{(0)})$ . Оскільки  $|q_{n,m}^{(0)}| \leq \bar{r}$ , то  $\tilde{H}(q^{(1)}, q^{(0)}) \leq H_0$ . Отже,  $\tilde{h}(|q_{n,m}|) \leq H_0$ .

Оскільки  $\tilde{h}(r) \geq \tilde{h}(\bar{r}) = h(\bar{r}) = H_0$ , то  $|q_{n,m}| \leq \bar{r}$ . Оскільки для  $q(t)$  модифіковане рівняння співпадає з вихідним, то  $q(t)$  є глобальним розв'язком вихідної задачі. Теорему доведено.

Таким чином, у цій статті одержано умови існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці (теорема 3), які поширюють результат статті [4].

### Список використаних джерел:

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
2. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154—175.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2011. — Т. 35, № 1. — С. 60—65.
4. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С. М. Бак, О. О. Баранова, Ю. П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 18—24.



5. Бак С. Н. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов / С. Н. Бак, А. А. Панков // Украинський математичний журнал. — 2006. — Т. 58, № 6. — С. 723—729.
6. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наук. думка, 1965. — 798 с.
7. Рид М. Методы современной математической физики : в 4-х т. / М. Рид, Б. Саймон. — М. : Мир, 1978. — Т. 2. — 395 с.
8. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. — 1997. — P. 201—250.
9. Bak S. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations / S. Bak, G. N'Guerekata, A. Pankov // Communications in Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 8, № 1. — P. 79—86.
10. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. — 1998. — P. 1—108.
11. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. — Berlin : Springer, 2004. — 427 p.
12. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — Vol. 20. — P. 319—341.
13. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, № 1. — P. 105—114.
14. Srikanth P. On periodic motions of two-dimensional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. — 1998. — Vol. 377. — P. 118—122.

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear oscillators on 2D-lattice. It is obtained result on existence and uniqueness of global solution to the Cauchy problem.

**Key words:** *nonlinear oscillators, 2D-lattice, Cauchy problem, global solution.*

Отримано: 24.04.2011

## ЗМІСТ

### **Бак С. М.**

Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці..... 3

### **Бігун Я. Й., Березовська І. В.**

Усереднення в багаточастотній системі диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом і нетеровими крайовими умовами ... 10

### **Богаєнко В. О.**

Паралельні алгоритми моделювання процесу фільтраційної консолідації під дією двокомпонентного розчину ..... 20

### **Бомба А. Я., Сафоник А. П.**

Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод в пористому середовищі ..... 36

### **Gerasimenko V. I., Polishchuk D. O.**

On evolution equations for marginal correlation operators..... 44

### **Гнатюк В. О., Гнатюк Ю. В.**

Теореми існування екстремального елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення..... 60

### **Гудима У. В.**

Критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором ..... 76

### **Дейнека В. С., Петрик М. Р.**

Параметрична ідентифікація кінетичних параметрів дифузії в багатошарових неоднорідних Fe/Dy-наномультиматеріалах ..... 85

### **Джалладова І. А.**

Умови стійкості лінійних стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням аргументів ..... 112

### **Івасишен С. Д., Івасюк Г. П.**

Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для рівнянь Фоккера—Планка—Колмогорова деяких вироджених дифузійних процесів ..... 116

**Конет І. М.**

Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях .....	127
---	-----

**Ленюк М. П.**

Обчислення невластних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Ейлера — Лежандра — Фур'є на полярній осі .....	141
---	-----

**Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.**

3 D коефіцієнти Фур'є та оператори кусково-сталогі сплайн-інтерфлетачії .....	155
--	-----

**Мансимов К. Б., Насияти М. М.**

Необходимые условия оптимальности в одной многоэтапной дискретной задаче управления.....	162
---	-----

**Мартинюк О. В.**

Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно- нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. I .....	179
--	-----

**Першина Ю. И.**

Приближение разрывной функции одной переменной разрывным аппроксимационным линейным сплайном.....	193
--	-----

**Пилипюк Т. М.**

Гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя — Лежандра — Фур'є на полярній осі із спектральним параметром в умовах спряження .....	200
---	-----

**Поселюжна В. Б., Семчишин Л. М.**

До питання збіжності колокаційно-ітеративного методу розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і параметрами .....	213
--	-----

**Сорич В. А., Сорич Н. М.**

Наближення деяких лінійних комбінацій функцій та їх похідних в сенсі О. І. Степанця інтерполяційними тригонометричними поліномами з парним числом вузлів на періоді .....	226
---	-----

**Тарновецька О. Ю.**

Обчислення невластних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Лежандра — Ейлера — Бесселя на полярній осі .....	234
---	-----

**Чабанюк Я. М. Семенюк С. А.**

Stochastic approximation procedure with  
impulsive markov perturbations .....244

**Ясинский В. К., Довгунь А. Я.**

Устойчивость диффузионных стохастических систем  
автоматического регулирования с последствием с  
учетом марковских параметров .....253

Відомості про авторів .....280

Алфавітний показчик авторів .....284

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

## **МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Серія: Фізико-математичні науки**

Збірник наукових праць

**Випуск 5**

---

---

Підписано до друку 12.09.2011 р. Гарнітура «Таймс».  
Папір офсетний. Друк різнографічний.  
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 16,7. Обл.-вид. арк. 15,5.  
Тираж 100. Зам. № 477.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному  
університеті імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.