

**С. М. Бак**

**ЛЕКЦІЇ  
З КОМПЛЕКСНОГО  
АНАЛІЗУ**

---

Посібник для студентів математичних спеціальностей  
педагогічних ВНЗ

Вінниця –2014

ББК 22.161.5я73

Б19

УДК 517.53/.54(075.8)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів (лист №1/11-3524 від 11.05. 2011 р.)*

**Рецензенти:**

*Каленюк П. І.* – доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН вищої освіти України, завідувач кафедри вищої математики, директор інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів;

*Слюсарчук В. Ю.* – доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН вищої освіти України, професор кафедри вищої математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне;

*Томусяк А. А.* – кандидат фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця.

**Бак С. М.** *Лекції з комплексного аналізу.* Посібник для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ. 4-е вид., випр. і доп. / С. М. Бак. – Вінниця: ФОП Горбачук І. П., 2014. – 416 с.

Посібник написано відповідно до діючої навчальної програми дисципліни «Комплексний аналіз», затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (за вимогами кредитно-модульної системи). Він складається із 20 лекцій, у яких висвітлено основні питання теорії функцій комплексної змінної. У посібнику також наведено деякі застосування комплексного аналізу у фізиці та інформатиці. Посібник написано для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ, може бути корисним для студентів фізичних спеціальностей, вчителів та викладачів математики, магістрантів, аспірантів.

**ISBN 978-617-580-005-8**

© С. М. Бак, 2014

## Зміст

<b>Передмова</b> .....	8
<b>Модуль 1. ВСТУП ДО КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ</b> ....	12
<b>Лекція №1. Поле комплексних чисел</b> .....	12
1.1. Комплексні числа. Операції над комплексними числами. . .	12
1.2. Геометрія поля комплексних чисел. ....	16
1.3. Топологія поля комплексних чисел. ....	24
1.4. Нескінченно віддалена точка і стереографічна проекція. . . .	26
<b>Лекція №2. Послідовності і ряди комплексних чисел</b> .....	30
2.1. Послідовності комплексних чисел. Умови збіжності. ....	30
2.2. Основні властивості збіжних послідовностей. ....	33
2.3. Ряди комплексних чисел, їх збіжність. ....	35
2.4. Дослідження ряду на збіжність. ....	37
<b>Лекція №3. Функції комплексної змінної</b> .....	43
3.1. Функції комплексної змінної як відображення комплексної площини у себе. Криві та області на комплексній площині . . .	43
3.2. Границя і неперервність функції у точці. ....	48
3.3. Властивості функцій неперервних на замкненій обмеженій множині. ....	56
<b>Лекція №4. Функціональні послідовності і ряди</b> .....	58
4.1. Функціональні послідовності і ряди, їх збіжність. ....	58
4.2. Рівномірна збіжність функціональної послідовності і функціонального ряду. ....	62
4.3. Степеневий ряд. Структура області збіжності. Теорема Абеля. Рівномірна збіжність степеневого ряду. ....	64
4.4. Означення функцій $w = \exp z$ , $w = \sin z$ , $w = \cos z$ . Їх властивості. ....	69
<b>Запитання для самоконтролю</b> .....	73
<b>Завдання для самоконтролю</b> .....	75

<b>Модуль 2. АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ.</b>	93
<b>Лекція №5. Похідна функції комплексної змінної.</b>	93
5.1. Похідна і диференціал функції комплексної змінної. Правила диференціювання.	93
5.2. Необхідні та достатні умови диференційовності функції комплексної змінної.	96
5.3. Означення аналітичної функції за Коші та за Ріманом.	102
5.4. Гармонічні функції.	103
<b>Лекція №6. Конформні відображення.</b>	108
6.1. Геометричний зміст модуля і аргументу похідної. Поняття про конформне відображення.	108
6.2. Принцип збереження області. Теорема Рімана.	114
6.3. Гідродинамічний зміст похідної.	117
<b>Лекція №7. Елементарні раціональні аналітичні функції та відповідні конформні відображення.</b>	120
7.1. Ціла лінійна функція та її властивості.	120
7.2. Дробово-лінійна функція та її найпростіші властивості.	123
7.3. Групова та кругова властивості дробово-лінійного відображення. Побудова дробово-лінійного відображення за образами трьох точок.	126
7.4. Функція Жуковського та її застосування.	132
<b>Лекція №8. Елементарні трансцендентні аналітичні функції та відповідні конформні відображення.</b>	139
8.1. Показникова функція.	139
8.2. Тригонометричні функції.	141
8.3. Гіперболічні функції.	143
<b>Лекція №9. Елементарні багатозначні функції. Поняття про ріманову поверхню.</b>	147
9.1. Ціла степенева функція та обернена до неї.	147
9.2. Поверхня Рімана.	151
9.3. Логарифмічна функція.	154

9.4. Обернені тригонометричні функції. . . . .	157
9.5. Загальні показникова і степенева функції. . . . .	159
<b>Запитання для самоконтролю. . . . .</b>	<b>162</b>
<b>Завдання для самоконтролю. . . . .</b>	<b>163</b>

### **Модуль 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ**

#### **КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. . . . . 175**

#### **Лекція №10. Інтеграл функції комплексної змінної. . . . . 175**

10.1. Означення інтеграла функції комплексної змінної та його подання через криволінійні інтеграли другого роду. . . . .	175
10.2. Властивості інтегралів функцій комплексної змінної та їх обчислення зведенням до обчислення ріманових інтегралів функції дійсної змінної . . . . .	179

#### **Лекція №11. Інтегральна теорема Коші. . . . . 184**

11.1. Центральна теорема теорії аналітичних функцій та її узагальнення. . . . .	184
11.2. Незалежність інтеграла від форми шляху інтегрування. Інтеграл та первісна. . . . .	186
11.3. Теорема Морери. Означення аналітичної функції за Осгудом. . . . .	193
11.4. Інтегральне зображення логарифмічної функції. . . . .	194

#### **Лекція №12. Інтегральна формула Коші. . . . . 196**

12.1. Зв'язок між значеннями аналітичної функції всередині області і на її межі. Інтегральна формула Коші. . . . .	196
12.2. Формула Коші для похідних аналітичної функції. . . . .	202
12.3. Властивості аналітичних функцій, які безпосередньо впливають із інтегральної формули Коші. . . . .	207

#### **Лекція №13. Означення аналітичної функції за Вейєрштрассом. . . . . 211**

13.1. Аналітичність суми степеневого ряду. Ряд Тейлора. . . . .	211
---	-----

13.2. Розвинення аналітичної функції у степеневий ряд. Означення аналітичної функції за Вейерштрассом. . . . .	215
<b>Лекція №14. Цілі функції.</b> . . . . .	222
14.1. Нулі аналітичної функції. Теорема про канонічне зображення. . . . .	222
14.2. Класифікація цілих функцій. Теорема Ліувілля і основна теорема алгебри. . . . .	227
<b>Запитання для самоконтролю.</b> . . . . .	231
<b>Завдання для самоконтролю.</b> . . . . .	232

#### **Модуль 4. ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ФУНКЦІЇ В**

#### **ОКОЛІ ІЗОЛЬОВАНОЇ ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ. . . . . 246**

<b>Лекція №15. Ряд Лорана.</b> . . . . .	246
15.1. Ряд Лорана та його збіжність. . . . .	246
15.2. Розвинення функцій в ряд Лорана. Теорема Лорана. . . . .	248
15.3. Єдиність розвинення в ряд Лорана. . . . .	256
<b>Лекція №16. Мероморфні функції.</b> . . . . .	260
16.1. Класифікація ізольованих особливих точок. . . . .	260
16.2. Нескінченно віддалена точка. . . . .	262
16.3. Мероморфні функції і характер їх особливостей. . . . .	267
<b>Лекція №17. Дослідження характеру особливості ізольованих особливих точок.</b> . . . . .	272
17.1. Критерій усунутої особливості. . . . .	272
17.2. Поліус, його розпізнання та визначення порядку. . . . .	274
17.3. Критерій істотної особливості. Теорема Сохоцького–Вейерштрасса. . . . .	279
<b>Лекція №18. Лишки аналітичних функцій</b> . . . . .	282
18.1. Означення та формули для обчислення лишків. . . . .	282
18.2. Основна теорема про лишки. . . . .	289
18.3. Логарифмічний лишок. Принцип аргументу. . . . .	291
18.4. Застосування теорії лишків. . . . .	298

<b>Запитання для самоконтролю.</b>	310
<b>Завдання для самоконтролю.</b>	312
<b>Модуль 5. АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ.</b>	325
<b>Лекція №19. Теорема єдиності як теоретична основа побудови аналітичних функцій.</b>	325
19.1. Теорема єдиності.	325
19.2. Принцип аналітичного продовження.	329
19.3. Задача аналітичного продовження.	335
19.4. Продовження співвідношень.	339
<b>Лекція №20. Аналітичне продовження з дійсної осі на комплексну площину.</b>	342
20.1. Задача аналітичного продовження дійсної функції дійсної змінної у комплексну площину.	342
20.2. Означення основних однозначних елементарних функцій як аналітичних продовжень з дійсної осі.	345
20.3. Правильні та особливі точки суми степеневого ряду на колі збіжності.	347
20.4. Непродовжувані аналітичні функції.	350
<b>Запитання для самоконтролю.</b>	354
<b>Завдання для самоконтролю.</b>	355
<b>Додаток 1. Деякі застосування комплексного аналізу у фізиці.</b>	359
<b>Додаток 2. Деякі застосування комплексного аналізу в інформатиці.</b>	379
<b>Питання до іспиту.</b>	401
<b>Список рекомендованої літератури.</b>	404
<b>Предметно-іменний покажчик.</b>	406

## ПЕРЕДМОВА

*Найкоротший шлях між двома істинами в дійсній області проходить через комплексну область.*

*Жак Адамар*

В кінці 17 і на початку 18 століття вже накопичилося багато фактів відносно властивостей елементарних функцій, в яких замість дійсного аргументу підставлено уявний (комплексний). Не маючи геометричного подання комплексного числа (яке було вказано К. Гауссом лише в 1799 р.) і міркуючи по аналогії, математики тієї епохи часто приходили до парадоксальних результатів. Так, Г. Лейбніц та І. Бернуллі сперечалися про те, які логарифми від'ємних чисел – уявні чи дійсні, причому ні перший, ні другий не мав якого б то не було означення логарифма в комплексній області; таке означення, яке враховувало багатозначність логарифма, було дано Л. Ейлером в 1749 році. Умови Коші–Рімана для функцій, заданих степеневими рядами, були вперше вказані Ж. Даламбером (1752 р.) та Л. Ейлером (1777 р.). Термін «аналітична функція» йде від книги Ж.-Л. Лагранжа «Теорія аналітичних функцій, що містить принципи диференціального числення, звільнені від всякого розгляду нескінченно малих або применшуваних, границь або флюксій і зведені до алгебраїчного аналізу скінченних кількостей» (1797 р.), де під аналітичною функцією розуміється сума степеневого ряду. Втім, Ж.-Л. Лагранж навіть не ставив питання про збіжність своїх рядів (інакше він неминуче змушений був би апелювати до відкинутого ним поняття границі). Праці О. Коші (починаючи з 1814 р.), в яких міститься цілий ряд центральних теорем теорії аналітичних функцій, оснований на тому ж означенні, але з чітким з'ясуванням змісту збіжності рядів і з ясною геометричною картиною комплексної змінної; також в О. Коші вперше розглядається криволінійний

інтеграл по комплексній змінній, означення якого він зводить до означення звичайного інтеграла по дійсній змінній відокремленням дійсної і уявної частин. Він вказав спосіб обчислення інтегралів аналітичних функцій по замкнутому контуру за допомогою лишків. З іншого боку, О. Коші зв'язав аналітичність функції з її диференційовністю по комплексній змінній; цю останню властивість він називав моногенністю. Аналіз особливих точок однозначної функції, пов'язаний з використанням її ряду Лорана (1843 р.), був одночасно здійснений російським математиком Ю. Сохоцьким та італійцем Ф. Казораті (1868 р.) і дещо пізніше К. Вейєрштрассом (1876 р.).

Цей посібник містить курс лекцій з теорії функцій комплексної змінної, який читався автором студентам математичних спеціальностей Інституту математики, фізики і технологічної освіти Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Раніше цей курс був заключною частиною курсу математичного аналізу. Нині він виокремився з математичного аналізу, як окрема дисципліна «Комплексний аналіз». У ньому поєднуються аналітичні і геометричні методи, розв'язуються поряд з конкретними і прикладними досить загальні і абстрактні задачі. Поняття комплексного аналізу слугують основною моделлю, інформаційним джерелом і відправним пунктом багатьох досліджень у функціональному аналізі, алгебрі, топології, алгебраїчній і диференціальній геометрії, звичайних диференціальних рівняннях, рівняннях з частинними похідними та інших розділах математики. Також методи комплексного аналізу широко застосовуються у природничих і технічних науках.

Посібник написано відповідно до діючої навчальної програми курсу «Комплексний аналіз», затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла

Коцюбинського (за вимогами кредитно-модульної системи). Він складається із 20 лекцій, у яких висвітлено основні питання теорії функцій комплексної змінної: основні відомості про комплексні числа, функції комплексної змінної, границя та неперервність функції комплексної змінної у точці, ряди комплексних чисел, функціональні ряди, похідна та інтеграл функції комплексної змінної, лишки та їх застосування, аналітичне продовження.

Програма курсу комплексного аналізу складена з урахуванням того факту, що він є складовою частиною базової освіти вчителя математики, що його зміст сприяє формуванню високої математичної культури і здатності професійно вести заняття у фізико-математичних класах. Широка практична застосовність його методів дає можливість розробляти оригінальну тематику факультативних і гурткових занять, готувати учнів до участі в олімпіадах.

Більшість теорем і властивостей мають строге доведення, однак поряд з цим частину тверджень пропонується читачеві довести самостійно. Теоретичний матеріал ілюструється великою кількістю прикладів і завдань, частину з яких також пропонується розв'язати самостійно.

Наприкінці кожного змістового модуля подано запитання і завдання для самоконтролю, зразки самостійних і контрольних робіт, що дозволить забезпечити більш ефективне опрацювання і засвоєння студентом (читачем) навчального матеріалу у процесі самостійної роботи.

У додатках подано деякі застосування комплексного аналізу у аеродинаміці та електриці, а також його застосування при побудові фракталів, розкрито суть фрактального стиснення зображень.

Також наприкінці посібника подано список рекомендованої літератури, який полегшить пошук необхідного матеріалу, який виходить за межі цього посібника. Після списку літератури подано

предметно-іменний покажчик, який безумовно полегшить користування посібником.

Посібник написано для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ, може бути корисним для студентів фізичних спеціальностей, вчителів та викладачів математики, магістрантів, аспірантів.

# Модуль 1. ВСТУП ДО КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

## Лекція №1

Тема: Поле комплексних чисел

---

---

### План

- 1.1. *Комплексні числа. Операції над комплексними числами.*
- 1.2. *Геометрія поля комплексних чисел.*
- 1.3. *Топологія поля комплексних чисел.*
- 1.4. *Нескінченно віддалена точка і стереографічна проєкція.*

#### **1.1. Комплексні числа. Операції над комплексними числами.**

Комплексні числа вперше застосовували італійські математики у зв'язку з розв'язуванням кубічних рівнянь. Перше формальне обґрунтування дій над комплексними числами (майже в сучасній формі) дав у 1560 році Р. Бомбеллі у праці „Алгебра”. Великим стимулом розвитку вчення про комплексні числа слугувало розв'язування в радикалах алгебраїчних рівнянь. У 1629 році у своєму творі „Нове відкриття в алгебрі” А. Жірар вперше сформулював основну теорему алгебри, яку в 1799 році строго довів К. Гаусс. Слід зазначити, що саме він і ввів сам термін „комплексне число”.

Пригадаємо основні відомості про комплексні числа, відомі з курсу вищої алгебри.

**Означення 1.1.** *Число вигляду*

$$z = x + i \cdot y,$$

де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця,  $x, y$  – дійсні числа, називається **комплексним числом**. Числа  $x$  та  $y$  називаються відповідно дійсною та уявною частинами комплексного числа  $z$  і позначаються:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

## Питання до іспиту

1. Комплексні числа. Операції над комплексними числами.
2. Геометрія поля комплексних чисел. Формула Муавра.
3. Нескінченно віддалена точка і стереографічна проекція.
4. Послідовності комплексних чисел. Основні властивості збіжних послідовностей. Критерій Коші. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
5. Ряди комплексних чисел, їх збіжність. Дослідження ряду на збіжність.
6. Функції комплексної змінної. Криві та області на комплексній площині.
7. Границя і неперервність функції у точці. Властивості.
8. Властивості функцій неперервних на компактній множині. Теорема Вейерштрасса. Теорема Кантора.
9. Функціональні послідовності та ряди, їх збіжність.
10. Рівномірна збіжність функціональної послідовності і функціонального ряду. Критерій Коші. Ознака Вейерштрасса.
11. Степеневий ряд. Теорема Коші-Адамара. Структура області збіжності. Теорема Абеля.
12. Рівномірна збіжність степеневого ряду.
13. Означення функцій  $w = \exp z$ ,  $w = \sin z$ ,  $w = \cos z$ . Їх властивості.
14. Похідна і диференціал функції комплексної змінної. Правила диференціювання.
15. Необхідні та достатні умови диференційовності функції комплексної змінної.
16. Гармонійні функції. Рівняння Лапласа.
17. Геометричний зміст модуля і аргументу похідної. Поняття про конформне відображення.
18. Принцип збереження області. Теорема Рімана.
19. Гідродинамічний зміст похідної.

20. Ціла лінійна функція та її властивості.
21. Дробово-лінійна функція та її найпростіші властивості.
22. Групова та кругова властивості дробово-лінійного відображення. Теорема про три точки.
23. Функція Жуковського та її застосування.
24. Гіперболічні функції та їх властивості.
25. Ціла степенева функція та обернена до неї.
26. Поверхня Рімана.
27. Обернені тригонометричні функції.
28. Загальні показникова і степенева функції.
29. Означення інтеграла функції комплексної змінної та його подання через криволінійні інтеграли другого роду.
30. Властивості інтегралів функцій комплексної змінної та їх обчислення зведенням до обчислення ріманових інтегралів функції дійсної змінної.
31. Інтегральна теорема Коші та її узагальнення.
32. Незалежність інтеграла від форми шляху інтегрування. Інтеграл та первісна.
33. Теорема Морери. Означення аналітичної функції за Осгудом.
34. Зв'язок між значенням аналітичної функції всередині області і на її межі. Інтегральна формула Коші.
35. Інтегральна формула Коші для похідних аналітичної функції.
36. Аналітичність суми степеневого ряду. Ряд Тейлора.
37. Розвинення аналітичної функції у степеневий ряд. Теорема Тейлора. Означення аналітичної функції за Вейєрштрассом.
38. Нулі аналітичної функції. Теорема про канонічне зображення.
39. Теорема Ліувілля і основна теорема алгебри.
40. Ряд Лорана та його збіжність.
41. Розвинення функцій в ряд Лорана. Теорема Лорана.
42. Єдиність розвинення в ряд Лорана.

43. Класифікація ізольованих особливих точок. Нескінченно віддалена точка.
44. Мероморфні функції і характер їх особливостей.
45. Критерій усувної особливості.
46. Поліус, його розпізнання та визначення порядку.
47. Критерій істотної особливості. Теорема Сохоцького-Вейерштрасса.
48. Означення та формули для обчислення лишків.
49. Основна теорема про лишки. Принцип аргументу. Теорема Руше.
50. Застосування теорії лишків.
51. Теорема єдиності.
52. Принцип аналітичного продовження.
53. Задача аналітичного продовження.
54. Продовження співвідношень.
55. Задача аналітичного продовження дійсної функції дійсної змінної у комплексну площину.
56. Правильні та особливі точки степеневого ряду.

## Список рекомендованої літератури

1. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
2. Балк М.Б. Задачник-практикум по теории аналитических функций / М.Б. Балк, В.А. Петров, А.А. Полухин. – М.: Просвещение, 1976. – 137 с.
3. Боярчук А.К. Функции комплексного переменного. Справочное пособие по высшей математике / А.К. Боярчук. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – Т. 4. – 352 с.
4. Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учебное пособие / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 312 с.
5. Гольдберг А.А. Комплексний аналіз / А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, М.В. Заболоцький, О.Б. Скасків. – Львів: Афіша, 2002. – 204 с.
6. Грищенко А.Е. Теория функций комплексного переменного. Решение задач / А.Е. Грищенко, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев. – К.: Вища школа, 1986. – 336 с.
7. Гуц А.К. Комплексный анализ и информатика: учебное пособие / А.К. Гуц. – Омск: ОГУ, 2002. – 144 с.
8. Давидов М.О. Курс математичного аналізу / М.О. Давидов. – К.: Вища школа, 1992. – Ч. 3. – 384 с.
9. Давыдов Н.А. Сборник задач по математическому анализу / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.
10. Дюженкова Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х ч. Навч. посіб. / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2002. – Ч. 1. – 462 с.

11. Дюженкова Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х ч. Навч. посіб. / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2003. – Ч. 2. – 470 с.
12. Евграфов М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
13. Евграфов М.А. Сборник задач по теории аналитических функций / М.А. Евграфов, Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1969. – 416 с.
14. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учеб. пособие, 2-е изд., перераб. и доп. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 302 с.
15. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 740 с.
16. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич. – М.: Просвещение, 1977. – 320 с.
17. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
18. Радыгин В.М. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники / В.М. Радыгин, О.В. Голубева. – М.: Высшая школа, 1983. – 160 с.
19. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1970. – 320 с.
20. Фукс Б.А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б.А. Фукс, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1964. – 388 с.

## ПРЕДМЕТНО-ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Абель Н., 68

Адамар Ж., 68

Аналітичне продовження функції, 329

Аргумент

комплексного числа, 17

похідної функції комплексної змінної, 112

Афікс точки, 16

Больцано Б., 35

Бомбеллі Р., 12

Вейерштрасс К., 35

Векторне поле

потенціальне, 117

соленоїдне, 117

Відкритий круг, 24

Відображення сталого лінійного розтягу, 114

Гармонічні функції, 104

Гаусс К., 12

Головне значення аргументу комплексного числа, 17

Головне значення логарифма, 155

Гіперболічний

косинус, 143

синус, 143

Границя

послідовності, 30

функції в точці, 48

Д'аламбер Ж., 99

Диференціал

незалежної змінної, 94

функції комплексної змінної, 94

Ейлер Л., 99

Жіраар А., 12

Жуковський М., 137, 138

Інтеграл Коші, 202

Інтеграл функції комплексної змінної, 176

Інтегральна сума, 176

Кантор Г., 57

Комплексна площа, 16

розширена, 26

Комплексне число, 12

Комплексний потенціал поля, 118

Конформне відображення, 112

другого роду, 113

першого роду, 113

Коші О., 102

Контур Жордана, 46

Коші О., 39

Крива

гладка, 46

Жордана, 46

замкнена, 46

кусково-гладка, 47

неперервна, 46

Критерій

збіжності комплексної послідовності, 31  
збіжності функціонального ряду, 61  
збіжності числового ряду, 37  
істотної особливості, 279  
Коші збіжності послідовності, 34  
Коші рівномірної збіжності функціонального ряду, 62  
полюса, 276  
усувної особливості, 272  
Круг збіжності степеневого ряду, 65  
Купюра аналітичної функції, 350

Лейбніц Г., 39  
Лишок аналітичної функції, 282  
Ліувіллє Ж., 229  
Логарифмічна похідна, 291  
Логарифмічний лишок, 291  
Лоран П., 248

Межа області, 45  
Многочлен, 149, 227  
Множина  
    відкрита, 25  
    замкнена, 25  
    похідна, 25  
Модуль комплексного числа, 16  
Морера Д., 194

Необхідні і достатні умови диференційовності функції комплексної змінної, 96  
Необхідна умова збіжності числового ряду, 37  
Нескінченно віддалена точка, 26

Нуль функції комплексної змінної, 222

Область, 45

замкнена, 45

многозв'язна, 48

однозв'язна, 48

Однозначна вітка многозначної функції, 150

Ознака

Вейерштрасса, 63

Коші, 38

Окіл

нескінченно віддаленої точки, 26

точки, 24

Осгуд В., 194

Послідовність

комплексних чисел, 30

збіжна, 30

необмежена, 31

обмежена, 31

розбіжна, 30

функціональна, 58

збіжна, 58

рівномірно збіжна, 62

Похідна функції комплексної змінної, 93

Принцип

аналітичного продовження, 329

аргументу, 295

збереження області, 115

максимуму модуля, 208

Природна межа аналітичної функції, 350

Проста дуга, 46

Профілі Жуковського-Чаплигіна, 137

Радіус збіжності степеневого ряду, 66

Рівняння

Д'аламбера-Ейлера, 99

Коші-Рімана, 99

Лапласа, 104

Ріман Б., 102, 116, 151

Ріманова поверхня, 153

Ряд

Лорана, 247

степеневий, 64

Тейлора, 214

функціональний, 60

збіжний, 60

рівномірно збіжний, 62

числовий, 36

абсолютно збіжний, 37

збіжний, 36

розбіжний, 36

умовно збіжний, 37

Софізм Бернуллі, 156

Сохоцький Ю., 281

Стереографічна проекція, 26

Сфера Рімана, 26

Тейлор Б., 214

Теорема

Абеля, 68

Адамара, 352  
Больцано-Вейерштрасса, 35  
Вейерштрасса, 56  
єдиності, 327  
Жордана, 46  
інтегральна Коші, 184  
Кантора, 56  
Коші-Адамара, 64  
Ліувілля, 228  
Лорана, 248  
Морери, 193  
основна алгебри, 229, 296  
основна про лишки, 289  
про аналітичне продовження суми степеневого ряду, 343  
про аналітичність суми степеневого ряду, 211  
про групову властивість, 126  
про канонічне зображення, 224  
про кругову властивість, 127  
про незалежність інтеграла від форми шляху інтегрування, 186  
про рівномірну збіжність степеневого ряду, 68  
про середнє, 208  
про три точки, 130  
Рімана, 116  
Руше, 296  
Сохоцького-Вейерштрасса, 280  
Тейлора, 215  
Точка  
внутрішня, 25  
гранична, 24  
дотику, 25  
ізолювана, 25

межова, 45  
нескінченно віддалена  
істотно особлива, 265  
полюс, 265  
усувна, 264  
особлива, 260  
ізольована, 260  
істотно особлива, 261  
нескінченно віддалена, 262  
полюс, 260  
усувна, 260  
особлива суми степеневого ряду, 348  
правильна суми степеневого ряду, 347, 348  
Тригонометрична форма запису комплексного числа, 18

Умови Д'аламбера-Ейлера, 99  
Умови Коші-Рімана, 99

## Формула

Гаусса, 208  
Ейлера, 71  
інтегральна Коші, 196  
Коші для похідних, 203  
Коші-Адамара, 66, 248  
Муавра, 19  
Ньютона-Лейбніца, 190  
середнього значення, 208  
Функція комплексної змінної, 43  
аналітична, 102  
аналітична, 194, 218  
гіперболічна, 143

голоморфна, 102  
диференційовна, 93  
дробово-лінійна, 123, 124  
дробово-раціональна, 269  
Жуковського, 133  
загальна показникова, 160  
загальна степенева, 160  
логарифмічна, 154  
мероморфна, 268  
многозначна, 43  
неперервна, 54  
обернена, 45  
обернена тригонометрична, 157  
обмежена, 45  
однозначна, 43  
однолиста, 116  
первісна, 188  
показникова, 139  
показникова, 70  
регулярна, 102  
рівномірно-неперервна, 56  
стала, 222  
ступенева, 147  
тригонометрична, 141  
тригонометрична, 70  
ціла лінійна, 120  
ціла раціональна, 222  
ціла трансцендентна, 222  
ціла, 120

Чаплигін С., 137, 138

## Латинський алфавіт

<b>Буква</b>	<b>Назва букви</b>
A a	а
B b	бе
C c	це
D d	де
E e	е
F f	еф
G g	же(ге)
H h	аш(ха)
I i	і
J j	йот (жі)
K k	ка
L l	ель
M m	ем
N n	ен
O o	о
P p	пе
Q q	ку
R r	ер
S s	ес
T t	те
U u	у
V v	ве
W w	дубль-ве
X x	ікс
Y y	ігрек
Z z	зет

## Грецький алфавіт

<b>Буква</b>	<b>Назва букви</b>
Αα	альфа
Ββ	бета
Γγ	гамма
Δδ	дельта
Εε	епсілон
Ζζ	дзета
Ηη	ета
Θθ	тета
Ιι	йота
Κκ	каппа
Λλ	лямбда
Μμ	мю(мі)
Νν	ню (ні)
Ξξ	ксі
Οο	омікрон
Ππ	пі
Ρρ	ро
Σσ	сигма
Ττ	тау
Υυ	іпсілон
Φφ	фі
Χχ	хі
Ψψ	псі
Ωω	омега

**Навчальне видання**

**Бак Сергій Миколайович**

**ЛЕКЦІЇ З КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ**

Підписано до друку \_\_\_\_\_ 2012 р.  
Формат 60×84  $\frac{1}{16}$ . Папір офсетний.  
Друк різнографічний. Гарнітура Times.  
Ум. друк. арк. 24,2  
Наклад 300 примірників. Замовлення №\_\_

Віддруковано ПП «ТД «Едельвейс і К»»  
Тел.: (0432) 550-333

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
ДК №3736