С. М. Бак

ЛЕКЦІЇ
З КОМПЛЕКСНОГО
АНАЛІЗУ

Посібник для студентів математичних спеціальностей

педагогічних ВНЗ

Вінниця –2014

ББК 22.161.5я73
Б19
УДК 517.53/.54(075.8)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів (лист №1/11-3524 від 11.05. 2011 р.)

Рецензенти:

Каленюк П. І. – доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН вищої освіти України, завідувач кафедри вищої математики, директор інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів;

Слюсарчук В. Ю. – доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН вищої освіти України, професор кафедри вищої математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне;

Томусяк А. А. – кандидат фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця.

Бак С. М. *Лекції з комплексного аналізу.* Посібник для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ. 4-е вид., випр. і доп. / С. М. Бак. – Вінниця: ФОП Горбачук І. П., 2014. – 416 с.

Посібник написано відповідно до діючої навчальної програми дисципліни «Комплексний аналіз», затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (за вимогами кредитно-модульної системи). Він складається із 20 лекцій, у яких висвітлено основні питання теорії функцій комплексної змінної. У посібнику також наведено деякі застосування комплексного аналізу у фізиці та інформатиці. Посібник написано для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ, може бути корисним для студентів фізичних спеціальностей, вчителів та викладачів математики, магістрантів, аспірантів.

ISBN 978-617-580-005-8

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Найкоротший шлях між двома істинами в дійсній області проходить через комплексну область.

Жак Адамар

В кінці 17 і на початку 18 століття вже накопичилося багато фактів відносно властивостей елементарних функцій, в яких замість дійсного аргументу підставлено уявний (комплексний). Не маючи геометричного подання комплексного числа (яке було вказано К. Гауссом лише в 1799 р.) і міркуючи по аналогії, математики тієї епохи часто приходили до парадоксальних результатів. Так, Г. Лейбніц та І. Бернуллі сперечалися про те, які логарифми від'ємних чисел – уявні чи дійсні, причому ні перший, ні другий не мав якого б то не було означення логарифма в комплексній області; таке означення, яке враховувало многозначність логарифма, було дано Л. Ейлером в 1749 році. Умови Коші–Рімана для функцій, заданих степеневими рядами, були вперше вказані Ж. Даламбером (1752 р.) та Л. Ейлером (1777 р.). Термін «аналітична функція» йде від книги Ж.-Л. Лагранжа «Теорія аналітичних функцій, що містить принципи диференціального числення, звільнені від всякого розгляду нескінченно малих або применшуваних, границь або флюксій і зведені до алгебраїчного аналізу скінченних кількостей» (1797 р.), де під аналітичною функцією розуміється сума степеневого ряду. Втім, Ж.-Л. Лагранж навіть не ставив питання про збіжність своїх рядів (інакше він неминуче змушений був би апелювати до відкинутого ним поняття границі). Праці О. Коші (починаючи з 1814 р.), в яких міститься цілий ряд центральних теорем теорії аналітичних функцій, основані на тому ж означенні, але з чітким з'ясуванням змісту збіжності рядів і з ясною геометричною картиною комплексної змінної; також в О. Коші вперше розглядається криволінійний інтеграл по комплексній змінній, означення якого він зводить до означення звичайного інтеграла по дійсній змінній відокремленням дійсної і уявної частин. Він вказав спосіб обчислення інтегралів аналітичних функцій по замкнутому контуру за допомогою лишків. З іншого боку, О. Коші зв'язав аналітичність функції з її диференційовністю по комплексній змінній; цю останню властивість він називав моногенністю. Аналіз особливих точок однозначної функції, пов'язаний з використанням її ряду Лорана (1843 р.), був одночасно здійснений російським математиком Ю. Сохоцьким та італійцем Ф. Казораті (1868 р.) і дещо пізніше К. Вейєрштрассом (1876 р.).

Цей посібник містить курс лекцій з теорії функцій комплексної змінної, який читався автором студентам математичних спеціальностей Інституту математики, фізики і технологічної освіти Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Раніше цей курс був заключною частиною курсу математичного аналізу. Нині він виокремився з математичного аналізу, як окрема дисципліна «Комплексний аналіз». У ньому поєднуються аналітичні і геометричні методи, розв'язуються поряд з конкретними і прикладними досить загальні і абстрактні задачі. Поняття комплексного аналізу слугують основною моделлю, інформаційним джерелом і відправним пунктом багатьох досліджень у функціональному аналізі, алгебрі, топології, алгебраїчній і диференціальній геометрії, звичайних диференціальних рівняннях, рівняннях з частинними похідними та інших розділах математики. Також методи комплексного аналізу широко застосовуються у природничих і технічних науках.

Посібник написано відповідно до діючої навчальної програми курсу «Комплексний аналіз», затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла

Коцюбинського (за вимогами кредитно-модульної системи). Він складається із 20 лекцій, у яких висвітлено основні питання теорії функцій комплексної змінної: основні відомості про комплексні числа, функції комплексної змінної, границя та неперервність функції комплексної змінної у точці, ряди комплексних чисел, функціональні ряди, похідна та інтеграл функції комплексної змінної, лишки та їх застосування, аналітичне продовження.

Програма курсу комплексного аналізу складена з урахуванням того факту, що він є складовою частиною базової освіти вчителя математики, що його зміст сприяє формуванню високої математичної культури і здатності професійно вести заняття у фізико-математичних класах. Широка практична застосовність його методів дає можливість розробляти оригінальну тематику факультативних і гурткових занять, готувати учнів до участі в олімпіадах.

Більшість теорем і властивостей мають строге доведення, однак поряд з цим частину тверджень пропонується читачеві довести самостійно. Теоретичний матеріал ілюструється великою кількістю прикладів і завдань, частину з яких також пропонується розв'язати самостійно.

Наприкінці кожного змістового модуля подано запитання і завдання для самоконтролю, зразки самостійних і контрольних робіт, що дозволить забезпечити більш ефективне опрацювання і засвоєння студентом (читачем) навчального матеріалу у процесі самостійної роботи.

У додатках подано деякі застосування комплексного аналізу у аеродинаміці та електриці, а також його застосування при побудові фракталів, розкрито суть фрактального стиснення зображень.

Також наприкінці посібника подано список рекомендованої літератури, який полегшить пошук необхідного матеріалу, який виходить за межі цього посібника. Після списку літератури подано предметно-іменний покажчик, який безумовно полегшить користування посібником.

Посібник написано для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ, може бути корисним для студентів фізичних спеціальностей, вчителів та викладачів математики, магістрантів, аспірантів.

Модуль 1. ВСТУП ДО КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

Лекція №1

Тема: **Поле комплексних чисел**

План

1.1. *Комплексні числа. Операції над комплексними числами.*
1.2. *Геометрія поля комплексних чисел.*
1.3. *Топологія поля комплексних чисел.*
1.4. *Нескінченно віддалена точка і стереографічна проекція.*

1.1. Комплексні числа. Операції над комплексними числами. Комплексні числа вперше застосовували італійські математики у зв'язку з розв'язуванням кубічних рівнянь. Перше формальне обґрунтування дій над комплексними числами (майже в сучасній формі) дав у 1560 році Р. Бомбеллі у праці „Алгебра". Великим стимулом розвитку вчення про комплексні числа слугувало розв'язування в радикалах алгебраїчних рівнянь. У 1629 році у своєму творі „Нове відкриття в алгебрі" А. Жірар вперше сформулював основну теорему алгебри, яку в 1799 році строго довів К. Гаусс. Слід зазначити, що саме він і ввів сам термін „комплексне число".

Пригадаємо основні відомості про комплексні числа, відомі з курсу вищої алгебри.

Означення 1.1. *Число вигляду*

$$z = x + i \cdot y,$$

де $i = \sqrt{-1}$ *– уявна одиниця,* x, y *– дійсні числа, називається* ***комплексним числом****. Числа* x *та* y *називаються відповідно дійсною та уявною частинами комплексного числа* z *і позначаються:*

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Питання до іспиту

1. Комплексні числа. Операції над комплексними числами.
2. Геометрія поля комплексних чисел. Формула Муавра.
3. Нескінченно віддалена точка і стереографічна проекція.
4. Послідовності комплексних чисел. Основні властивості збіжних послідовностей. Критерій Коші. Теорема Больцано-Вейєрштрасса.
5. Ряди комплексних чисел, їх збіжність. Дослідження ряду на збіжність.
6. Функції комплексної змінної. Криві та області на комплексній площині.
7. Границя і неперервність функції у точці. Властивості.
8. Властивості функцій неперервних на компактній множині. Теорема Вейєрштрасса. Теорема Кантора.
9. Функціональні послідовності та ряди, їх збіжність.
10. Рівномірна збіжність функціональної послідовності і функціонального ряду. Критерій Коші. Ознака Вейєрштрасса.
11. Степеневий ряд. Теорема Коші-Адамара. Структура області збіжності. Теорема Абеля.
12. Рівномірна збіжність степеневого ряду.
13. Означення функцій $w = \exp z$, $w = \sin z$, $w = \cos z$. Їх властивості.
14. Похідна і диференціал функції комплексної змінної. Правила диференціювання.
15. Необхідні та достатні умови диференційовності функції комплексної змінної.
16. Гармонійні функції. Рівняння Лапласа.
17. Геометричний зміст модуля і аргументу похідної. Поняття про конформне відображення.
18. Принцип збереження області. Теорема Рімана.
19. Гідродинамічний зміст похідної.

20. Ціла лінійна функція та її властивості.
21. Дробово-лінійна функція та її найпростіші властивості.
22. Групова та кругова властивості дробово-лінійного відображення. Теорема про три точки.
23. Функція Жуковського та її застосування.
24. Гіперболічні функції та їх властивості.
25. Ціла степенева функція та обернена до неї.
26. Поверхня Рімана.
27. Обернені тригонометричні функції.
28. Загальні показникова і степенева функції.
29. Означення інтеграла функції комплексної змінної та його подання через криволінійні інтеграли другого роду.
30. Властивості інтегралів функцій комплексної змінної та їх обчислення зведенням до обчислення ріманових інтегралів функції дійсної змінної.
31. Інтегральна теорема Коші та її узагальнення.
32. Незалежність інтеграла від форми шляху інтегрування. Інтеграл та первісна.
33. Теорема Морери. Означення аналітичної функції за Осгудом.
34. Зв'язок між значенням аналітичної функції всередині області і на її межі. Інтегральна формула Коші.
35. Інтегральна формула Коші для похідних аналітичної функції.
36. Аналітичність суми степеневого ряду. Ряд Тейлора.
37. Розвинення аналітичної функції у степеневий ряд. Теорема Тейлора. Означення аналітичної функції за Вейєрштрассом.
38. Нулі аналітичної функції. Теорема про канонічне зображення.
39. Теорема Ліувілля і основна теорема алгебри.
40. Ряд Лорана та його збіжність.
41. Розвинення функцій в ряд Лорана. Теорема Лорана.
42. Єдиність розвинення в ряд Лорана.

43. Класифікація ізольованих особливих точок. Нескінченно віддалена точка.
44. Мероморфні функції і характер їх особливостей.
45. Критерій усувної особливості.
46. Полюс, його розпізнання та визначення порядку.
47. Критерій істотної особливості. Теорема Сохоцького-Вейєрштрасса.
48. Означення та формули для обчислення лишків.
49. Основна теорема про лишки. Принцип аргументу. Теорема Руше.
50. Застосування теорії лишків.
51. Теорема єдиності.
52. Принцип аналітичного продовження.
53. Задача аналітичного продовження.
54. Продовження співвідношень.
55. Задача аналітичного продовження дійсної функції дійсної змінної у комплексну площину.
56. Правильні та особливі точки степеневого ряду.

Список рекомендованої літератури

1. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
2. Балк М.Б. Задачник-практикум по теории аналитических функций / М.Б. Балк, В.А. Петров, А.А. Полухин. – М.: Просвещение, 1976. – 137 с.
3. Боярчук А.К. Функции комплексного переменного. Справочное пособие по высшей математике / А.К. Боярчук. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – Т. 4. – 352 с.
4. Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учебное пособие / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 312 с.
5. Гольдберг А.А. Комплексний аналіз / А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, М.В. Заболоцький, О.Б. Скасків. – Львів: Афіша, 2002. – 204 с.
6. Грищенко А.Е. Теория функций комплексного переменного. Решение задач / А.Е. Грищенко, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев. – К.: Вища школа, 1986. – 336 с.
7. Гуц А.К. Комплексный анализ и информатика: учебное пособие / А.К. Гуц. – Омск: ОГУ, 2002. – 144 с.
8. Давидов М.О. Курс математичного анализу / М.О. Давидов. – К.: Вища школа, 1992. – Ч. 3. – 384 с.
9. Давыдов Н.А. Сборник задач по математическому анализу / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.
10. Дюженкова Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х ч. Навч. посіб. / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник , М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2002. – Ч. 1. – 462 с.

11. Дюженкова Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х ч. Навч. посіб. / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник , М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2003. – Ч. 2. – 470 с.
12. Евграфов М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
13. Евграфов М.А. Сборник задач по теории аналитических функций / М.А. Евграфов, Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1969. – 416 с.
14. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учеб. пособие, 2-е изд., перераб. и доп. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 302 с.
15. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 740 с.
16. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич. – М.: Просвещение, 1977. – 320 с.
17. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
18. Радыгин В.М. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники / В.М. Радыгин, О.В. Голубева. – М.: Высшая школа, 1983. – 160 с.
19. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1970. – 320 с.
20. Фукс Б.А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б.А. Фукс, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1964. – 388 с.

ПРЕДМЕТНО-ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Латинський алфавіт

Буква	Назва букви
A a	а
B b	бе
C c	це
D d	де
E e	е
F f	еф
G g	же(ге)
H h	аш(ха)
I i	і
J j	йот (жі)
K k	ка
L l	ель
M m	ем
N n	ен
O o	о
P P	пе
Q q	ку
R r	ер
S s	ес
T t	те
U u	у
V v	ве
W w	дубль-ве
X x	ікс
Y y	ігрек
Z z	зет

Грецький алфавіт

Буква	Назва букви
Αα	альфа
Ββ	бета
Γγ	гамма
Δδ	дельта
Εε	епсілон
Ζζ	дзета
Ηη	ета
Θθ	тета
Ιι	йота
Κκ	каппа
Λλ	лямбда
Μμ	мю(мі)
Νν	ню (ні)
Ξξ	ксі
Οο	омікрон
Ππ	пі
Ρρ	ро
Σσ	сигма
Ττ	тау
Υυ	іпсілон
Φφ	фі
Χχ	хі
Ψψ	псі
Ωω	омега

Навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

ЛЕКЦІЇ З КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

Підписано до друку _____ 2012 р.
Формат $60\times84\,{}^1\!/_{16}$. Папір офсетний.
Друк різографічний. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 24,2
Наклад 300 примірників. Замовлення №__

Віддруковано ПП «ТД «Едельвейс і К»»
Тел.: (0432) 550-333

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
ДК №3736