



PISA: МАТЕМАТИЧНА ГРАМОТНІСТЬ



Укладачі: Т. С. Вакуленко (національний координатор PISA), В. П. Горох, С. В. Ломакович, В. М. Терещенко.

Перекладач: К. Є. Шумова.

Редактори: Н. І. Хоменко.

У45 PISA: математична грамотність / уклад. Т. С. Вакуленко, В. П. Горох, С. В. Ломакович, В. М. Терещенко; перекл. К. Є. Шумова. – К. : УЦОЯО, 2018. – 60 с.

Видання містить резюме найважливіших теоретичних і методологічних положень рамкового документа міжнародного порівняльного дослідження PISA для оцінювання математичної грамотності 15-річних осіб. Для забезпечення належного сприйняття змісту рамкового документа видання доповнено оприлюдненими Організацією економічного співробітництва та розвитку завданнями, що були використані в дослідженнях попередніх циклів PISA і в яких реалізовано викладені в рамковому документі теоретичні положення щодо сутності математичної грамотності й засад її вимірювання. Посібник містить окремий розділ із завданнями й характеристиками стосовно їх оцінювання, а також розділ із завданнями, що можуть бути використані вчителями в шкільній практиці.

Видання призначене для широкого кола освітян – учителів, учених-педагогів, методистів, авторів підручників і навчальних посібників із математики, фахівців у галузі освітніх вимірювань, а також для учнів/студентів закладів загальної середньої освіти.

УДК 37.01

© Вакуленко Т. С., Горох В. П.,
Ломакович С. В., Терещенко В. М.,
укладачі, 2018

© Шумова К. Є., переклад, 2018

© Саченко О. М., оформлення, 2018

© Український центр оцінювання
якості освіти, 2018

PISA:
МАТЕМАТИЧНА
ГРАМОТНІСТЬ

Київ
2018

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ВСТУП	5
МАТЕМАТИЧНА ГРАМОТНІСТЬ	6
Визначення математичної грамотності	6
Погляд на учня/студента як на особу, яка активно розв'язує задачі PISA-2015	6
Різноманітність контекстів у задачах PISA	8
Роль математичних інструментів (зокрема й технологій PISA)	9
ОРГАНІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОГО ДОМЕНУ	9
Математичні процеси й загальні математичні вміння	10
Математичні процеси	10
Формулювання ситуацій математично	10
Застосування математичних понять, фактів, процедур і міркування	11
Інтерпретація, використання й оцінювання математичних результатів	11
Загальні математичні вміння, які лежать в основі математичних процесів	12
Змістові категорії математики	15
Зміни й залежності	16
Простір і форма	17
Кількість	17
Невизначеність і дані	18
Математичні теми, важливі для оцінювання математичної грамотності 15-річних учнів/студентів	18
Контексти	19
ОЦІНЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ	20
Структура математичного тестування PISA-2015	20
Бажаний розподіл завдань за математичними процесами	21
Бажаний розподіл завдань за змістовим категоріями	21
Бажаний розподіл завдань за контекстними категоріями	21
Діапазон складності завдань	22
Структура інструмента дослідження	22
Формати тестових завдань PISA	23
Математичні інструменти	23
Оцінювання завдань	24
Звітність про рівні математичної грамотності	25
Комп'ютерне тестування математичної грамотності	26
ЗАГАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ ВМІННЯ ТА ЇХНІЙ ЗВ'ЯЗОК ЗІ СКЛАДНІСТЮ ЗАВДАНЬ	28
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ (МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ВЧИТЕЛЯ)	30
1. МУЗИЧНИЙ ХІТ-ПАРАД	30
2. ФУДЗІ	33
3. ПІЦА	35



4. ПОБУТОВІ ВІДХОДИ	38
5. РОК-КОНЦЕРТ	40
6. КРОКИ	42
7. КЛУМБИ	45
ВИСНОВКИ	47
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ (РОЗДАТКОВІ МАТЕРІАЛИ)	48
1. МУЗИЧНИЙ ХІТ-ПАРАД	48
2. ФУДЗИ	49
3. ПІЦА	50
4. ПОБУТОВІ ВІДХОДИ	51
5. РОК-КОНЦЕРТ	51
6. КРОКИ	52
7. КЛУМБИ	53
ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ ПОКАЖЧИК	54
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	59

ПЕРЕДМОВА

Міжнародні порівняльні дослідження якості освіти ввійшли в практику обов'язкових заходів, спрямованих на аналіз стану освіти в різних країнах світу. У 2016 р. Україна долучилася до одного з найбільш масових із них – PISA (Programme for International Student Assessment), запровадженого й підтримуваного Організацією економічного співробітництва та розвитку (ОЕСР).

PISA вивчає те, наскільки 15-річні підлітки здатні навчальні здобутки використовувати в різноманітних життєвих ситуаціях для розв'язування особистісно й суспільно значущих проблем. Це міжнародне дослідження зосереджене на найважливіших напрямках навчання, а саме: читацька грамотність (reading literacy), математична грамотність (mathematical literacy) та природничо-наукова грамотність (science literacy). Результати дослідження використовують для прийняття обґрунтованих політичних рішень у галузі національної освіти.

У 2018 р. особливу увагу в дослідженні PISA приділено читацькій грамотності як провідній галузі оцінювання чергового трирічного циклу. До цього читацька грамотність була провідною галуззю у 2000 р. та 2009 р. Математична грамотність була основною галуззю у 2012 р.

Особливого значення для України цей міжнародний проект набуває з огляду на те, що в нашій країні започатковані важливі реформи, спрямовані на підвищення якості освіти, зокрема й на перегляд змісту навчання математики. Це дослідження сприятиме усвідомленню місця математики в українській школі та її змісту, адже розуміння математичної компетентності як однієї з вимірюваних у PISA ключових компетентностей не вповні відповідає усталеній в Україні традиції навчання математики в школі. З огляду на це надзвичайно важливим і корисним

для освітян України є те, що ОЕСР надала можливість ознайомитися з матеріалами PISA, які ґрунтуються на багаторічних дослідженнях у галузі освітніх вимірювань.

Ідеться про рамкові документи з кожної галузі дослідження, зокрема й математики, де висвітлено засадничі ідеї оцінювання математичної грамотності.

Пропоноване увазі українського читача видання містить резюме найважливіших теоретичних і методологічних положень рамкового документа з оцінювання математичної грамотності. Ці положення ґрунтуються на наукових і науково-методичних працях багатьох учених, відомих у галузі освітніх вимірювань, математики, методики викладання математики. З метою забезпечення належного сприйняття змісту рамкового документа читачами видання доповнене оприлюдненими ОЕСР завданнями з математичної грамотності, які раніше було запропоновано учням/студентам у дослідженнях попередніх циклів PISA і в яких реалізовано викладені в цьому документі теоретичні конструкти щодо сутності математичної грамотності й засад її вимірювання. Посібник містить розділ із завданнями й характеристиками стосовно їх оцінювання, а також розділ із завданнями, що можуть бути використані вчителями в шкільній практиці в процесі формування в учнів/студентів математичної компетентності.

Видання адресоване широкому колу освітян України – учителям, ученим-педагогам, методистам, авторам підручників і навчальних посібників із математики, науковцям у галузі освітніх вимірювань, а також учням/студентам закладів загальної середньої освіти.

ВСТУП

Під час проведення PISA-2015 математику оцінювали як другорядний (неосновний) домен (галузь). Проведення дослідження PISA з визначенням не тільки основних, а й неосновних галузей дає змогу систематично порівнювати результати учнів/студентів у певній галузі в часі. У цьому рамковому документі математичне тестування PISA описано й схарактеризовано відповідно до рамкового документа 2012 р., коли математика була основним доменом.

У PISA-2015 основною формою тестування для всіх доменів, зокрема для оцінювання математичної грамотності, було комп'ютерне тестування. Проте для країн, які віддали перевагу паперовій формі тесту, було надано інструменти в паперовому вигляді. Математичний компонент як для комп'ютерного, так і для паперового інструмента містив однакові незмінні кластери трендових завдань із математики. Кількість трендових завдань для обох другорядних доменів було збільшено, отже, було збільшено й охоплення тем, але зменшено кількість учнів/студентів, які виконували кожне завдання. Передбачалося, що завдяки такій структурі буде зменшено рівень упередженості щодо певних категорій респондентів і поліпшено вимірювання трендів.

Оскільки комп'ютерне тестування з математики у 2012 році було додатковою опцією й не всі країни брали в ньому участь, тестові завдання з нього не стали частиною тренду з математичної грамотності. Таким чином, оригінальні завдання комп'ютерної версії не були включені до оцінювання 2015 року (коли математичний домен оцінювався як другорядний), незважаючи на зміну у формі проведення тестування.

Рамковий документ відображає зміну у формі проведення тестування, зокрема відбиває результати обговорення поглядів щодо перенесення завдань паперового тестування в комп'ютерний формат і наводить приклади того, який вигляд це може мати. Проте визначення математичної грамотності та її складники залишилися не зміненими й збігаються з тими, які були використані у 2012 році.

Поточний рамковий документ із математики для PISA містить декілька основних розділів. Перший розділ – «Визначення математичної

грамотності» – пояснює теоретичні основи математичного оцінювання PISA, зокрема формально визначає складники *математичної грамотності*. Другий розділ – «Організація математичного домену» – описує три аспекти: а) математичні процеси й загальні математичні вміння (у попередніх рамкових документах – «компетентності»), які лежать в основі цих процесів; б) організація знань за змістовими категоріями математики (згідно з рамковим документом PISA-2012); математичні теми, важливі для оцінювання математичної грамотності 15-річних учнів; с) контексти, у яких учні/студенти стикаються з проблемами математичного характеру. Третій розділ – «Оцінювання математичної грамотності» – репрезентує структурні питання, які стосуються оцінювання, побудови тесту, та іншу технічну інформацію.

Рамковий документ 2012 р. було розроблено під керівництвом Математичної експертної групи 2012 р. (MEG) – органу, призначеного головними партнерами PISA та погодженого Керівною радою PISA (PGB). Серед десяти членів MEG – математики-науковці, математики-освітяни, а також експерти з оцінювання, технологій та освітніх тестувань із різних країн. На додачу до цього, з метою забезпечення більш широкого обговорення й рецензування, із проектом рамкового документа з математики ознайомилися більше 170 експертів із математики з більш ніж 40 країн. Ці експерти пізніше висловили свої думки щодо нього. Дві організації-партнери ОЕСР – Achieve та ACER (Австралійська рада з освітніх досліджень) – також провели декілька досліджень для управління розробкою рамкового документа. Розробка рамкового документа та програми PISA, як правило, отримує підтримку від країн-учасниць й спирається на інформацію про їхню поточну роботу (наприклад, дослідження, описане в публікації ОЕСР «Шляхи до успіху: як знання та навички 15-річних формують майбутнє в Канаді», 2010 р.) Нинішня версія рамкового документа з математики для PISA є документом, оновленим під керівництвом Математичної експертної групи 2015 р. – органу, призначеного партнером Core 1 та погодженого Керівною радою PISA.

МАТЕМАТИЧНА ГРАМОТНІСТЬ

Визначення математичної грамотності

Математична грамотність – це здатність людини формулювати, застосовувати й інтерпретувати математику в різноманітних контекстах. Вона включає математичні міркування й застосування математичних понять, процедур, фактів та інструментів для опису, пояснення й прогнозування явищ. Вона допомагає зрозуміти роль математики у світі, робити аргументовані умовиводи й приймати рішення, необхідні людям як творчим, активним і мислячим громадянам.

У сучасному світі розуміння математики є надзвичайно важливим для підготовки молодих людей до життя. Збільшення кількості проблем і ситуацій, із якими молодь стикається щодня, зокрема й у професійних контекстах, потребує певного рівня розуміння математики, здатності до математичного обґрунтування й використання математичних інструментів, щоб надалі ці проблеми можна було цілковито усвідомити й розв'язати. Математика є критично важливим інструментом для молоді, оскільки проблеми й виклики очікують на молоде покоління і в особистому, і в професійному, і в суспільному, і в науковому аспектах життя. Тому надзвичайно важливо розуміти, наскільки юнаки й дівчата, які тільки-но закінчили навчання в школі, адекватно підготовлені для того, щоб застосовувати математику для розуміння важливих питань і розв'язування значущих проблем. Тестування 15-річних підлітків дає можливість визначити ранні ознаки того, яким чином учні/студенти зможуть реагувати на різні майбутні життєві ситуації, що містять математичний складник.

Під час оцінювання знань 15-річних підлітків доцільно поставити запитання: «Якими знаннями важливо володіти особі, щоб бути здатною ефективно діяти в ситуаціях, що пов'язані з математикою?» Або конкретніше: «Що означає математична компетентність для 15-річної особи, яка готується до закінчення школи або до вступу до професійно-технічного чи вищого навчального закладу?» Згідно із цим рамковим документом, важливо визначити математичну компетентність таким чином, щоб вона акцентувала на здатності учнів/студентів формулювати, застосовувати й інтерпретувати математику в різних контекстах, а не на математичних знаннях і вміннях низького рівня. Визначення, швидше, призначене

описувати вміння учнів/студентів математично обґрунтовувати та використовувати математичні поняття, процедури, факти й інструменти для описування, пояснювання та прогнозування явищ. Така концепція *математичної грамотності* слугує підґрунтям для розвитку в учнів/студентів глибокого розуміння суто математичних понять, а також надає їм переваги в пізнанні абстрактного світу математики. У визначенні *математичної грамотності* для PISA особливий наголос варто робити на необхідності розвитку вміння учнів/студентів застосовувати математику в життєвому контексті, для чого необхідно забезпечити їх багатим досвідом використання математики на заняттях у навчальному закладі. Ідеться про тих 15-річних підлітків, хто невдовзі закінчуватиме своє навчання математики в навчальному закладі, а також тих, хто продовжуватиме вивчати її й надалі. Крім того, є підстави стверджувати, що мотивація майже всіх учнів/студентів до вивчення математики зростає, коли вони бачать зв'язок того, чого вони навчаються, із навколишнім світом та іншими дисциплінами.

Звичайно ж, *математична грамотність* не має вікових обмежень. Проте для оцінювання математичної грамотності 15-річних необхідно зважати на їхні вікові характеристики, відповідно до яких має бути визначено зміст, мову й контексти. Цей рамковий документ виділяє широкі категорії змісту, важливі для математичної грамотності людей узагалі, і конкретні математичні теми, важливі саме для 15-річних учнів/студентів. Математична грамотність не є властивістю, яку людина може мати або не мати. Це, найімовірніше, така властивість, яку набувають безперервно, завдяки чому одні особи стають більш математично грамотними, ніж інші. Водночас потенціал для її розвитку є завжди.

Погляд на учня/студента як на особу, яка активно розв'язує задачі PISA-2015

У формулюванні визначення математичної грамотності основний акцент зроблено на активному оволодінні математикою, яке включає математичні міркування й застосування математичних понять, процедур, фактів та

інструментів для описування, пояснювання й прогнозування явищ. Зокрема використані у визначенні дієслова «формулювати», «застосовувати» та «інтерпретувати» вказують на три процеси, що їх здійснюватимуть учні/студенти під

час активного розв'язування задач. Математичне формулювання ситуацій передбачає виявлення можливостей застосування й використання математики, тобто здатність побачити, що для розуміння або розв'язання певної проблеми може бути застосована математика. Це означає вміння трансформувати запропоновану ситуацію в таку форму, у якій вона підлягатиме математичній обробці, для чого її математично структурують і формулюють математичною мовою, визначивши змінні та зробивши спрощувальні припущення, які допоможуть розв'язати відповідну задачу. Застосування математики передбачає математичні міркування та застосування математичних понять, процедур, фактів й інструментів для отримання математичного розв'язання. Це означає проведення обчислень, перетворення алгебраїчних виразів, використання рівнянь й інших математичних моделей, аналіз інформації з використанням діаграм і графіків, надання математичного опису або пояснення та використання математичних інструментів для розв'язування задач. Математична інтерпретація передбачає розмірковування над математичними розв'язаннями та результатами й співвіднесення їх із контекстом задачі. Це означає оцінювання математичних розв'язків або їх обґрунтування в стосунку до контексту задачі та визначення того, чи є результати доречними та чи мають вони сенс у конкретній ситуації.

Метою саме такого визначення було також інтегрування у визначення математичної грамотності для PISA-2015 поняття математичного моделювання, яке є наріжним каменем рамкового документа PISA з математики (наприклад, ОЕСР, 2003). Оскільки людина застосовує математику й математичні інструменти для розв'язування проблем у життєвому контексті, її робота складається із серії етапів. На схемі 1 відображено основні конструкти в концепції оцінювання математичної грамотності та зв'язки між ними.

У зовнішній рамці на схемі 1 вказано, що математична грамотність посідає певне місце в контексті проблеми, яка виникає в реальному світі. У цьому рамковому документі такі задачі схарактеризовано у два способи. Контекстні категорії, які будуть детально описані далі в цьому документі, визначають сфери життя, де виникають проблемні ситуації. Контекст може бути особистого характеру та включати проблеми, які можуть постати перед людиною, її родиною або іншою групою людей. Інші проблеми можуть належати до суспільного (зосереджені на певній громаді – місцевій, національній або світовій), професійного (зосереджені на світі праці) або наукового (у якому є посилання на застосування математики у світі природи або технологій) контекстів. Задачу також характеризує



Схема 1. Модель математичної грамотності на практиці

походження математичного явища, що лежить в основі проблеми. Широкі класи явищ, для аналізу яких було створено математику, поділяють на чотири категорії математичного змісту: кількість, невизначеність і дані, зміни та залежності, простір і форма, які представлено в зовнішній рамці на схемі 1.

- Для розв'язування таких контекстоцентризованих задач людина має застосовувати математичне мислення та математичні дії. У рамковому документі це означено в три різні способи. По-перше, на схемі 1 указано на потребу людини спиратися на різні математичні поняття, знання й уміння під час виконання роботи. На такі математичні знання людина спирається тоді, коли вона представляє та повідомляє математичну інформацію, розробляє стратегії, аргументує або доводить щось тощо. Такі математичні дії схарактеризовані в цьому рамковому документі з погляду семи загальних математичних умінь, наведених у переліку на схемі 1 та описаних далі в цьому документі. Під час виконання роботи, яка потребує формулювання задачі, застосування математичних понять, процедур або інтерпретації математичного розв'язку, для пошуку відповіді в людини одночасно й успішно активуються її математичні вміння, які спираються на математичний зміст відповідних тем.
- Візуалізація циклу математичного моделювання у внутрішній рамці на схемі 1 відображає ідеалізовану та спрощену версію етапів, які починаються з «проблеми в контексті». Особа, яка розв'язує задачу, намагається знайти відповідний математичний зміст у проблемній ситуації та формулює ситуацію з математичної позиції відповідно до поданих понять і зв'язків, роблячи спрощувальні припущення. Таким чином, особа, яка розв'язує задачу, перетворює таку «проблему в контексті» на «математичну задачу», яка підлягає математичній обробці. Стрілка, яка спрямована вниз на схемі 1, символізує роботу, що виконується під час

застосування особою, яка розв'язує задачу, математичних понять, процедур, фактів й інструментів для отримання «математичних результатів». Зазвичай цей етап передбачає математичні міркування, оброблення, перетворення й обчислення. Після того «математичні результати» необхідно інтерпретувати з погляду початкової проблеми («результати в контексті»). На цьому етапі передбачається, що особа, яка розв'язує задачу, інтерпретує, застосовує й оцінює математичні результати та їхню обґрунтованість у контексті проблем реального світу. Ці процеси – формулювання, застосування й інтерпретації математики – є ключовими компонентами і циклу математичного моделювання, і визначення математичної грамотності. Кожен із цих трьох процесів спирається на загальні математичні вміння, які у свою чергу спираються на математичні знання особи, яка розв'язує задачу, у межах окремої теми.

За концепцією PISA, цикл моделювання є центральним у визначенні учня/студента як особи, задіяної в процесі розв'язування задачі. Разом із тим необхідність брати участь у циклі моделювання виникає не завжди, особливо в контексті тестування¹. Часто трапляється так, що значні частини циклу математичного моделювання виконують інші, а кінцевий користувач виконує лише деякі кроки цього циклу. Наприклад, інколи надаються такі математичні представлення, як графіки або рівняння, які можна безпосередньо використовувати для того, щоб відповісти на певне питання або зробити певний висновок. Із цієї причини в багатьох завданнях тесту PISA цикл моделювання представлено лише частково. У реальності особа, яка розв'язує задачу, іноді може переходити від процесу до процесу, повертаючись до раніше прийнятих рішень і припущень. Кожен із процесів циклу може викликати значні труднощі й потребувати неодноразового повернення до попередніх кроків.

¹ Niss et al., 2007.

Різноманітність контекстів у задачах PISA

Використання поняття «різноманітні контексти» у визначенні математичної грамотності є мотивованим й орієнтованим на конкретні контексти, які більш детально описані й наведені як приклади в цьому документі. Самі конкретні контексти не настільки важливі, але чотири категорії, які були обрані для використання в інструментах тестування (особистісний, суспільний, професійний і науковий),

відображають широке коло ситуацій, у яких особа може мати можливість використовувати математику. Таке визначення також акцентує увагу на тому факті, що математична грамотність допомагає особі усвідомлювати роль, яку відіграє математика у світі, а також допомагає робити аргументовані умовиводи й приймати рішення, необхідні цій особі як творчому, активному й мислячому громадянину.

Роль математичних інструментів (зокрема й технологій PISA)

У визначенні математичної грамотності йдеться також про використання математичних інструментів. До цих інструментів належать різні фізичні та цифрові прилади, програмне забезпечення та обчислювальні пристрої. У XXI ст. комп'ютерні математичні інструменти доволі широко використовуються в роботі, і з часом вони ставатимуть усе більш популярними. Із появою таких нових тенденцій у професійній діяльності людини все частіше виникає потреба в математичному розв'язанні проблем, а отже, й у використанні логічних міркувань, що потребує більш високого рівня математичної грамотності.

У 2012 р. комп'ютерне тестування з математики було другорядною (неосновною) опцією дослідження PISA. У циклі 2015 р. комп'ютерне тестування було основною формою оцінювання, хоча країни, які не віддали перевагу комп'ютерному тестуванню своїх учнів/студентів, мали можливість використовувати еквівалентні комп'ютерним паперові інструменти. Таким чином, посилення на математичні інструменти у визначенні математичної грамотності є особливо доречним. На сьогодні використання калькуляторами дозволено в будь-якому математичному тесту-

ванні PISA, якщо це не суперечить політиці країни-учасниці. У попередніх циклах PISA тестові завдання з математики розроблялися таким чином, щоб максимально уникнути необхідності використання калькуляторів, але із 2012 р. для виконання деяких завдань паперового тестування передбачене користування калькуляторами як допоміжними засобами. Комп'ютерне тестування 2015 р. включало, наприклад, такі інструменти, як онлайн-калькулятор, який було запропоновано разом із тестовим матеріалом для деяких завдань. Оскільки завдання PISA відображають проблеми, які можуть виникати в особистісному, професійному, суспільному та науковому контекстах, тобто там, де калькулятори цілком можуть бути використані в реальному житті, для виконання деяких тестових завдань PISA калькулятор пропонують як допоміжний засіб. Комп'ютерна форма тестування може забезпечити більш широке використання математичних інструментів, проте з метою дотримання максимальної порівнюваності результатів комп'ютерного та паперового тестувань із 2012 р. використовують лише екранний науковий калькулятор.

ОРГАНІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОГО ДОМЕНУ

У рамковому документі з математики експертами PISA визначено математичний домен у межах дослідження PISA й описано підхід до оцінювання математичної грамотності 15-річних учнів/студентів. Отже, PISA оцінює, наскільки вміло 15-річні учні/студенти можуть застосовувати математику, коли мають справу із запропонованими ситуаціями й задачами, більшість із яких надані в контекстах реального світу.

З огляду на цілі дослідження, визначення математичної грамотності PISA-2015 можна проаналізувати з погляду трьох взаємопов'язаних аспектів:

- математичні процеси, які описують, що роблять особи для встановлення зв'язку між контекстом проблеми й математикою і, таким чином, для розв'язування задачі, а також уміння, які лежать в основі цих процесів;
- математичний зміст, призначений для використання в тестових завданнях;
- контексти, яких стосуються тестові завдання.

Далі розкриємо ці аспекти математичного домену. Висвітлюючи їх, рамкові документи з математики попередніх циклів дослідження PISA дають можливість упевнитися в тому, що тестові завдання, розроблені для дослідження, відображають цілу низку процесів, змістів і контекстів, які в усій сукупності тестових завдань ефективно забезпечують реалізацію сутності математичної грамотності, визначеної рамковим документом.

Розглянемо деякі питання, які ґрунтуються на визначенні математичної грамотності:

- До яких процесів залучається людина під час розв'язування контекстоцентричних математичних задач? Прояву яких здібностей ми очікуємо від особи з підвищенням рівня її математичної грамотності?
- Якого змісту математичних знань ми можемо очікувати від особи, зокрема від 15-річного учня/студента?
- У яких контекстах можна спостерігати й оцінювати математичну грамотність?

Математичні процеси й загальні математичні вміння

Математичні процеси

У визначенні математичної грамотності йдеться про здатність людини формулювати, застосовувати й інтерпретувати математику. Ці три слова – формулювати, застосовувати й інтерпретувати – забезпечують корисну та значущу структуру організації математичних процесів, які описують, що людина робить для поєднання контексту проблеми з математикою і, таким чином, для розв'язання проблеми. У кожному з математичних завдань тестування PISA-2015 приділялася увага одному з трьох математичних процесів:

- формулювання ситуацій математично;
- застосування математичних понять, фактів, процедур і міркування;
- інтерпретація, застосування й оцінювання математичних результатів.

Для всіх, хто дотичний до щоденного навчання учнів/студентів, дуже важливо розуміти, наскільки ефективно учні/студенти здатні брати участь у кожному із цих процесів. Процес *формулювання* показує, наскільки ефективно вони можуть

Формулювання ситуацій математично

Під словом *формулювати* у визначенні математичної грамотності йдеться про здатність особи бачити й виявляти можливості використання математики й далі надавати контекстоцентрованої проблемі необхідної математичної структури в певній формі. У процесі математичного формулювання ситуацій особа вирішує, чи може вона відшукати математичну сутність проблеми з метою її аналізу та розв'язання. Вона переносить проблему з обставин реального життя в домен математики й наділяє реальну життєву проблему математичною структурою та представляє її в певній формі. Далі вона обмірковує проблему й знаходить у ній певні обмеження й припущення. Зокрема такий процес математичного формулювання ситуацій включає в себе такі дії:

- визначати математичні аспекти проблеми, яка описана в контексті реального життя, і виявляти значущі змінні;
- розпізнавати математичну структуру (зокрема закономірності, залежності та послідовності) у проблемах або ситуаціях;
- спрощувати проблему або ситуацію з метою зробити її придатною для математичного аналізу;
- установлювати обмеження й припущення для математичної моделі, що впливають із контексту;

розпізнавати можливості використання математики в проблемних ситуаціях і далі задіювати відповідну математичну структуру, щоб представити певну контекстоцентровану проблему в математичній формі. Процес *застосування* показує, наскільки добре учні/студенти можуть виконувати обчислення й операції, а також використовувати відомі їм математичні поняття й факти для розв'язання проблеми, сформульованої математично. Процес *інтерпретації* показує, наскільки ефективно учні/студенти можуть аналізувати математичні розв'язки або висновки, інтерпретувати їх у контексті проблеми з реального життя й визначати обґрунтованість результатів або висновків. Здатність учнів/студентів користуватися математикою для розв'язання різних проблем і застосовувати її в різних ситуаціях залежить від умінь, пов'язаних з усіма цими трьома процесами; розуміння ефективності учнів/студентів у кожній категорії може допомогти в прийнятті важливих освітніх рішень як на загальнодержавному рівні, так і на рівні політики, яку проводить навчальний заклад.

- представляти ситуацію математично, використовуючи відповідні змінні, символи, діаграми й стандартні моделі;
- представляти проблему в інший спосіб, зокрема організувати її згідно з математичними поняттями й робити відповідні припущення;
- розуміти й пояснювати зв'язок між специфічною мовою проблеми, тобто мовою, що відповідає контексту, і формальною мовою та символами, потрібними для представлення цієї проблеми в математичній формі;
- перекладати проблему на математичну мову або репрезентувати її в інший спосіб;
- визначати аспекти проблеми, які відповідають відомим задачам або математичним поняттям, фактам або процедурам;
- використовувати технологічні інструменти (наприклад, електронні таблиці або можливості графічного калькулятора) для відображення математичної залежності, яка описана математичною моделлю процесу чи явища.

Опубліковане завдання «Піца» (див. додаток Б) добре ілюструє перевірку в учнів/студентів уміння математично формулювати ситуацію. Якщо розв'язання задачі й обґрунтування розрахунків потребує від учнів/студентів виконання певних

арифметичних дій і визначення того, яку із піц можна купити за вигіднішою ціною, то справжній когнітивний вимір цього завдання потребує здатності побудувати математичну модель, яка б виражала концепцію вигідної ціни. Оскільки обидві піци мають однакову товщину, але різні діаметри, особа, яка розв'язує задачу, повинна встановити, що фокус аналізу має бути зосереджено на площі поверхні піци. У концепції вигідної ціни взаємозв'язок між кількістю піци та сумою грошей фіксується у вигляді моделі,

яка відбиває вартість однієї одиниці площі піци. Ще один приклад тестового завдання PISA, яке головним чином перевіряє вміння учнів/студентів формулювати ситуацію математично, – це завдання «Рок-концерт» (див. додаток Б). У ньому учням запропоновано усвідомити наведену контекстоцентровану інформацію (наприклад, розміри й форма поля, той факт, що вільних місць немає, і те, що фанати стоять) і перевести її в належну математичну форму з метою визначити кількість осіб, які прийшли на концерт.

Застосування математичних понять, фактів, процедур і міркування

Під словом *застосовувати* у визначенні математичної грамотності йдеться про здатність особи використовувати математичні поняття, факти, процедури й міркування для розв'язування сформульованих математичною мовою задач й отримання математичних висновків. У процесі використання математичних понять, фактів, процедур і проведення міркувань для розв'язування задач особа здійснює математичну діяльність, необхідну для отримання результатів і знаходження математичного розв'язання (наприклад, виконання арифметичних обчислень, розв'язування рівнянь, отримання логічних висновків із математичних припущень, виконання операцій у символічній формі, зчитування математичної інформації з таблиць і графіків, зображення фігур у просторі й операції з ними, аналіз даних тощо). Особа працює з моделлю проблемної ситуації, виявляє закономірності, установлює зв'язки між математичними об'єктами, а також наводить математичну аргументацію. Відповідні процеси застосування математичних понять, фактів, процедур і міркувань включають зокрема такі дії:

- розробляти й реалізовувати стратегії для знаходження математичних розв'язань;
- використовувати математичні інструменти, зокрема й технології, для знаходження точних і наближених результатів;
- застосовувати математичні факти, правила, алгоритми й структури в процесі знаходження розв'язань;
- виконувати операції з числами, графічними й статистичними даними й інформацією, алгебраїчними виразами й рівняннями, а також геометричними образами;

- будувати діаграми, графіки й геометричні конструкції, видобувати з них математичну інформацію;
- використовувати різні види представлення інформації й здійснювати переходи між ними в процесі знаходження розв'язань;
- робити узагальнення на основі результатів застосування математичних процедур із метою знаходження розв'язань;
- осмислювати математичну аргументацію й пояснювати та підтверджувати математичні результати.

Опубліковані тестові завдання PISA «Кроки» (див. додаток Б) є прикладами завдань, за виконання яких учні/студенти мають у своїх міркуваннях застосувати математичні поняття, факти й процедури. Розв'язання обох завдань залежить від уміння застосувати запропоновану модель (формулу) для визначення довжини кроку (завдання 1) або для швидкості руху (завдання 2). В обох завданнях задано математичні структури, за допомогою яких учні/студенти мають виконати алгебраїчні перетворення та розрахунки з метою знаходження розв'язку. Аналогічно й завдання «Клумби» (див. додаток Б) потребує від учнів/студентів застосування математичних понять, фактів, процедур і проведення міркувань. Головний когнітивний вимір цього завдання полягає в розробці стратегії для пошуку інформації щодо загальної довжини відрізків, довжина кожного з яких не відома, а також у міркуванні щодо порівняння периметрів. Учні/студенти також мають користуватися зображенням клумб і враховувати дожину наявної дерев'яної огорожі, але останнє потребує значно менших зусиль, ніж міркування щодо периметрів.

Інтерпретація, використання й оцінювання математичних результатів

Під словом *інтерпретувати* у визначенні математичної грамотності йдеться про здатність людини осмислювати й піддавати сумніву математичні розв'язання, результати або висновки й

інтерпретувати їх у контексті проблем реального життя. Цей процес включає повернення до контексту проблеми й визначення обґрунтованості результатів і їхнього сенсу в контексті проблеми.

Ця категорія математичних процесів охоплює як «інтерпретацію», так і «оцінювання» – процеси, позначені стрілками у наведеній вище моделі математичної грамотності на практиці (див. схему 1). Особам, залученим до цих процесів, може бути запропоновано сконструювати розв'язок і надати пояснення й міркування в контексті проблеми, одночасно осмисливши і процес моделювання, і його результати. Подібний процес інтерпретації, застосування й оцінювання математичних розв'язань зокрема включає такі дії:

- інтерпретувати математичний результат у контексті реального світу;
- оцінювати обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної проблеми;
- розуміти, як реальна ситуація зумовлює наслідки застосування математичних процедур або моделей, що вможливорює формулювання суджень щодо контексту про те, яким чином отримані результати можуть бути скориговані або застосовані;
- пояснювати причини наявності або відсутності сенсу в математичному результаті або висновку,

Загальні математичні вміння, які лежать в основі математичних процесів

Десятирічний досвід розробки тестових завдань PISA та аналізу відповідей учнів/студентів на такі завдання показав, що є набір загальних математичних умінь, які є основою кожного з описаних процесів окремо й математичної грамотності загалом. Робота Могенса Нісса та його данських колег² визначає вісім умінь («компетентностей»), що сприяють математичній поведінці особи. У рамковому документі 2003 р. було використано поняття «компетентності»³. Але із часу підготовки до циклу 2015 р. використане модифіковане формулювання цього набору умінь: на основі вивчення компетентностей, що знадобилися для розв'язання тестових завдань попередніх циклів PISA⁴, їх кількість зменшено з восьми до семи. Необхідність визначити перелік загальних математичних умінь із метою доповнення уявлень про роль конкретних математичних знань у процесі навчання математики є загальною визнаною. Показовими прикладами такого переліку є вісім математичних методів у Державній загальноосвітній програмі в Сполучених Штатах Америки (2010 р.), чотири ключові процеси (представлення, аналіз, інтерпретація й оцінка, а також комунікація й рефлексія) у Національній навчальній програмі з математики в Англії (Агенція з кваліфікацій та навчальних програм, 2007 р.), а також стандарти

2 Niss, 2003; Niss and Jensen, 2002; Niss and Højgaard, 2011.

3 OECD, 2003.

4 Turner et al., 2013.

зважаючи на певний контекст розглядуваної проблеми;

- розуміти обсяг і межі математичних понять і математичних розв'язань;
- критично осмислювати й установлювати межі моделі, використаної для розв'язування проблеми.

Опубліковане тестове завдання PISA «Побутові відходи» (див. додаток Б) якнайкраще ілюструє те, як можна виявити вміння учнів/студентів інтерпретувати, застосовувати й оцінювати математичні результати. Це завдання зосереджене на оцінюванні ефективності математичного результату – у цьому випадку уявної або побудованої стовпчастої діаграми – для зображення даних щодо часу розкладання декількох видів сміття, згаданих у завданні. Для виконання завдання потрібно поміркувати щодо наведених даних, математично осмислити взаємозв'язок між даними та формами їх представлення, а також оцінити результат. Особа, яка розв'язує цю задачу, має навести міркування, чому стовпчаста діаграма не підходить для відображення наведених даних.

процесів у Принципах і стандартах для математики в школі Національної ради учителів математики (NCTM, 2000). Загальні математичні вміння – це такий набір когнітивних здатностей, який мають учні/студенти або яких вони можуть набути з метою розуміти світ із математичної позиції, бути задіяними в ньому й розв'язувати проблеми. З підвищенням рівня математичної грамотності особа здатна застосовувати більший обсяг своїх загальних математичних умінь⁵. Тому більш активне застосування загальних математичних умінь передбачає підвищення складності завдань із математики. Таке спостереження було використано як підґрунтя для визначення різних рівнів математичної грамотності, відповідно до яких здійснювали звітування в попередніх циклах дослідження PISA та які буде описано далі в цьому розділі.

Зрозуміти те, наскільки складні завдання, можна шляхом з'ясування, які загальні математичні вміння необхідні для пошуку алгоритму розв'язування та його реалізації⁶. Найпростіші завдання потребують відносно простого застосування невеликої кількості знань і умінь. Складніші завдання потребують застосування більшого обсягу знань і умінь. Для прогнозування складності необхідно враховувати як обсяг умінь, так і складність їхньої активації, яка необхідна для того чи іншого завдання.

5 Turner and Adams, 2012.

6 Turner, 2012; Turner and Adams, 2012; Turner et al, 2013.

Сім загальних математичних умінь у поточній версії рамкового документа PISA:

- *комунікація (сприйняття й повідомлення)*. Математична грамотність передбачає володіння комунікативними вміннями. Особа сприймає наявність певного виклику в проблемній ситуації, і в неї виникає стимул розпізнати та зрозуміти таку ситуацію. Читання, розуміння й надання сенсу висловлюванням, питанням, завданням або об'єктам дає можливість особі сформувати ментальну модель ситуації, що є важливим кроком у розумінні, уточненні й формулюванні задачі. У процесі розв'язування проміжні результати, можливо, доведеться підсумувати й представити в конкретній формі. Пізніше, коли розв'язок буде знайдено, особі, яка розв'язує задачу, можливо, доведеться представити по-іншому й своє розв'язання, його пояснення та/або аргументацію.
- *математизація*. Математична грамотність може передбачати перетворення задачі, яка стосується реального світу, у суто математичну форму, що полягає в структуруванні, концептуалізації, формулюванні припущень та/або побудові моделі. Також математична грамотність може передбачати тлумачення й оцінювання математичного результату або математичної моделі стосовно початкової проблеми. Термін «математизація» використовується для того, щоб описати загальну математичну діяльність.
- *представлення*. Дуже часто математична грамотність передбачає представлення математичних об'єктів і ситуацій. Цей процес може потребувати їх вибору, інтерпретації, використання різних видів представлення та перетворення з метою зафіксувати ситуацію, установити зв'язок із проблемою чи представити отриманий результати. Таке представлення може мати вигляд графіків, таблиць, діаграм, рисунків, рівнянь, формул тощо.
- *аргументація й міркування*. Математичне вміння, яке називають аргументацією й міркуванням, задіяне на різних стадіях і в різних діях, пов'язаних із математичною грамотністю. Це вміння включає логічні узвичаєні процеси мислення, такі як осмислення різних аспектів проблеми й установлення зв'язку між ними, завдяки чому стає можливим робити умовиводи, перевіряти наведені аргументи або забезпечувати аргументацію тверджень чи розв'язання задачі.
- *вибудовування стратегій для розв'язування задач*. Математична грамотність часто потребує вибудовування стратегій для математичного розв'язування задач. Вибудовування передбачає низку процесів критичного

контролю, що спрямовує особу на ефективне розпізнавання, формулювання та розв'язання проблем. Це вміння характеризують як вибір або вибудовування плану (стратегії) використання математики для розв'язування задач, що постають із завдання або контексту, а також як вміння реалізувати цей план. Це математичне вміння може знадобитися на будь-яких етапах процесу розв'язування задачі.

- *використання символів, формальної й технічної мов та операцій*. Математична грамотність потребує використання символів, формальної й технічної мов та операцій. Це вміння передбачає регульовані математичними правилами розуміння, інтерпретацію, використання алгебраїчних виразів і перетворення їх у межах математичного контексту (зокрема й числові вирази та операції). Це вміння також включає розуміння й використання формальних концепцій на основі визначень, правил і формальних систем, а також використання алгоритмів дій із цими об'єктами. Використовувані символи, правила та формальні системи різнитимуться залежно від того, які конкретні математичні знання потрібні для розв'язання конкретного завдання, що потребує математичного формулювання, знаходження розв'язку та/або інтерпретації отриманого результату.
- *використання математичних інструментів*⁷. Останнє математичне вміння серед тих, які становлять основу математичної грамотності на практиці, полягає в спроможності використовувати математичні інструменти. Математичні інструменти включають фізичні інструменти, наприклад, вимірювальні прилади, а також калькулятори, та комп'ютерні інструменти, які стають усе більш доступними. Це вміння передбачає знання про різні інструменти, які можуть сприяти математичній діяльності, здатність використовувати їх, а також знання про обмеження таких інструментів. Математичні інструменти також можуть відігравати важливу роль у представленні результатів.

Описані вище математичні вміння різною мірою виявляють себе в кожному із трьох математичних процесів. Те, яким чином це відбувається, показано в таблиці 1. Більш детальну інформацію про ці вміння та їхній зв'язок зі складністю завдань можна знайти в додатку А. Крім того, для кожного з прикладів у додатку Б описано, які саме вміння активуються під час розв'язування учнями/студентами тієї чи іншої задачі.

⁷ У деяких країнах «математичними інструментами» називають також установлені математичні процедури, наприклад алгоритми. У рамковому документі PISA під «математичними інструментами» мають на увазі лише описані в цьому розділі фізичні й цифрові прилади.

Зв'язок між математичними процесами й загальними математичними вміннями

	Формулювання ситуацій математично	Застосування математичних понять, фактів, процедур і міркування	Інтерпретація, використання й оцінювання математичних результатів
Комунікація	Читання й розуміння висловлювань, питань, завдань, об'єктів або зображень, надання їм сенсу з метою формування ментальної моделі ситуації	Формулювання розв'язання, відображення ходу роботи, виконаної для знаходження розв'язання і/або надання анотації й представлення проміжних математичних результатів	Вибудовування й надання пояснень та аргументації в контексті проблеми
Математизація	Визначення основних математичних змінних і структур у реальній життєвій проблемі; установлення таких припущень, які можуть бути використані у відповідній ситуації	Розуміння контексту для управління процесом математичного розв'язування або його спрощення, наприклад, робота на тому рівні точності, який відповідає контексту	Розуміння обсягу та меж математичного розв'язання, що є результатом застосування математичної моделі
Представлення	Представлення реальної життєвої ситуації в математичній формі	Осмислення різних форм представлення інформації, інтеграція й використання їх при розв'язуванні проблеми	Інтерпретація математичних розв'язань у різних форматах відповідно до ситуації або способу їх використання; порівняння або оцінювання двох або більше форм представлення відповідно до ситуації
Аргументація й міркування	Пояснення, відстоювання або обґрунтування визначеного або побудованого представлення реальної життєвої ситуації	Пояснення, відстоювання або обґрунтування процесів і процедур, використаних для встановлення математичного результату або розв'язку; інтеграція фрагментів інформації для знаходження математичного розв'язання, узагальнень або багатокрокової аргументації	Осмислення математичних розв'язань і надання пояснень й аргументів, які підтримують, спростовують або уточнюють математичне розв'язання контексточною проблемі
Вибудовування стратегій для розв'язання задач	Вибір або вибудовування плану або стратегії розгляду контексточною проблемі з математичної позиції	Активізація ефективних і стійких механізмів управління багатокроковою процедурою, яка веде до математичного розв'язання, висновку або узагальнення	Вибудовування й реалізація стратегії з метою інтерпретації, оцінювання й валідації математичного розв'язання контексточною проблемі
Використання символів, формальної й технічної мов та операцій	Використання відповідних змінних, символів, діаграм і стандартних моделей із метою представлення реальної життєвої ситуації за допомогою символів/формальної мови	Розуміння й використання формальних конструкцій на основі визначень, правил і формальних систем, а також застосування алгоритмів	Розуміння зв'язку між контекстом проблеми й представленням математичного розв'язання; використання цього розуміння для полегшення інтерпретації розв'язання в контексті, оцінки здійсненності й можливих обмежень такого розв'язання
Використання математичних інструментів	Використання математичних інструментів із метою розпізнавання математичних структур або зображення математичних зв'язків	Знання про різні інструменти, які можуть допомогти в реалізації процесів і процедур для забезпечення математичних розв'язань, здатність використовувати їх належним чином	Використання математичних інструментів для встановлення обґрунтованості математичного розв'язання та його обмежень з огляду на контекст проблеми

Змістові категорії математики

Для життя в сучасному світі дуже важливими є розуміння математики й здатність застосовувати це розуміння й знання для розв'язування значущих контекстоцентризованих проблем. Це означає, що розв'язувати проблеми й інтерпретувати ситуації, сформульовані в особистісних, професійних, суспільних і наукових контекстах, необхідно з опорою на певне математичне розуміння й певні знання.

Упродовж тривалого часу розроблялися математичні структури як засіб для розуміння й інтерпретації природних і соціальних явищ. У школах навчальна програма з математики, як правило, є організованою навколо низки змістових ліній (наприклад, числа, алгебра, геометрія) і детальних списків тем, що відображають історично сформовані галузі математики й допомагають окреслити структуру навчальної програми. Проте поза межами занять із математики реальні ситуації зазвичай не супроводжені набором правил і рекомендацій, які б показували, як можна розв'язати ту чи іншу проблему. Ці ситуації, зазвичай, потребують певної творчості, яка допомагає побачити можливості застосування математики у відповідних ситуаціях та їх математичного формулювання. Часто ситуацію можна дослідити різними способами, спираючись на ті чи інші математичні поняття, процедури, факти та інструменти.

Оскільки метою PISA є оцінка математичної грамотності, було запропоновано таку організаційну структуру для знань математичного змісту, яка базується на математичних явищах, що лежать в основі широких класів задач і мотивують уведення математичних понять і розробку конкретних процедур. Наприклад, такі математичні явища, як невизначеність і зміни, лежать в основі багатьох поширених ситуацій, тож для аналізу таких ситуацій було розроблено конкретні математичні стратегії й інструменти. Такий спосіб організації змісту не є новим. Інші його приклади можна знайти у двох відомих публікаціях: «На плечах гігантів: нові підходи до вміння рахувати»⁸ і «Математика: наука про закономірності»⁹.

Як правило, навчальну програму з математики розробляють таким чином, щоб забезпечити учнів/студентів знаннями та навичками, які стосуються тих самих основних математичних явищ, отже, діапазон змісту, що виникає в математичному тестуванні PISA внаслідок саме такої його організації, є тісно пов'язаним із тим змістом, що зазвичай міститься в національних

навчальних програмах із математики. У цьому рамковому документі перераховані деякі математичні теми, які (на основі аналізу національних програм і стандартів одинадцяти країн) важливі для оцінювання математичної грамотності 15-річних підлітків.

Для того щоб організувати галузь математики з метою оцінювання математичної грамотності, важливо обрати структуру, яка відбиває історичні досягнення математики, є достатньо різноманітною й глибокою для виявлення основних елементів математики, а також включає традиційні математичні теми. Так історично склалося, що з відкриттям у XVII ст. аналітичної геометрії й математичного аналізу математика поєднала вивчення чисел, фігур, змін і залежностей. Аналіз таких явищ, як випадковість і невизначеність, стали важливими для розв'язування задач у XIX–XX ст. Таким чином, для рамкового документа PISA-2015 був обраний набір змістових категорій, який відбиває діапазон основних математичних явищ, що відповідають використаним у попередніх дослідженнях PISA змістовим категоріям.

Зі сказаного випливає, що перелік змістових категорій у поточній версії рамкового документа відповідає вимогам історизму, відносної цілісності охоплення математичної галузі й основних явищ, що мотивували її розвиток, а також відбиває основні теми шкільних програм. Ці чотири категорії характеризують математичний зміст, який є важливим для цієї дисципліни, та ілюструють широкі змістові групи тестових завдань, які використовувалися в інструментах PISA-2015:

- зміни й залежності;
- простір і форма;
- кількість;
- невизначеність і дані.

Завдяки цим чотирьом категоріям математичний зміст може бути організований у такий спосіб, який забезпечить охоплення різних тем у тестових завданнях, зосередження на важливих математичних явищах і водночас дасть змогу уникнути надмірної деталізації, яка заважатиме зосереджено працювати над важливими й цікавими проблемами, в основі яких лежать реальні ситуації. Хоча поділ за змістовими категоріями має велике значення для розроблення та відбирання завдань і для звітування про результати оцінювання, усе ж варто зауважити, що деякі математичні теми можуть стосуватися більше ніж однієї змістової категорії. Наприклад, в опублікованому завданні «Піца» необхідно визначити, ціна якої з двох круглих піц

⁸ Steen, 1990.

⁹ Devlin, 1994.

різного діаметра й різної вартості, але однакової товщини є більш вигідною (для ознайомлення із цим завданням і його аналізом див. додаток Б). Це завдання охоплює декілька математичних тем, зокрема вимірювання, кількісну оцінку (співвідношення «гроші–кількість», тобто вигідність покупки, міркування з використанням пропорцій та арифметичні обчислення, а також зміни й залежності (залежності між змінними й те, як вони змінюються залежно від розмірів піци). Разом із тим цю задачу було віднесено до категорії «зміни й залежності», тому що її розв'язування передбачає здатність учнів/студентів установити співвідношення між зміною площі кожної з двох піц (за зміни їх діаметрів) із відповідною зміною ціни. Зрозуміло, що інше завдання, пов'язане з площею круга, може бути віднесено до категорії завдань «простір і форма». Міжаспектні зв'язки, що пов'язують усі ці чотири змістові категорії, сприяють цілісності математики як дисципліни й виявляють себе в деяких тестових завданнях PISA.

Змістові категорії й більш конкретні математичні

Зміни й залежності

Як у реальному, так і в змодельованому світі між предметами й обставинами наявна величезна кількість тимчасових і постійних залежностей, у яких зміни відбуваються в системах взаємопов'язаних об'єктів або в тих випадках, коли елементи здійснюють вплив одне на одного. У багатьох випадках ці зміни відбуваються з плином часу, в інших – зміни в одному об'єкті або в кількох пов'язані зі змінами в іншому об'єкті. Деякі з цих змін мають дискретний характер, інші відбуваються безперервно. Оволодіння цією категорією математики передбачає розуміння фундаментальних типів змін і здатність визначати, коли вони відбуваються, для використання відповідної математичної моделі з метою опису й прогнозування змін. У математичному сенсі це означає моделювання змін і залежностей за допомогою відповідних функцій або рівнянь, а також створення, інтерпретацію й графічне зображення символічних залежностей і навпаки. *Зміни та залежності* можна спостерігати в багатьох різноманітних явищах, наприклад, у зростанні кількості організмів, у музиці, у циклічності пір року, у погодних умовах, у рівнях зайнятості населення й в економічних умовах. Такі аспекти традиційного математичного змісту, як функції та алгебра, зокрема й алгебраїчні вирази, рівняння й нерівності, табличні й графічні представлення, є головними в описі, моделюванні й інтерпретації змін. Наприклад,

теми, що відповідають рівню знань, потрібних 15-річним підліткам, описані далі в цьому розділі. Вони відображають рівень і широту змісту, який може бути включено до сучасних інструментів дослідження PISA. Далі за текстом спочатку наведено опис кожної змістової категорії та окреслено її значущість для розв'язання важливих проблем буття, після чого запропоновано більш конкретні математичні теми, які важливі для оцінювання математичної грамотності 15-річних підлітків. Ці конкретні теми відповідають спільному баченню завдань PISA, виробленому низкою країн та освітніх організацій. З урахуванням змісту навчальних програм, які було вивчено для встановлення переліку цих тем, удалося не тільки засвідчити, що саме вивчається на заняттях із математики в закладах освіти цих країн, але й показати, які знання та навички освітяни різних країн вважають важливими для підготовки учнів/студентів цього віку до життя та для формування їх як творчих, активних і мислячих громадян.

в опублікованій групі завдань «Кроки» (див. додаток Б) є два завдання, які ілюструють категорію «зміни й залежності». Увагу в них зосереджено навколо алгебраїчних відношень між двома змінними, що потребує від учнів/студентів активації їхніх алгебраїчних знань і вмінь. Учні/студенти мають застосувати наведену формулу довжини кроку для обчислення довжини кроку (одне завдання) та швидкості ходи (інше завдання). Опис представлення даних і залежностей за допомогою статистики також часто застосовують для зображення й інтерпретації змін і залежностей. Крім того, важливим для визначення й інтерпретації змін і залежностей є чітке усвідомлення цілого та його частин. Деякі цікаві залежності можна виявити під час геометричних вимірювань, наприклад, як може змінюватися периметр фігури зі зміною її площі, або які залежності є між довжинами сторін трикутників. Опубліковане завдання «Піца» (див. додаток Б) – це, здавалося б, суто геометричне завдання, але разом із тим воно ілюструє ситуацію, у якій головний виклик пов'язаний із розумінням зв'язків між змінними, концептуалізацією зв'язків між розміром піци та її ціною й усвідомленням того, яким чином відповідні властивості змінюються від меншої піци до більшої. Тому його було віднесено до групи завдань категорії «зміни й залежності».

Простір і форма

Категорія «простір і форма» охоплює широкий спектр явищ нашого візуального та фізичного світу: моделі, властивості предметів, розташування й орієнтації, представлення предметів, кодування й декодування візуальної інформації, навігація й динамічна взаємодія з реальними формами та їх представленнями. Простір і форма лежать в основі геометрії, але ця змістова категорія виходить за межі традиційного змісту геометрії, її значення й методів і спирається на інші математичні підгалузі, приміром, просторову візуалізацію, вимірювання й алгебру. Наприклад, форми можуть змінюватися, а точка при русі описувати деяке геометричне місце точок, а отже, дослідження цих процесів потребує використання функцій. До цієї змістової категорії також входять перетворення форм і їх інтерпретація, що потребує застосування різних інструментів – від програм динамічної геометрії до систем глобального позиціонування (GPS).

Програмою PISA передбачено, що розуміння низки основних понять і наявність певних умінь мають важливе значення для тих аспектів

Кількість

Кількість, можливо, є найпоширенішим і найважливішим математичним поняттям, що стосується взаємодії зі світом і функціонуванням у ньому. Воно включає в себе визначення кількості атрибутів об'єктів, залежностей, ситуацій у світі, розуміння різноманітних представлень таких визначень кількостей, а також оцінювання інтерпретацій та аргументів на основі кількості. Для визначення кількості будь-чого в реальному житті необхідно розуміти процес вимірювання, робити обчислення, знати одиниці вимірювань, числові тенденції й закономірності тощо. З погляду категорії кількості головними аспектами математичної грамотності є аспекти кількісного обґрунтування, наприклад числові значення, різні представлення чисел, точність обчислень, усні розрахунки, оцінювання обґрунтованості результату.

Визначення кількості – це основний метод опису й вимірювання різноманіття властивостей певних аспектів світу. Ця дія дає змогу моделювати ситуації, перевіряти зміни та залежності, описувати простір і форму та маніпулювати ними, організувати й інтерпретувати дані, вимірювати й оцінювати невизначеність тощо. У межах математичної грамотності категорія

математичної грамотності, які стосуються простору й форми. Математична грамотність у питаннях простору й форми включає цілу низку математичних процесів, наприклад, розуміння перспективи (як у живописі), складання та читання карт, перетворення форм за допомогою технологій і без них, інтерпретація видів тривимірних сцен із різних позицій і побудова зображень геометричних форм. Опубліковане завдання «Клумби» (див. додаток Б) належить до розглядуваної категорії, тому що в ньому відображено такий аспект категорії «простір і форма», як властивості фігур. У цьому завданні множинного вибору учням/студентам пропонують чотири різні форми клумб та запитують, які з них можна обнести 32 метрами дерев'яної огорожі. Це завдання потребує геометричних знань і проведення міркувань. Надано достатньо інформації для того, щоб безпосередньо знайти периметри трьох клумб, але для визначення периметра четвертої клумби учням/студентам доведеться провести якісні геометричні міркування.

кількості охоплює знання чисел і числових операцій, застосовуваних у різноманітних умовах. Опубліковане завдання «Рок-концерт» (див. додаток Б) є прикладом завдання, належним до категорії «кількість». У ньому учні/студенти мають визначити загальну кількість людей, які відвідали концерт, узявши до уваги розміри прямокутного майданчика, відведеного для глядачів. Хоча це завдання має певні елементи, які стосуються категорії «простір і форма», його основна ідея полягає в тому, щоб визначити адекватну міру площі, необхідної одній людині, а потім, обчисливши загальну площу майданчика, оцінити очікувану кількість відвідувачів. З іншого боку, з огляду на те, що це завдання передбачає вибір правильної відповіді з кількох запропонованих варіантів, учні/студенти можуть обрати інший шлях для знаходження розв'язку, скориставшись інформацією про площу майданчика та варіантами відповіді для обчислення площі, що припадає на одну особу з метою визначення того, який із цих варіантів забезпечує найбільш прийнятний результат. Оскільки варіанти відповіді надаються в тисячах (наприклад, 2 000, 5 000), це завдання також потребує від учнів/студентів навичок числової оцінки.

Невизначеність і дані

У науці, техніці й повсякденному житті невизначеність є звичним явищем. Отже, невизначеність – це явище, яке міститься в центрі математичного аналізу багатьох проблемних ситуацій. Щоб дослідити такі ситуації, було винайдено теорію ймовірностей та статистику, а також методи представлення й опису даних. Категорія «невизначеність і дані» охоплює визначення місця змін у процесах, усвідомлення кількісної оцінки цих змін, визнання невизначеності й похибки у вимірюваннях і знання про ймовірність. Крім того, до неї входять формування, інтерпретація й оцінювання висновків, зроблених у ситуаціях, для яких характерна невизначеність. Представлення й інтерпретація даних – це ключові поняття цієї категорії¹⁰.

Невизначеність є в науковому прогнозуванні, результатах опитувань громадської думки, прогнозах погоди та в економічних моделях.

¹⁰ Moore, 1997.

Варіативність стосується виробничих процесів, результатах тестів і досліджень; випадковість має принципове значення в багатьох заходах, пов'язаних із відпочинком. У традиційній навчальній програмі теми ймовірності й статистики забезпечують формальні засоби опису моделювання й інтерпретації конкретного класу явища невизначеності, а також навчають робити відповідні умовиводи. Крім того, знання чисел та аспектів алгебри (наприклад, графіків і символічного представлення) допомагає успішно вирішувати проблеми в рамках цієї змістової категорії. Оpubліковане тестове завдання «Побутові відходи» (див. додаток Б) віднесено до категорії «невизначеність і дані». У цьому завданні учні/студенти мають перевірити наведені в таблиці дані та пояснити, чому діаграма не підходить для зображення цих даних. Зосередження навколо інтерпретації й представлення даних є важливим аспектом категорії «невизначеність і дані».

Математичні теми, важливі для оцінювання математичної грамотності 15-річних учнів/студентів

Ефективне розуміння й розв'язування контекстоцентризованих проблем, пов'язаних зі змінами й залежностями, простором і формою, кількістю та невизначеністю й даними, потребує опори на різні математичні поняття, процедури, факти й інструменти на належному рівні глибини й досвіду. Організатори тестування математичної грамотності PISA прагнуть оцінити рівень і структуру математичних знань, необхідних 15-річним учням/студентам, щоб ті могли стати творчими, активними та мислячими громадянами, здатними формулювати обґрунтовані судження та приймати аргументовані рішення. Одночасно з цим програма PISA, хоча й не розроблена з метою перевірки навчальних стандартів або програм, відбиває ті математичні теми, які 15-річні учні/студенти мали можливість на цей час вивчити.

Чотири змістові категорії – «зміни й залежності», «простір і форма», «кількість» та «невизначеність і дані» – служать основою для визначення змісту оцінювання, проте між математичними темами та змістовими категоріями немає взаємно однозначної відповідності. Багато із математичних тем, які входять до наведеного переліку, стосуються всіх чотирьох змістових категорій, тим самим підсилюють цілісність математики як дисципліни. Цей перелік не є вичерпним, але надає уявлення про математичний зміст тестових завдань дослідження PISA.

- *Функції*: поняття функції. Переважно увагу приділено лінійним функціям, їх властивостям, різним формам їх опису й задавання. Зазвичай використовують такі способи задавання функцій – словесний, символічний, табличний і графічний.
- *Алгебраїчні вирази*: словесна інтерпретація та перетворення алгебраїчних виразів, що включають числа, символи, арифметичні операції, степені й корені.
- *Рівняння й нерівності*: лінійні рівняння й нерівності та ті, що зводяться до них, прості квадратні рівняння, аналітичні й неаналітичні методи розв'язання.
- *Системи координат*: представлення й опис даних, їх розташування й залежності між ними.
- *Плоскі й об'ємні геометричні фігури, залежності між ними та між їхніми елементами*: співвідношення між елементами фігур (наприклад, теорема Піфагора для прямокутного трикутника), взаємне розташування, подібність і конгруентність, динамічні відношення, пов'язані з перетворенням і рухом фігур, а також відповідність між плоскими та об'ємними фігурами.
- *Вимірювання*: кількісне визначення характеристик фігур та об'єктів, наприклад, вимірювання кутів, довжин відрізків, відстаней, периметрів, довжин кіл, площ й об'ємів.

- *Числа й одиниці вимірювання*: поняття числа та системи числення, представлення чисел, властивості цілих і раціональних чисел, уявлення про ірраціональні числа; вимірювання часу, вартості, маси, температури, відстані, площі й об'єму; одиниці вимірювання цих величин, їхні похідні та зв'язок між ними.
- *Арифметичні операції*: зміст і властивості арифметичних операцій та їхні позначення.
- *Відсотки, відношення та пропорції*: числовий опис величини за допомогою порівняльної мірки; застосування пропорцій і пропорційних міркувань для розв'язування задач.
- *Принципи підрахунків*: прості комбінації та перестановки.
- *Наближені обчислення*: наближені оцінюван-

ня кількостей і значень числових виразів, включаючи значущі цифри й округлення.

- *Збір, представлення й інтерпретація даних*: характер і походження різних типів даних, їх збір і різні способи їх представлення й інтерпретації.
- *Дисперсія даних та її опис*: поняття дисперсії, розподіл і центральні тенденції наборів даних, способи опису й інтерпретації їх у кількісному вираженні.
- *Вибірки*: поняття вибірки, утворення вибірки із сукупності даних, зокрема прості виведення на основі властивостей вибірки.
- *Випадковість і ймовірність*: поняття випадкової події, випадкової зміни та їх представлення, частота і ймовірність подій, основні аспекти поняття ймовірності.

Контексти

Важливим аспектом математичної грамотності є те, що математику залучають до розв'язання проблем, заданих у конкретному контексті. Контекст – це аспект особистісного світу індивідуума, у якому розглядають проблеми. Вибір відповідних математичних стратегій і представлень нерідко залежить від контексту, у якому виникає проблема. Уміння працювати в межах контексту є дуже значущим і ставить перед особою, яка розв'язує задачі, додаткові вимоги¹¹. Для дослідження PISA велике значення має використання широкого спектру контекстів, що надає можливості залучати максимально широкий діапазон особистих інтересів і ситуацій, у яких діють люди у XXI столітті.

У рамковому документі з математики для PISA-2015 було визначено чотири контекстні категорії, які використано для класифікації тестових завдань, розроблених для дослідження PISA.

- *Особистісна*. Проблеми, які входять до цієї категорії, сконцентровані навколо діяльності окремої особи, родини або групи людей. До типів контекстів, які розглядають як особистісні, належать, наприклад, гра, приготування їжі, покупки, здоров'я людини, власний транспорт, спорт, подорожі, складання особистого розкладу, планування особистого бюджету тощо. Опубліковане завдання «Піца» (див. додаток Б) подано в особистісному контексті: поставлене в завданні питання передбачає визначення того, ціна якої із піц вигідніша для покупця. Інше опубліковане завдання «Кроки» містить два питання, які так само подано в особистісному контексті: у першому потрібно застосувати математичну

формулу для обчислення довжини кроку однієї людини, а в другому – ту саму формулу для визначення швидкості іншої людини.

- *Професійна*. Завдання цієї категорії зосереджені на світі праці. Завдання, які належать до цієї категорії, можуть містити інформацію про таку діяльність працівника, як вимірювання, оцінка вартості й замовлення матеріалів для будівництва, нарахування заробітної плати й бухгалтерський облік, контроль якості, планування й інвентаризація, проведення дизайнерських та архітектурних робіт, прийняття рішення стосовно робочих питань тощо. У професійних контекстах може йтися про робочу силу будь-якого рівня – від некваліфікованих працівників до спеціалістів найвищої кваліфікації, проте завдання дослідження PISA мають бути зрозумілими для 15-річних підлітків. Опубліковане завдання «Клумби» (див. додаток Б) віднесено до професійної категорії, тому що в ньому йдеться про професійне завдання для садівника – спорудити огорожу навколо клумби. У такий же спосіб можна було б описати й контекст завдання про піцу, яке згадувалося раніше, якби ситуацію в ньому було подано з погляду продавця піци, а не покупця, і в цьому випадку його б віднесли до професійної категорії.
- *Суспільна*. Завдання цієї категорії зосереджені на певній громаді (місцевій, національній або світовій). До цієї групи контекстів увходять теми стосовно виборчих систем, громадського транспорту, урядування, соціальної політики, демографії, реклами, національної статистики й економіки тощо. Хоча людина задіяна в цих процесах на особистісному рівні, у межах категорії суспільних контекстів у центрі

¹¹ Стосовно результатів статистики див.: Watson and Callingham, 2003.

проблем, пов'язаних із цими процесами, є саме суспільство. Оpubліковане тестове завдання «Рок-концерт» (див. додаток Б) належить до суспільної категорії, тому що в ньому йдеться про організацію заходу, хоча запропонована ситуація спирається на особистий досвід перебування в натовпі.

- *Наукова.* Завдання цієї категорії передбачають застосування математики для аналізу явищ природного світу й наукових і технологічних питань і тем. Такі контексти охоплюють теми на зразок погода й клімат, екологія, медицина, наука про космос, генетика, вимірювання й власне світ математики тощо. Оpubліковане тестове завдання «Побутові відходи» (див. додаток Б) є прикладом завдання наукового контексту, тому що в ньому зосереджено увагу на наукових питаннях, які стосуються навколишнього середовища, зокрема на даних про час розкладання сміття. Суто математичні завдання, у яких усі елементи стосуються світу математики, також належать до категорії наукових контекстів.

Групи тестових завдань у дослідженні PISA об'єднані спільними стимульними матеріалами, тому зазвичай усі завдання групи належать до однієї контекстної категорії. Але бувають і винятки: наприклад, у межах однієї групи в одному із завдань стимул може бути розглянутий із погляду особистості, а в іншому – з погляду суспільства. Коли до завдання входять тільки математичні елементи без посилання до контекстних елементів групи завдань, до якої воно належить, його відносять до контекстної категорії всієї групи. У небагатьох випадках, коли завдання має суто математичні складники й не

має жодного посилання до контексту за межами математики, завдання зараховується до наукової контекстної категорії.

Використання цих контекстних категорій забезпечує основу для відбору різних за контекстом завдань, і таким чином оцінювання відбиває широкий спектр способів використання математики, які варіюються від щоденного особистого використання до наукового використання для розв'язування глобальних проблем. Більш того, важливо, щоб кожному контекстну категорію було представлено завданнями різного рівня складності. Оскільки головна мета цих контекстних категорій – це виклик учням/студентам розв'язувати проблеми в різних контекстах, кожна з категорій робить суттєвий внесок у вимірювання математичної грамотності. Не може бути так, що рівень складності тестових завдань, що представляють одну контекстну категорію, систематично є вищим або нижчим, ніж рівень складності тестових завдань, що стосуються іншої категорії.

Визначаючи актуальні контексти, надзвичайно важливо враховувати, що головна мета тестування PISA – оцінити здатність використовувати математичні знання, процеси й уміння, якими 15-річні підлітки оволоділи на цей час. Отже, контексти тестових завдань обирають з урахуванням відповідності інтересам і життю підлітків, а також вимог, які будуть ставити до підлітків на час їх увіходження до суспільства як творчих, активних і мислячих громадян. До обговорення ступеня такої актуальності керівництво проекту залучає національних координаторів програми із країн, що беруть участь у міжнародному дослідженні PISA.

ОЦІНЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ

У цьому розділі визначено підхід до застосування елементів описаного вище рамкового документа 2015 р. з погляду структури математичного компонента дослідження PISA, звітності про рівні оволодіння математичною грамотністю,

організації перенесення трендових завдань паперового тестування в комп'ютерний формат тестування та інших пов'язаних із математичною грамотністю актуальних питань.

Структура математичного тестування PISA-2015

Згідно з визначенням математичної грамотності всі тестові завдання дослідження PISA, які розроблені для паперового або комп'ютерного тестування, стосуються певного контексту. Завдання передбачають застосування важливих математичних понять, знань, міркувань і вмінь (володіння математичним змістом) на відповідному для 15-річних підлітків рівні згідно з

описом, наведеним вище. Надзвичайно важливо, щоб паперові та комп'ютерні інструменти дослідження містили належним чином урівноважену кількість завдань, які відбивають усі елементи рамкового документа з математики. Отже, рамковий документ визначає структуру та зміст тестування.

Бажаний розподіл завдань за математичними процесами

Усі тестові завдання дослідження PISA можна розподілити за трьома математичними процесами. Під час розробки тесту зусилля мають бути спрямовані на досягнення рівноваги між двома процесами, а саме процесом, що включає встановлення зв'язків між реальним світом і світом математики, і процесом, що залучає учнів/

студентів до роботи з математично сформульованою проблемою (задачею).

Варто зауважити, що завдання, які відповідають кожному з процесів, мають бути різної складності та стосуватися різних математичних категорій.

Таблиця 2

Приблизний розподіл балів за завдання з математики за процесами (для PISA-2015)

Категорія процесів	Відсоток балів за завдання
Формулювання ситуацій математично	Близько 25
Застосування математичних понять, фактів, процедур і міркування	Близько 50
Інтерпретація, використання й оцінювання математичних результатів	Близько 25
Усього	100

Бажаний розподіл завдань за змістовим категоріями

Відбір математичних завдань для дослідження PISA проводять таким чином, щоб вони відбивали знання математичного змісту, які було описано вище в цьому документі. Трендові завдання для математичного тестування PISA (на прикладі завдань для PISA-2015) охоплюють усі чотири змістові категорії (див. таблицю 3). Під час розроблення тесту його укладачі прагнуть досягти

такої рівноваги між балами за завдання, яка забезпечить приблизно однакові пропорції між змістовими категоріями, оскільки всі вони мають важливе значення в житті творчих, активних і мислячих громадян.

Необхідно зауважити, що завдання за кожною зі змістових категорій мають бути різної складності та стосуватися різних математичних категорій.

Таблиця 3

Приблизний розподіл балів за завдання з математики за змістовими категоріями (для PISA-2015)

Змістова категорія	Відсоток балів за завдання
Зміни й залежності	Близько 25
Простір і форма	Близько 25
Кількість	Близько 25
Невизначеність і дані	Близько 25
Усього	100

Бажаний розподіл завдань за контекстними категоріями

Кожне тестове завдання з математики для дослідження PISA (на прикладі PISA-2015) належить до однієї із чотирьох контекстних категорій. Трендові завдання, відібрані для математичного тестування, розподілено між чотирма контекстними категоріями відповідно до таблиці 4.

В умовах збалансованого розподілу не допускається домінування одного типу контекстів, завдяки чому забезпечується надання учням/студентам таких завдань, у яких представлено широкий діапазон особистих інтересів і коло ситуацій, із якими учні/студенти можуть стикатися у своєму житті.

Варто зауважити, що завдання за кожною з контекстних категорій мають бути різної складності

та стосуватися різних математичних категорій.

Таблиця 4

Приблизний розподіл балів за завдання з математики за контекстними категоріями (для PISA-2015)

Контекстна категорія	Відсоток балів за завдання
Особистісна	Близько 25
Професійна	Близько 25
Суспільна	Близько 25
Наукова	Близько 25
Усього	100

Діапазон складності завдань

Математичне тестування в межах дослідження PISA включає завдання широкого діапазону складності, який відбиває діапазон можливостей 15-річних підлітків. Тест включає і складні завдання, із якими можуть впоратися лише найбільш здібні учні/студенти, і простіші, що підходять для менш підготовлених учнів/студентів, які беруть участь у математичному оцінюванні. Із психометричної позиції, дослідження, яке призначене для оцінювання певної сукупності осіб, є найбільш виваженим та ефективним тоді, коли складність тестових завдань відповідає рівню підготовленості суб'єктів оцінювання. Більш того, шкала з описом рівнів математичної грамотності, якій приділено головну увагу при звітуванні про результати PISA, може містити корисні відомості про всіх учнів/

студентів лише в тому випадку, коли завдання, за допомогою яких складено опис усіх рівнів математичної грамотності, охоплюють увесь описаний діапазон умінь. Шкала рівнів математичної грамотності відображає зростання рівня активації загальних математичних умінь, детально описаних у додатку А «Загальні математичні вміння та їхній зв'язок зі складністю завдання». Попередні цикли PISA показали, що всі ці вміння є показниками глибини знань, і тому вони є основними чинниками для визначення складності завдань¹². Шкала, створена для циклу PISA-2012 і збережена до сьогодні, була розроблена після пілотного етапу PISA-2012 на основі опису необхідної активації цих умінь. Ця шкала забезпечує емпіричне вимірювання глибини знань кожним завданням.

¹² Turner, 2012; Turner et al., 2013.

Структура інструмента дослідження

У 2012 р. математична грамотність була основною галуззю дослідження. Тоді загальний час виконання всіх математичних завдань, що були використані в паперовому тестуванні, становив 270 хвилин. Математичні завдання були організовані в дев'ять кластерів, на виконання кожного з яких було відведено 30 хвилин. Кластери із завданнями були розподілені по тестових зошитах за змінною схемою. Також вони включали матеріал, який пов'язував завдання між собою.

У 2015 р. математична грамотність не була основною галуззю оцінювання, отже, учням/студентам було запропоновано для виконання меншу кількість кластерів, але подібну змінну схему розподілу кластерів по тестових зошитах було збережено. Сім математичних кластерів із попередніх циклів, зокрема й один «легкий» та один «складний», було використано в одному

з трьох способів комплектації залежно від того, обирала країна опцію «спільного розв'язування задач» (комплектація № 1) чи ні (комплектація № 2), а також у разі вибору опції «паперового тестування» (комплектація № 3). Використання семи кластерів замість трьох, як було прийнято в тих із минулих циклів, коли математика не була основною галуззю дослідження, дало можливість застосувати більшу кількість трендових завдань. Завдяки цьому було збільшено охоплення математичних елементів. Проте кількість учнів/студентів, які виконували ті самі завдання, зменшилася. Мета цієї схеми полягає в стабілізації й поліпшенні вимірювання трендів через зменшення потенційного рівня упередженості щодо певних категорій респондентів¹³. Для апробації режимів проведення

¹³ PGB (2012) 5 PISA 2015 design.

тестування та встановлення рівноцінності між тестуванням у паперовому й комп'ютерному форматах було проведено пілотний етап тестування.

Формати тестових завдань PISA

Для тестування математичної грамотності в межах програми оцінювання PISA використовують три формати завдань: завдання з розгорнутою або короткою відповіддю, а також завдання множинного вибору із запропонованих варіантів (MCQ). Завдання з відкритими відповідями потребують від учнів/студентів надання в довільній формі певної розгорнутої відповіді в письмовому вигляді. У таких завданнях учням/студентам також можуть запропонувати показати хід своєї роботи або пояснити, яким чином було знайдено відповідь. Для перевірки цих завдань потрібні кваліфіковані експерти, які вручну кодуватимуть відповіді учнів/студентів. Завдання з короткими відповідями забезпечують більш стандартизовані варіанти представлення розв'язання задач; відповіді учнів/студентів на такі завдання легко оцінювати як правильні або неправильні. Часто відповіді цього типу може бути внесено до спеціального програмного забезпечення й закодовано автоматично, але іноді їх також мають кодувати вручну кваліфіковані експерти. У завданнях із варіантами відповідей учні/студенти мають обрати одну або більше відповідей із запропонованих варіантів. Зазвичай ці відповіді обробляють автоматично. Для створення інструментів дослідження використовують приблизно однакову кількість завдань кожного із форматів.

Математичний тест PISA складається з груп тестових завдань, що містять словесний матеріал-стимул і, зазвичай, іншу інформацію, наприклад, таблиці, графіки, діаграми тощо та одне або більше завдань, пов'язаних із цим матеріалом-стимулом. Такий формат надає учням/студентам можливість більш детально зрозуміти контекст або проблему, виконуючи низку пов'язаних завдань. Проте модель вимірювання, яка використовується для аналізу даних PISA, передбачає незалежність кожного завдання, тому під час використання кожної групи завдань, що містить більше одного питання, перед укладачами тесту стоїть завдання забезпечити максимально можливу незалежність цих завдань. У межах дослідження PISA таку структуру, тобто структуру, представлену групами завдань, використовують для того, щоб уможли-

Математичні інструменти

Відповідно до політики проекту PISA учні/студенти мають змогу використовувати калькулятори для виконання завдань у паперовому форматі, оскільки зазвичай використовують

Така сама структура запланована до реалізації й для циклу PISA-2018.

вити застосування найреалістичніших контекстів, які б відбивали складність реальних ситуацій, й одночасно якнайефективніше використати час тестування. Проте дуже важливо гарантувати адекватний набір контекстів, який максимально знизить упередженість щодо них і забезпечить максимальну незалежність завдань. Тому за розроблення інструментів дослідження PISA багато уваги приділяють забезпеченню рівноваги між цими двома конкурентними вимогами.

Широкий діапазон умінь учнів/студентів, які беруть участь у дослідженні PISA, покривається різними рівнями складності завдань, обраних для тестування. Крім того, усі найважливіші категорії оцінювання (змістові категорії, категорії процесів і контекстні категорії) максимально представлені завданнями широкого діапазону складності. Складність завдань встановлено як один зі значущих параметрів вимірювання для пілотного етапу оцінювання, який попередньо проводять із метою вибору завдань для основного дослідження PISA. Завдання для інструментів тестування PISA відбирають з урахуванням їх відповідності категоріям рамкового документа та їхніх вимірювальних властивостей.

Додатково за розроблення та відбирання завдань значну увагу приділяють такому аспекту, як рівень оволодіння читанням, необхідний для успішної роботи над завданнями. Під час розроблення завдань важливою метою є сформулювати їх максимально зрозуміло. Також ураховують і необхідність уникати таких контекстів завдань, які б могли викликати культурні упередження, для чого всі обрані варіанти завдань перевіряють національні команди проекту PISA. Спеціалісти проекту ретельно перекладають тестові завдання на багато мов, а також виконують їх зворотний переклад і забезпечують дотримання багатьох інших протоколів. Останнім часом особливу увагу PISA зосереджено на такому аспекті, як упередженість завдань, пов'язана із переходом до комп'ютерної форми тестування, оскільки це може викликати певні проблеми в учасників тестування, які раніше не мали доступу до комп'ютерів на уроках із математики у своїх закладах освіти.

їх у своїх закладах освіти. Це дає можливість найбільш достовірно оцінити досягнення учнів/студентів і забезпечує найбільш інформативне порівняння ефективності систем освіти. Дозвіл

використовувати калькулятори загалом не відрізняється від інших рішень закладу освіти, пов'язаних із процесом навчання та не контрольованих програмою PISA. У 2012 р. вперше в оцінюванні математичної грамотності PISA деякі завдання паперового тестування були розроблені таким чином, що за допомогою калькулятора необхідні обчислення можна було зробити швидше й простіше. Це означає, що при виконанні окремих тестових завдань наявність калькулятора, імовірно, стала перевагою для багатьох учасників тестування. У паперовому тестуванні PISA-2012 також була необхідність виконувати дії, що не відповідають арифметичному функціоналу звичайного калькулятора. У межах необов'язкового комп'ютерного тестування PISA-2012 учасникам було надано

доступ до онлайн-калькулятора та/або програмного забезпечення з еквівалентними функціями для тих завдань, які могли цього потребувати. Для циклу PISA-2015 було впроваджено інструмент, який дав учасникам змогу вводити свої відповіді та показувати хід своєї роботи, що вкрай потрібно для оцінювання математичної грамотності. Цей інструмент дає можливість учасникам тестування вводити і текст, і математичні символи. Натискаючи кнопку, учні/студенти можуть увести дріб, квадратний корінь або показник степеня. Також доступні додаткові символи, наприклад, символ π та символи «більше» і «менше», та знаки математичних дій, такі як «множення» й «ділення» (див. зразок на схемі 2 нижче).

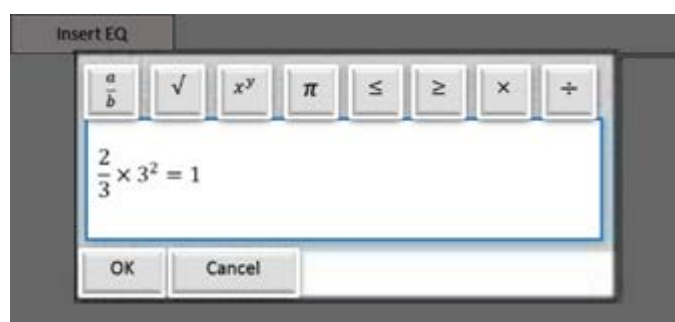


Схема 2. Зразок інструмента для редагування (PISA-2015)

Наразі набір онлайн-інструментів, доступних учням/студентам, містить базовий науковий калькулятор. Він включає операції додавання, віднімання, множення й ділення, а також квадратний корінь, число π , дужки, показник степеня, квадрат, дріб ($\frac{a}{b}$), обернену величину ($\frac{1}{x}$).

Калькулятор запрограмований таким чином, щоб відповідати загальноприйнятому порядку виконання математичних дій.

Учасники паперового тестування можуть використовувати портативний калькулятор, який схвалено для застосування 15-річними учнями/студентами у відповідних шкільних системах.

Математичні інструменти

Незважаючи на те, що учні/студенти можуть виводити хід своєї роботи на екран, експертна група з математики (MEG) рекомендує також дозволити їм використовувати блокнот (паперовий або дошку). Це необхідно для забезпечення порівнюваності з паперовим тестуванням 2012 р. Така вимога потребує подальшого логістичного аналізу й підтвердження.

Оцінювання завдань

Хоча більшість завдань оцінюють дихотомічно, тобто відповідь або зараховують, або не зараховують, відкриті завдання іноді потребують оцінювання частковим балом, що надає можливості оцінювати відповіді різного ступеня «правильності». Для забезпечення надійності й уніфікованості кодування відповідей серед усіх країн-учасниць кодерів (екзаменаторів), які проходять підготовку до кодування відповідей учнів/студентів, забезпечують детальною інстру-

кцією з поясненнями всіх варіантів відповідей на завдання, які можуть бути зараховані повністю або частково чи не бути зарахованими. Надзвичайно важливо також максимізувати порівнюваність між паперовою та комп'ютерною формами тестування, з огляду на що велику увагу приділено перевірці інструкцій із кодування щодо охоплення ними всіх значущих елементів відповідей.

Звітність про рівні математичної грамотності

Звітність про результати математичного тестування в межах дослідження PISA реалізують у різні способи. Після отримання результатів обчислюють середні показники загальної математичної грамотності досліджуваної вибірки для кожної з країн-учасниць, визначають кількість рівнів математичної грамотності учнів/студентів та для кожного визначеного рівня створюють типові описи відповідно до отриманих результатів. Для циклу 2003 р. було розроблено шкалу на основі чотирьох широких змістових категорій. Таблиця 5 містить зразок

опису шести рівнів оволодіння математичною грамотністю, представлених у звітах про загальні рівні математичної грамотності 2003, 2006 та 2009 рр. Ці описи було покладено також в основу шкалювання результатів із математики для PISA-2012. Їх остаточну версію було затверджено для використання у звіті про результати PISA-2015. У зв'язку із тим, що математична грамотність не була основною галуззю у 2015 р., звітування проводили тільки за загальною шкалою математичної грамотності.

Таблиця 5

Загальна шкала рівнів оволодіння математичною грамотністю

Рівень	Уміння учня/студента
6	На рівні 6 учні/студенти можуть осмислювати, узагальнювати та використовувати інформацію, отриману ними на основі дослідження й моделювання складних проблемних ситуацій, і застосовувати свої знання в нетипових контекстах. Вони можуть інтегрувати інформацію з різних джерел і представлену в різних формах, а також вільно перетворювати й переходити від однієї форми до іншої. На цьому рівні учні/студенти здатні демонструвати високий рівень математичного мислення й міркувань. Разом з оперуванням математичними символами та формальними математичними операціями й залежностями ці учні/студенти здатні свідомо застосовувати своє розуміння або вдаватися до інтуїції та передбачень із метою розробки підходів і стратегій розв'язування нових проблемних ситуацій. На цьому рівні учні/студенти здатні формулювати й точно коментувати свої дії та міркування стосовно отриманих результатів, інтерпретацій та аргументів, а також пояснювати доречність їх використання в певній ситуації
5	На рівні 5 учні/студенти можуть розробляти моделі складних проблемних ситуацій і працювати з ними, виявляти їхні обмеження й установлювати припущення. Вони можуть обирати, порівнювати й оцінювати відповідні стратегії розв'язування складних задач, які відповідають цим моделям. На цьому рівні учні/студенти можуть цілеспрямовано працювати із задачею та використовувати добре розвинені вміння мислити й міркувати, застосовувати належні форми представлення інформації, використовувати власну інтуїцію та описувати розглядувану ситуацію формально або за допомогою символів. Вони здатні осмислювати свою роботу та можуть формулювати й повідомляти свої інтерпретації й міркування
4	На рівні 4 учні/студенти можуть ефективно працювати з детальними моделями складних конкретних ситуацій, які можуть мати певні обмеження або потребують установлення певних припущень. Учні/студенти можуть відбирати та інтегрувати інформацію, представлену в різних формах, зокрема й у символній, безпосередньо пов'язуючи її з різними аспектами реального світу. На цьому рівні учні/студенти можуть використовувати обмежений діапазон розвинених умінь і можуть міркувати, виявляючи певну інтуїцію в нескладних ситуаціях. Базуючись на власних інтерпретаціях, аргументах і діях, вони можуть вибудовувати й наводити свої пояснення та докази
3	На рівні 3 учні/студенти можуть виконувати чітко описані процедури, зокрема й ті, що потребують послідовного прийняття рішень. Вони здатні вибирати та застосовувати прості стратегії для розв'язання задач. На цьому рівні учні/студенти можуть інтерпретувати й використовувати різні форми представлення інформації з різних джерел і міркувати, безпосередньо спираючись на неї. Вони зазвичай демонструють певну здатність оперувати процентами, звичайними й десятковими дробами та працювати з пропорційними залежностями. Наведені ними відповіді свідчать про здатність надавати елементарну інтерпретацію отриманих результатів і проводити міркування
2	На рівні 2 учні/студенти можуть інтерпретувати й упізнавати ситуації в контекстах, які (ситуації) не потребують більшого, ніж прямих умовиводів. Вони можуть видобувати відповідну інформацію лише з одного джерела й використовувати інформацію, представлену лише в одній формі. На цьому рівні учні/студенти можуть застосовувати базові алгоритми, формули, процедури або правила для розв'язування задач, у яких доводиться мати справу з натуральними числами. Вони здатні буквально інтерпретувати результати
1	На рівні 1 учні/студенти можуть виконувати завдання стосовно відомих їм контекстів, у яких усю необхідну інформацію наведено, а самі завдання чітко сформульовано. Вони здатні знаходити інформацію та виконувати прості процедури відповідно до прямих указівок у явно описаних ситуаціях. Вони можуть виконувати дії, які є очевидними й безпосередньо впливають із умови

Загальні математичні вміння відіграють головну роль у визначенні того, що означає бути на тому чи іншому рівні оволодіння математичною грамотністю загалом і кожним із процесів, що оцінюються: загальні математичні вміння визначають підвищення спроможності стосовно всіх аспектів математичної грамотності. Наприклад, у другому реченні опису 4-го рівня математичної грамотності (див. таблицю 5) висвітлено аспекти математизації й представлення, які притаманні цьому рівню. В останньому реченні підкреслено характерні для 4-го рівня способи комунікації, аргументації

й обґрунтування, які протиставлені коротким повідомленням і недостатній аргументації розв'язання на 3-му рівні й більш змістовному відображенню відповіді на 5-му рівні. У додатку А наведено опис загальних математичних умінь і пояснено, із чим пов'язаний перехід від одного до іншого рівня математичної грамотності. Раніше в цьому документі та в таблиці 1 («Зв'язок між математичними процесами й загальними математичними вміннями») кожний із математичних процесів також було описано з погляду загальних математичних умінь.

Комп'ютерне тестування математичної грамотності

Паперове тестування було основною формою оцінювання в дослідженні PISA в 2012 р. За переходу до комп'ютерної форми тесту у 2015 р. потрібно було забезпечити максимальну порівнюваність обох форм оцінювання. У цьому розділі описано те, що стало доступним завдяки впровадженню комп'ютерного тестування. Це сприяло реалізації наведених нижче можливостей, необхідних для забезпечення порівнюваності з попередніми дослідженнями. Математичне тестування PISA-2015 складалося лише з тих завдань, які було використано в паперовому тестуванні 2012 р. Проте описані тут нові можливості буде використано в майбутніх циклах тестування PISA, коли їх уведення можна буде контролювати, гарантуючи порівнюваність із попередніми циклами тестування.

Рішенню про включення комп'ютерного тестування до оцінювання математичної грамотності в рамках PISA-2012 передували два аспекти. По-перше, як у роботі, так і в повсякденному житті комп'ютери використовують настільки часто, що рівень володіння математичною грамотністю у XXI ст. вже включає в себе користування комп'ютером¹⁴. Комп'ютери тепер є невід'ємною частиною життя людей у всьому світі, тому що люди використовують їх для вирішення будь-яких питань – особистих, суспільних, професійних або наукових. Крім іншого, комп'ютери дають можливість використовувати інструменти для обчислення, представлення, візуалізації, модифікації, дослідження та проведення експериментів із великою кількістю різноманітних математичних об'єктів, явищ і процесів. У визначенні математичної грамотності в дослідженні PISA-2015 підкреслено важливу роль комп'ютерних інструментів і зазначено, що від математично освіченої людини очікують використання цих інструментів для розв'язання проблем, для опису, пояснення та прогнозування явищ. У цьому визначенні слово «інструмент»

означає калькулятори та комп'ютери, а також інші фізичні об'єкти, такі як лінійки та транспортири, які використовують для вимірювання та конструювання. Другий аспект полягає в тому, що комп'ютер надає розробникам тесту низку можливостей для створення більш інтерактивних, автентичних і цікавих завдань¹⁵. Такі можливості дають змогу розробляти нові форми завдань (наприклад, перетягування варіанта відповіді), надавати учням/студентам реальні дані (наприклад, великий за обсягом набір даних для сортування) або використовувати кольори та графіку для надання тесту більшої привабливості. Для тестування 2015 р. перший аспект зумовив прийняття рішення про комп'ютерне тестування як основну форму проведення дослідження. Проте важливо зазначити, що, оскільки збереження трендових завдань 2012 р. мало першочергове значення, можливість використовувати всі типи завдань, доступні в комп'ютерному варіанті, не було реалізовано.

Удосконалення, що стали можливими завдяки комп'ютерним технологіям, зумовили створення тестових завдань, які є більш цікавими, різноманітними й легшими для розуміння. Наприклад, учням/студентам може бути запропоновано динамічні стимули, тривимірні об'єкти, які можна обертати, або більш гнучкий доступ до відповідної інформації. Нові формати завдань, наприклад, ті, де учням/студентам треба «перетягти» інформацію або використати опцію «перемикач» на екрані комп'ютера (вибір одного елемента із представленої групи), дають можливість залучити учнів/студентів до більшої активності, запропонувати їм більше типів відповідей і надати повнішу картину математичної грамотності. Головною складністю реалізації цих задумів є забезпечення того, щоб відповідні тестові завдання оцінювали саме математичну грамотність і щоб залучення непритаманних математичній галузі елементів

14 Hoyles et al., 2002.

15 Stacey and William, 2013.

було мінімальним. З метою збереження трендів більш змістовні тестові завдання, які було запропоновано в додатковому комп'ютерному компоненті тесту 2012 р., не використовували в комп'ютерному тестуванні 2015 р. Однак виникла потреба в забезпеченні того, щоб використання комп'ютерного формату тестових завдань, які раніше були в паперовому форматі, суттєво не підвищило їхньої складності.

Дослідження показують, що в робочих процесах потреба у використанні математики все частіше виникає за наявності електронних технологій, тому математична грамотність і використання комп'ютера вже стали єдиним цілим¹⁶. Для працівників усіх рівнів сьогодні характерною є взаємозалежність між математичною грамотністю та використанням комп'ютерних технологій. Ключова проблема полягає в тому, щоб відрізнити математичні вимоги комп'ютерних завдань PISA від вимог, не пов'язаних із математичними знаннями, наприклад, вимог до тестових завдань із погляду інформаційних і комунікаційних технологій та формату їх представлення. Виконання тестових завдань PISA в комп'ютерному форматі замість виконання їх на папері переносить тест PISA в реальність XXI ст. та відповідає його вимогам.

Щодо виконання тестів у паперовому та комп'ютерному форматах зібрано велику кількість дослідницьких даних, однак ці результати не є однозначними. Деякі дослідження показують, що комп'ютерне середовище тестування може впливати на результати учнів/студентів. Одні дослідження повідомляють, що учні/студенти вважають розв'язування комп'ютерноорієнтованих задач цікавим і мотивувальним, попри частотну новизну типів завдань і їхній складний характер¹⁷. Разом із тим учні/студенти вказують, що іноді вони відволікалися на привабливу графіку, а деколи

16 Hoyles et al., 2002.

17 Richardson et al., 2002.

використовували навіть просту евристику для виконання завдань. В одному з найбільших досліджень щодо порівняння паперових і комп'ютерних тестів¹⁸ було встановлено, що в комп'ютерному тесті середня оцінка учнів/студентів восьмого класу на чотири бали перевищувала результати еквівалентного паперового тесту. Р. Беннетт¹⁹ зробив зі свого дослідження висновок, що комп'ютерна грамотність впливає на результати учнів/студентів під час виконання тесту з математики на комп'ютері. Водночас, як виявили інші дослідники, можливості комп'ютера (значна кількість функцій, якими може користуватися учасник тестування) також можуть упливати на результати тесту. Наприклад, Б. Мейсон²⁰ з'ясував, що на результати комп'ютерного тестування учнів/студентів порівняно із результатами паперових тестувань негативно вплинуло те, що в комп'ютерній версії не було можливості переглядати та перевіряти відповіді. Р. Беннетт²¹ виявив, що розмір екрана впливає на результати тестів із вербального мислення, можливо, через те, що для малих комп'ютерних екранів потрібне прокручування. З іншого боку, С. Ванг і співавтори²² провели метааналіз досліджень щодо вимірювання математичних досягнень учнів/студентів 12-го класу, який указує на те, що спосіб проведення тестування (комп'ютерний або паперовий) не має статистично значущого впливу на результати оцінювання. Крім того, останні дослідження щодо форм тестування, проведені в межах Програми міжнародного оцінювання компетентності дорослих (PIAAC), показали, що порівнюваності досягти можна (технічний звіт PIAAC, опублікований в жовтні 2013 р.). У цьому дослідженні дорослі випадковим чином ділилися на групи для проходження

18 ETS (2008).

19 Bennett (2008).

20 Mason (2001).

21 Bennett (2003).

22 Wang et al (2008).

Дослідження з режимів тестування 2015 р.

Для пілотного етапу PISA-2015 було заплановано дослідження, аналогічне дослідженню з режимів тестування PIAAC. Учні/студентів випадковим чином було розподілено на групи для комп'ютерного та паперового тестування із читацької, математичної та природничо-наукової грамотності. Кожна галузь включала шість кластерів трендових завдань із паперового тестування, що використовували в попередніх циклах PISA. Ці завдання було адаптовано до комп'ютерного формату так, щоб країни, які обрали комп'ютерне тестування, мали змогу посилатися на попередні цикли і їхні результати були порівнюваними з результатами країн, які обрали паперову опцію. Варто зазначити, що для перевірки відповідей приблизно для двох третин завдань у дослідженні PISA використовують формат об'єктивної оцінки, наприклад, множинний вибір, «істинний»/«хибний» і відкриті завдання з простою відповіддю, які легко адаптують для комп'ютерної перевірки та надійно оцінюють за допомогою комп'ютера; решту відповідей перевіряють кодувальники в кожній окремій країні. Ці більш складні завдання з відкритою формою відповіді було збережено та аналогічним чином перевірено для PISA-2015. Аналіз пілотного етапу дослідження PISA було використано для визначення порівнюваності двох режимів тестування за всіма трендовими завданнями. Результати було представлено технічній консультативній групі проекту (TAG), ОЕСР та всім країнам-учасницям у 2014 р.

комп'ютерного або паперового тесту із читацької та математичної грамотності. Більшість завдань, використовуваних у паперовому форматі, було адаптовано до комп'ютерного формату й використано в цьому дослідженні. Аналіз цих даних показав, що майже всі параметри завдань були стабільними в обох режимах, таким чином, було продемонстровано можливість розміщення результатів учасників обох форматів тестування на одній шкалі. З огляду на це було висунуто гіпотезу, що завдання з математичної грамотності для тестування 2012 р. можуть бути перенесені в комп'ютерний формат без впливу на тренди. Тим не менш дані про це продовжують збирати та

аналізувати під час проведення пілотних етапів дослідження.

Подібно тому, як паперове тестування залежить від набору основних навичок роботи з друкованими матеріалами, комп'ютерне тестування спирається на набір основних навичок використання комп'ютера. До останніх належать знання про основне комп'ютерне обладнання (наприклад, клавіатура та миша) і базові правила користування ним (наприклад, стрілки для переміщення вперед і конкретні кнопки для натискання при виконанні команд). У комп'ютерному тестуванні рівень таких навичок має зберігатися мінімальним.

ЗАГАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ ВМІННЯ ТА ЇХНІЙ ЗВ'ЯЗОК ЗІ СКЛАДНІСТЮ ЗАВДАНЬ

Щоб можна було передбачити емпіричну складність завдання, корисно визначити, які загальні математичні вміння необхідні для знаходження алгоритму розв'язання задачі та його реалізації²³. Найпростіші завдання потребують простої активації невеликого обсягу вмінь. Виконання найскладніших завдань передбачає складну активацію декількох умінь. Прогнозуючи складність завдань, необхідно враховувати як обсяг умінь, так і складність їх активації. Нижче описано фактори, які певним чином ускладнюють активацію кожного окремого вміння²⁴.

- *Комунікація (сприйняття й повідомлення).* Різні фактори визначають рівень і ступінь володіння особою вмінням комунікації, яке необхідне для виконання завдання, здатність же відповідати цій вимозі показує, якою мірою особа володіє цим вмінням. Із погляду особливостей сприйняття цими факторами є: довжина та складність уривка тексту або нетекстового фрагмента, які необхідно прочитати й інтерпретувати; ознайомленість з ідеями чи інформацією, поданими в тексті так, щоб їх можна було відрізнити від іншої інформації; упорядкованість інформації та її відповідність логіці процесів мислення, необхідних для інтерпретації та використання цієї інформації; наявність різних елементів (наприклад, текстової інформації, схем, графіків, таблиць, діаграм), які мають бути витлумачені з урахуванням зв'язків між ними. Із погляду володіння вмінням повідомляти найнижчий рівень спостерігається в завданнях, які передбачають надання числової відповіді. Вимоги до вміння повідомляти зростають за необхідності розгорнутого представлення розв'язання, наприклад, коли

необхідно надати усне чи письмове пояснення або обґрунтування результату.

- *Математизація.* Деякі завдання не потребують математизації з огляду на те, що проблема вже сформульована в математичній формі або встановлення зв'язку між моделлю та ситуацією, яку вона представляє, не потрібне для розв'язання цієї проблеми. Вимога математизації є меншою під час розв'язання задачі, яка вимагає вміння тлумачити задану модель і робити безпосередні умовиводи або прямо представляти життєву ситуацію в математичній формі (наприклад, структурувати та концептуалізувати ситуацію відповідним чином, визначити й обирати відповідні змінні, відбирати необхідні вимірювання, будувати діаграми). Необхідність у математизації зростає з додаванням вимог щодо вмінь модифікувати й використовувати запропоновані моделі в змінених умовах або інтерпретувати виявлені зв'язки, вибрати відомі моделі в межах конкретних чітко сформульованих обмежень, створювати моделі, де необхідні змінні, зв'язки й обмеження є явними та зрозумілими. На більш високому рівні потреба в математизації пов'язана з необхідністю створювати або інтерпретувати моделі в ситуації, коли потрібно врахувати кілька припущень, змінних, зв'язків та обмежень, а також перевірити, чи відповідає модель вимогам завдання, або оцінити чи порівняти моделі.

- *Представлення.* Необхідність використання цього математичного вміння на його найнижчому рівні виникає, коли потрібно оперувати наданою раніше відомою формою представлення, наприклад, переходити безпосередньо від тексту до чисел або зчитувати значення безпосередньо з графіка або таблиці. Завдання, які потребують

23 Turner, 2012, Turner та Adams, 2012; Turner et al., 2013.

24 see also Turner, 2012.

більших когнітивних зусиль, передбачають вибір та інтерпретацію однієї стандартної або відомої форми представлення запропонованої ситуації. Завдання ще більш високого когнітивного рівня потребують перетворення форми представлення ситуації з однієї в іншу або використання двох чи більше різних форм представлення одночасно, зокрема й модифікування представлення, а також безпосереднього створення форми представлення певної ситуації. Вищий рівень когнітивних умінь позначений необхідністю розуміти й використовувати нестандартні форми представлення ситуації, які потребують чіткого її тлумачення й інтерпретації, а також створювати представлення, яке фіксує основні аспекти складної ситуації, або порівнювати й оцінювати різні представлення ситуацій.

- *Аргументація й міркування.* У завданнях із дуже низькою вимогою активації цього вміння необхідне міркування може полягати в простому дотриманні наведеної інструкції; якщо потрібен дещо вищий рівень активації цього вміння, завдання мають спонукати до певного відображення зв'язків між різними частинами інформації, завдяки чому можна зробити конкретні умовиводи (наприклад, установити зв'язок між окремими елементами, наявними в задачі, або скористатися прямим обґрунтуванням стосовно одного з аспектів задачі). На більш високому рівні завдання потребують аналізу інформації для дотримання чи створення багатокрокової аргументації, установлення зв'язку між декількома змінними або виведення аргументації із пов'язаних джерел інформації. На найвищому рівні вимоги активації виникає потреба синтезувати й оцінювати інформацію, використовувати або створювати ланцюги міркувань для обґрунтування умовиводів, робити узагальнення з опорою на велику кількість елементів інформації й поєднувати їх належним чином.

- *Вибудовування стратегій для розв'язування задач.* У завданнях, які меншою мірою передбачають використання цього вміння, часто достатньо виконати дії згідно з указаною або очевидною стратегією. На трохи вищому рівні, можливо, знадобиться приймати рішення щодо вибору прийнятної стратегії, використовуючи відповідну наведену інформацію для формулювання висновку. Когнітивна вимога посилюється разом зі збільшенням необхідності в побудові стратегії перетворення наданої інформації з метою отримання результату. Найвищий рівень вимоги щодо використання цього вміння містять завдання, які потребують ретельного вибудовування стратегії для пошуку обґрунтованого рішення або узагальненого

висновку й для оцінювання або порівняння різних стратегій.

- *Використання символів формальної та технічної мов й операцій.* Необхідність активувати це вміння суттєво різниться в різних завданнях. Найпростіші завдання не передбачають активації жодних математичних правил або символічного вираження, окрім базових арифметичних обчислень із використанням невеликих або зручних для оперування чисел. Робота з більш складними завданнями може включати послідовні арифметичні обчислення, безпосереднє застосування простих функціональних залежностей (наприклад, лінійних залежностей), використання формальних математичних операцій (наприклад, прямої підстановки, стандартних арифметичних обчислень із використанням звичайних і десяткових дробів), активацію та пряме використання формальних математичних означень, правил або формул. Подальше зростання когнітивної вимоги пов'язане з необхідністю безпосереднього використання символів й оперування ними (наприклад, алгебраїчного перетворення формул) або активації й використання математичних правил, означень, процедур і формул. Вищий рівень вимоги характеризується необхідністю багатокрокового застосування формальних математичних процедур, майстерною роботою з функціональними алгебраїчними залежностями, одночасним використанням як математичних прийомів, так і знань для отримання результатів.

- *Використання математичних інструментів.* Завдання та дії, пов'язані з відносно низьким рівнем вимоги щодо цього вміння, можуть потребувати прямого використання відомих інструментів, наприклад вимірювальних засобів, у ситуаціях, коли використання цих інструментів є звичним. Більш висока вимога до використання цього вміння виникає в тому випадку, коли застосування інструментів передбачає низку процесів і потребує установлення зв'язків у запропонованій інформації з використанням таких інструментів або коли ознайомленість із самими інструментами є меншою, а ситуація, у якій потрібно застосувати інструмент, є недостатньо відомою. Вимога зростає, якщо інструмент має бути використаний для обробки й установлення зв'язку між кількома елементами даних або якщо інструмент необхідно застосувати в такій ситуації, яка значно відрізняється від ситуації, для якої способи застосування цього інструмента відомі, якщо сам інструмент є складним із різноманітними функціональними можливостями та якщо є необхідність у міркуваннях для розуміння й оцінки можливостей та обмежень інструмента.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ (МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ВЧИТЕЛЯ)

Наведені нижче тестові завдання дослідження PISA демонструють важливі аспекти й особливості рамкового документа PISA-2012. Для цього було відібрано сім завдань, що репрезентують різні їх типи та різні математичні процеси, зміст і контексти, а також описують активацію загальних математичних умінь. Водночас ці завдання не репрезентують повний спектр завдань стосовно будь-якого конкретного аспекту.

Хоча тестування PISA-2015 проводилося в комп'ютерному форматі, використані в ньому

завдання були взяті з паперового тестування PISA-2012. Наведені в цьому розділі демонстраційні завдання було використано в паперовому оцінюванні, а наведені статистичні дані стосуються результатів попередніх циклів тестувань. Кожне завдання подано в тому вигляді, у якому його було використано в паперовому тесті, а до деяких із них наведено скриншоти екранів, щоб показати, який вигляд вони мали в комп'ютерному форматі.

1. МУЗИЧНИЙ ХІТ-ПАРАД

Перше демонстраційне завдання має назву «Музичний хіт-парад». Воно складається зі стимулу, що містить текстову інформацію та діаграму, яка відображає продажі компакт-

дисків чотирьох музичних гуртів упродовж шести місяців (схема 5), і трьох завдань із множинним вибором (схема 6).

У січні вийшли нові компакт-диски гуртів «4 U2 Rock» і «Скажені кенгуру». Після цього в лютому вийшли компакт-диски гуртів «Нікому не рідна» і «Металеві музики». Нижче на діаграмі показано продажі компакт-дисків цих гуртів із січня до червня.



Схема 5. Стимул до демонстраційного завдання «Музичний хіт-парад»

Завдання 1: МУЗИЧНИЙ ХІТ-ПАРАД

Скільки компакт-дисків продав у квітні гурт «Металеві музики»?

- A 250
- B 500
- C 1000
- D 1270

Завдання 2: МУЗИЧНИЙ ХІТ-ПАРАД

У якому місяці гурт «Нікому не рідна» вперше продав більше компакт-дисків, ніж гурт «Скажені кенгуру»?

- A такого місяця не було
- B у березні
- C у квітні
- D у травні

Завдання 3: МУЗИЧНИЙ ХІТ-ПАРАД

Менеджер гурту «Скажені кенгуру» схвильований через те, що кількість проданих компакт-дисків зменшилася з лютого до червня.

Продаж якої кількості компакт-дисків цього гурту варто очікувати в липні, якщо та сама негативна тенденція зберігатиметься й надалі?

- A 70 компакт-дисків
- B 370 компакт-дисків
- C 670 компакт-дисків
- D 1340 компакт-дисків

Схема 6. Демонстраційні завдання 1–3 «Музичний хіт-парад»

Групу завдань «Музичний хіт-парад» було використано під час основного етапу дослідження PISA-2012. Кожне із завдань цієї групи віднесено до категорії «невизначеність і дані», оскільки учням пропонують прочитати, інтерпретувати й використати дані, представлені на діаграмі. Кожне з них належить до суспільної контекстної категорії, оскільки дані пов'язані з публічною інформацією стосовно продажу музичної продукції, яку можна знайти в газеті, музичному журналі або в мережі Інтернет. Перші два завдання – це зразки з категорії процесів

«інтерпретація, застосування й оцінювання математичних результатів», тому що ці завдання потребують інтерпретації інформації, відображеної на діаграмі; третє завдання відповідає категорії застосування математичних фактів, понять, процедур і міркувань, тому що воно зосереджене на застосуванні процедурних знань із метою оперування математичним представленням і здійснення подальших умовиводів. Ці три завдання були з групи найпростіших завдань, використаних на основному етапі дослідження PISA-2012.

Завдання 1

Завдання 1, наведене на схемі 6, спонукає безпосередньо прочитати дані з діаграми, щоб відповісти на питання, пов'язане з контекстом. Учні мають зорієнтуватися щодо наведеної інформації, визначити, яка група даних указує на продажі компакт-дисків певного гурту, яка частина діаграми представляє дані продажів за конкретний місяць для цієї групи, і прочитати значення «500 компакт-дисків» на вертикальній осі. Текст є простим і чітким із дуже низькою комунікативною вимогою. Необхідна стратегія є прямою: лише знайти визначену інформацію на діаграмі. Вимога математизації полягає в тому, щоб було зроблено умовивід стосовно ситуації з продажами безпосередньо з графічної моделі.

Завдання 2

Завдання 2 трохи складніше: близько 78 % учасників тестування правильно вказали відповідь С. Щоб відповісти на питання, учні повинні відстежити зв'язок між двома групами даних, зображеними на діаграмі, звертаючи увагу на те, яким чином ці зв'язки змінюються впродовж указанного періоду, із метою усвідомити, що вказана в завданні ситуація вперше виникла у квітні. Виконання завдання передбачає володіння вмінням повідомляти на тому ж рівні, що й виконання завдання 1. Стратегія розв'язання потребує трохи більшого, оскільки декілька елементів двох груп даних необхідно порівня-

Завдання 3

Завдання 3 певним чином відрізняється від перших двох тим, що основну увагу в ньому приділено розумінню математичних зв'язків, відображених на діаграмі, і використанню цих зв'язків для прогнозування продажів у наступному місяці. Завдання зберігає зв'язок із контекстом, але передусім воно потребує роботи з наведеною математичною інформацією. Один зі способів зробити це – зчитати з діаграми значення даних за місяцями, визначити прийнятне середнє значення щомісячного зниження показників і застосувати те саме зниження до останнього місяця. Вимога повідомлення залишається низькою. Основною проблемою є те, що учасники можуть відволікати групи даних, що стосуються інших гуртів. Проте неправильна відповідь, яку найчастіше обирали учасники, надавалася, імовірно, через помилкове розуміння фрази «та сама негативна тенденція». Загалом 15 % учасників надали відповідь С, вважаючи, що продажі за липень мають бути однаковими з продажами за червень. Можливо, вони обирали це значення, оскільки в липні зберігаються ті ж низькі показники обсягу продажів, що й у червні. Необхідна стратегія розв'язання, безумовно, є більш складною, ніж у перших двох

Уміння представляти необхідно застосувати на низькому рівні: потрібно лише прочитати значення з діаграми. Форма діаграми має бути добре відомою 15-річним підліткам, тож зусилля потрібні тільки для того, щоб прочитати дані на діаграмі. Одна вісь діаграми показує місяці як категорії, а висота відповідного стовпчика підписана (500), тому ніяке розуміння масштабу не потрібне. Із технічних знань потрібна лише ознайомленість із формою діаграми, умовивід, який потрібно зробити, є прямим, отже, вимога аргументації й міркування також є дуже низькою. Це завдання було достатньо легким, і близько 87 % учасників дослідження указали правильну відповідь – В.

ти між собою. Вимога математизації спонукає зробити умовивід стосовно ситуації з продажами, скориставшись діаграмою. Вимога представлення трохи вища порівняно із завданням 1, де необхідно лише зчитати з діаграми одне значення: тепер треба порівняти дві групи даних і змінну, яка позначає час. Вимога використання символів, формальної й технічної мов та операцій залишається на низькому рівні, оскільки необхідним є лише якісне порівняння, а вимога аргументації й міркування дещо вища, тому що необхідно здійснити невелику кількість послідовних міркувань.

завданнях, і для її реалізації необхідне певне спостереження. Потрібно вирішити, наприклад, чи варто використовувати всі п'ять точок даних із лютого до червня для цього гурту, а натомість використати середнє значення з лютого до червня, а також чи варто точно розрахувати, намалювати або візуалізувати лінію тренду, чи достатньо лише працювати із загальною оцінкою середніх показників, відзначаючи при цьому, що кожен місяць падіння обсягу продажів зростає дещо більше, ніж на одну поділку вертикальної шкали. Вимога математизації передбачає певне оперування наданою моделлю в контексті. Крім того, потрібно зробити деякі обчислення (декілька разів відняти багатоцифрові числа, прочитати значення на шкалі), що підвищує вимогу до вміння використовувати символи, формальну й технічну мови та операції. Вимога представлення передбачає визначення тенденції, відображеної на діаграмі. Також для розв'язування задачі потрібно зробити невелику кількість послідовних міркувань. Проте це завдання також вважається досить простим, і під час тестування на основному етапі дослідження приблизно 76 % учасників тестування обрали правильну відповідь – В.

2. ФУДЗІ

Гора Фудзі – це знаменитий дремаючий вулкан у Японії.



Завдання 1: ФУДЗІ

Гора Фудзі відкрита для сходження на неї лише з 1 липня до 27 серпня щороку. За цей період близько 200 000 людей сходять на гору Фудзі.

Скільки в середньому людей сходять на гору Фудзі щодня?

- A 340
- B 710
- C 3400
- D 7100
- E 7400

Завдання 2 : ФУДЗІ

Пішохідна доріжка Готемба, що веде в бік вершини гори Фудзі, має довжину близько 9 км.

Туристи мають повертатися з 18-кілометрової прогулянки не пізніше 20.00.

Тимофій розрахував, що він може йти вгору із середньою швидкістю 1,5 кілометра на годину, а спускатися – удвічі швидше. Ця швидкість ураховує перерви на їжу й час для відпочинку.

За допомогою показників швидкості, розрахованих Тимофієм, визначте, не пізніше якої години він повинен розпочати свою подорож, щоб повернутися до 20.00?

Відповідь:

Завдання 3: ФУДЗІ

Тимофій одягнув крокомір, щоб підрахувати свої кроки під час походу доріжкою Готемба. Його крокомір показав, що він пройшов 22 500 кроків угору.

Розрахуйте довжину кроку Тимофія під час його сходження 9-кілометровою доріжкою Готемба. Дайте відповідь у сантиметрах (см).

Відповідь: см.

На схемі 7 показано другу демонстраційну групу завдань «Фудзі». Перше завдання передбачає простий множинний вибір, а друге й третє – потребують відкритої відповіді з використанням чисел. На деякі тестові завдання PISA можна надати якісно різні відповіді, із якими пов'язані різні вміння, зокрема на третє завдання цієї групи відповідь може бути зарахована частково.

Тестове завдання «Фудзі» було використане на основному етапі дослідження PISA-2012 і згодом опубліковане для загального ознайомлення. Завдання 1 і 3 належать до змістової категорії «кількість», тому що в них учні мають проводити розрахунки із датами та результатами вимірювань, а також виконувати перетворення. У завданні 2 центральним поняттям є швидкість, і тому воно належить до змістової категорії «зміни й залежності».

Кожне із цих завдань належить до суспільної

Завдання 1

Завдання 1 передбачає обчислення середньої кількості туристів щодня. Текст доволі простий і чіткий; він не створює високої комунікативної вимоги. Вимога до вибудовування необхідної стратегії – помірною, тому що потрібно визначити кількість днів, зважаючи на наведені дати, і скористатися ними для обчислення середніх показників. Таке багатокрокове розв'язання потребує певного спостереження, яке так само є частиною вимоги вибудовування стратегії. Вимога математизації в цьому завданні дуже низька, тому що необхідні дані вказані безпосередньо (кількість туристів щодня). Також низькою є й вимога застосування вміння представлення: залучено лише числову інформацію та текст. Необхідні технічні знання

Завдання 2

Завдання 2 є значно складнішим: тільки 12 % учасників тестування правильно відповіли на нього під час основного етапу PISA-2012. Одна з причин цього – відкритий тип завдання, отже, учасники тестування не отримали жодних підказок щодо правильної відповіді; але, крім цього, є і багато інших причин. Під час тестування PISA-2012 близько 61 % із наданих відповідей на це завдання були неправильними.

Вимога повідомлення – низька, подібна до вимоги повідомлення в завданні 1. Завдання потребує лише числової відповіді. Вимога до вибудовування необхідної стратегії є набагато складнішою, оскільки потрібно скласти план із трьох основних частин: обчислити час сходження вгору й униз, зважаючи на показники середньої швидкості, і потім визначити час початку сходження, урахувавши час закінчення

контекстної категорії, тому що дані стосуються інформації про загальний доступ до гори Фудзі та її пішохідної доріжки. Перші два завдання є прикладом категорії процесу математичного формулювання ситуацій, оскільки основною вимогою цих завдань є створення математичної моделі, що може відповісти на поставлене питання.

Завдання 3 належить до категорії «застосування математичних фактів, понять, процедур і міркувань», тому що основна вимога в ньому – обчислити середнє значення, ураховуючи належне перетворення одиниць вимірювання, отже, ефективно працювати з математичними деталями задачі, а не тільки пов'язувати ці деталі з її контекстними елементами. На основному етапі PISA-2012 усі три завдання вирізнялися своєю складністю. Завдання 1 було середньої складності, а завдання 2 і 3 були дуже складними.

Й уміння включають знання того, як знаходити середнє значення, уміння обчислювати кількість днів між зазначеними датами, виконувати ділення (за допомогою калькулятора або без нього згідно з освітньою політикою країни) і правильно округлювати результат. Вимога аргументації й міркувань низька. Це завдання середньої складності: правильну відповідь С надали близько 46 % учасників основного етапу PISA-2012. Найпоширенішими неправильними відповідями для цього завдання були варіант Е (отриманий, імовірно, через неправильне обчислення часу – 27 днів замість правильної відповіді 31+27 днів) – 19 % відповідей, а також варіант А – 12 % відповідей.

походу та його тривалість. Рівень потрібної математизації помірно високий: математизація передбачає такі аспекти, як розуміння того, що час на перепочинок входить до загального часу походу, й усвідомлення того, що враховуємо довжину пішохідної доріжки двічі: спочатку при обчисленні часу підйому, а потім при обчисленні часу спуску. Вимога представлення – мінімальна: потрібна лише інтерпретація тексту. Вимога використання символів, формальної й технічної мов та операцій є помірно високою: усі розрахунки є відносно простими (хоча ділення на десятковий дріб – «1,5 км/год» – може викликати труднощі), але потребують певної точності, а також необхідно пам'ятати формулу для обчислення часу за швидкістю й відстанню. Також помірно високою є вимога аргументації й міркувань.

Завдання 3

Завдання 3 також є досить складним. Головну увагу в ньому приділено обчисленню середньої довжини кроку з урахуванням відстані й кількості кроків; також необхідно виконати перетворення одиниць вимірювання. Відповідь «40 см» було зараховано повністю для майже 11 % учасників PISA-2012, а зараховано частково – для 4 % учасників, які надали відповідь «0,4», залишивши результат у метрах, або «4000», де, імовірно, було використано неправильний коефіцієнт перерахунку метрів у сантиметри. У тестуванні PISA-2012 62 % із наданих відповідей на це завдання були неправильними. Комунікативна вимога в цьому завданні, як і в попередніх, залишилася низькою, оскільки текст є досить чітким і простим для інтерпретації, а у відповіді достатньо записати число. Вимога до вибудовування необхідної стратегії розв'язання завдання 3 подібна до тієї, що й у завданні 1: обидва завдання передбачають знаходження середнього значення. Хоча в обох завданнях використовують подібну модель для знаходження середнього значення, завдання 3 більшою мірою

потребує аргументації й міркувань, ніж завдання 1. У завданні 1 потрібно обчислити кількість людей, які сходять на гору Фудзі щодня, урахуваючи загальну кількість туристів за вказаний період. Завдання 3 потребує обчислення «довжини кроку» з урахуванням загальної відстані й загальної кількості кроків. Завдання 3 потребує більше міркувань, щоб урахувати залежність між вказаною відстанню й довжиною. Вимога математизації в завданні 3 теж вища, ніж у попередніх. Правильне розуміння контексту реального світу, зокрема того факту, що довжина кроку може бути близько 50 см (але не 500 см чи 0,5 см), також корисне для контролю реалістичності відповіді. Вимога використання символів, формальної й технічної мов та операцій досить висока, оскільки доводиться ділити маленьку величину (9 км) на велику (22 500 кроків) і використовувати відомий коефіцієнт перетворення. Вимога представлення низька, оскільки в завданні використовують лише текст.

3. ПІЦА

Опубліковане завдання «Піца», показане на схемі 8, є простим за формою, але доволі складним за змістом: воно демонструє різні аспекти, які містяться в рамковому документі PISA з математики. Уперше воно було використане на пілотному етапі дослідження PISA в 1999 році, після чого із демонстраційною метою було

опубліковане, і з 2003 р. його беруть як зразок завдань у кожній версії рамкового документа PISA з математики. Це завдання виявилось одним із найскладніших у пулі завдань, що були використані під час пілотного етапу тестування 1999 року: частка правильних відповідей становила лише 11 %.

Завдання: ПІЦА

У піцерії пропонують два види круглої піци однакової товщини, але різного розміру. Діаметр меншої піци дорівнює 30 см, і вона коштує 30 зедів. Діаметр більшої піци дорівнює 40 см, і вона коштує 40 зедів.

Яку із піц вигідніше купити? Наведіть хід своєї роботи.

.....
.....

Схема 8. Демонстраційне завдання «Піца»

Завдання «Піца» належить до категорії особистісного контексту, відомого багатьом 15-річним учасникам. Категорія саме особистісна, оскільки поставлене питання стосується того, яка з піц є найвигіднішою для покупця. Завдання ставить

відносно невисоку комунікативну вимогу, пов'язану із читанням, отже, більшість своїх зусиль учасник може докласти до сприйняття математичного підґрунтя, яке лежить в основі цього питання.

Повсякденні терміни необхідно інтерпретувати математично (кругла, однакової товщини, різного розміру). Змінній, яка означає розмір, надане математичне трактування у вигляді діаметра кожної з двох піц. Вартість подається в умовній валюті – зедах. Розмір і вартість пов'язані за допомогою поняття вигідності.

Тестове завдання базується на декількох розділах математики. У ньому є геометричні фігури, які зазвичай належать до категорії «простір і форма». Піцу може бути змодельовано як невисокий круглий циліндр, і для розв'язання задачі потрібно використати формулу площі круга. Завдання також стосується змістової категорії «кількість», оскільки пропонується зіставити кількість піци з кількістю грошей. Проте розв'язування цієї задачі полягає в концептуалізації зв'язків між розмірами кожної з піц і їхньою вартістю. Оскільки вказані аспекти становлять сутність задачі, завдання розглядається як таке, що належить до змістової категорії «зміни й залежності».

За процесом задача належить до категорії формулювання. Ключовим кроком до її розв'язання, який, насправді, є головною когнітивною вимогою, є формулювання математичної моделі, яка б утілювала поняття вигідності (співвідношення ціна–кількість). Особа, яка розв'язує задачу, має усвідомити, що, оскільки всі піци мають однакову товщину, увагу під час аналізу варто зосередити на поверхні піци, яка є кругом, а не на її об'ємі або масі. Потім залежність між кількістю піци й кількістю грошей фіксується в понятті вигідності, змодельованому як «вартість однієї одиниці площі». Допускається й такий варіант, як «площа на одиницю грошей». Вигідність для обох кругів можна обчислити й порівняти: для більшого круга кількість грошей, сплачених за одиницю площі менша, отже, інтерпретуючи результат, доходимо висновку, що більша піца є вигіднішою.

Інший хід міркувань, який ще точніше показує належність завдання до категорії «зміни й залежності», може бути такий: у завданні явно або опосередковано вказано на той факт, що площа круга збільшується пропорційно квадрату діаметра, тому вона збільшилася в $(4/3)^2$ рази, тоді як вартість збільшилася лише в $4/3$ рази. Оскільки $(4/3)^2$ більше, ніж $4/3$, можна зробити висновок, що більша піца є вигіднішою.

Хоча основною вимогою та ключем до розв'язування цієї задачі є елементи формулювання, які свідчать про її належність до категорії процесу

«формулювання ситуацій математично», очевидно є також наявність у ній двох інших математичних процесів. Сформульована математична модель має потім бути продуктивно застосована: мають бути наведені міркування на основі відомих математичних фактів і правильно обчислені площа й відношення величин. Далі результат має бути інтерпретований відповідно до поставленого в задачі питання.

Процес розв'язування задачі «Піца» потребує активації різних загальних математичних умінь. Умова завдання спочатку спонукає до застосування вміння комунікації на низькому рівні – лише до читання й інтерпретації наведеного тексту задачі, а далі, коли необхідно представити й пояснити розв'язання, потрібні більші зусилля. Ключова вимога завдання – це необхідність математизувати ситуацію, а саме сформулювати модель, яка фіксує вигідність придбання піци (співвідношення «ціна–кількість»). З метою пошуку розв'язання задачі особа має вибудувати представлення її відповідних аспектів, тому зокрема й записати за допомогою символів формули для обчислення площі й відношення, яке відображає вигідність покупки. Вимога міркувань (наприклад, з'ясування того, що товщину піци варто ігнорувати, а також обґрунтування вибраного підходу та отриманих результатів) є значущою; також важливою вимогою в цьому завданні є необхідність вибудовування стратегії керування процесами обчислення й моделювання. Використання символів, формальної й технічної мов та операцій передбачене вимогою застосування концептуальних, фактичних і процедурних умінь для виконання геометричних дій із кругом та обчислення відношень. Застосування математичних інструментів вочевидь знаходиться на низькому рівні в разі ефективного використання калькулятора учасниками.

Для більш детального зображення складників рамкового документа на схемі 9 наведено зразок відповіді учня на завдання «Піца». Відповідь, аналогічна цій, оцінюється як повністю правильна.

На схемі 10 зображено, який вигляд могло б мати тестове завдання «Піца» в комп'ютерному форматі. На екрані представлено варіанти відповіді й надано текстове поле для запису ходу міркувань. Відповідь зараховують як правильну в разі належного виконання обох вимог: вибору правильної відповіді з двох варіантів і запису ходу міркувань.

Важлива частина формулювання	Товщина піци однакова, отже, я можу порівняти їхні площі.
Застосування знань із категорії «Простір і форма» та «Кількість»	Площа піци 1: $= \pi r^2 = \pi \times 15 \times 15 \text{ см}^2 = 106,5 \text{ см}^2$
	Площа піци 2: $= \pi r^2 = \pi \times 20 \times 20 \text{ см}^2 = 1256 \text{ см}^2$
Формулювання математичної моделі для оцінки вигідності	Ціна за 1 см^2 піци 1: $= 30 \text{ зедів} / 106,5 \text{ см}^2 = 0,04 \text{ зедів/см}^2$
	Ціна за 1 см^2 піци 2: $= 40 \text{ зедів} / 1256 \text{ см}^2 = 0,03 \text{ зедів/см}^2$
Інтерпретація математичного результату в термінах реального світу	Отже, 1 см^2 піци 2 дешевше + вона вигідніша

Схема 9. Зразок відповіді на завдання «Піца»

PISA-2015
? ← →

Піца
 Завдання 1/1

Прочитайте інформацію про дві піци. Виберіть один із двох варіантів, а потім нижче наведіть хід своєї роботи.

У піцерії пропонують два види круглої піци однакової товщини, але різного розміру. Діаметр меншої піци дорівнює 30 см, і вона коштує 30 зедів. Діаметр більшої піци дорівнює 40 см, і вона коштує 40 зедів.

Яку із піц вигідніше купити?

Більшу піцу
 Меншу піцу

Наведіть хід своєї роботи.

Схема 10. Завдання «Піца» в комп'ютерному форматі

4. ПОБУТОВІ ВІДХОДИ

Тестове завдання «Побутові відходи» (див. схему 11) також ілюструє аспекти рамкового документа з математики. Це відкрите завдання було використано на основному етапі тестування PISA у 2003 році, після чого було опубліковане.

Середній відсоток правильних відповідей на це завдання серед країн ОЕСР дещо перевищував 51 %, таким чином, завдання виявилось середнім за складністю.

Завдання: ПОБУТОВІ ВІДХОДИ

Виконуючи домашнє завдання з природознавства, учні зібрали інформацію про час розкладання декількох видів сміття, що викидають люди:

Види сміття	Час розкладання
Бананова шкірка	1–3 роки
Апельсинова шкірка	1–3 роки
Картонні коробки	0,5 року
Жувальна гумка	20–25 років
Газети	Декілька днів
Посуд із полістиролу	Більше 100 років

Один з учнів хоче представити зібрані дані у формі стовпчастої діаграми.

Наведіть одну причину, чому стовпчаста діаграма не підходить для відображення цих даних.

.....

Схема 11. Демонстраційне завдання «Побутові відходи»

Це завдання наукового контексту, тому що в ньому йдеться про дані наукового походження (час розкладання сміття). Категорія математичного змісту, до якої належить завдання, – «невизначеність і дані», оскільки, у першу чергу, воно стосується інтерпретації й представлення даних, хоча категорія «кількість» також задіяна в ньому у вигляді прихованої вимоги порівняти представлені інтервали часу. Завдання містить математичний процес інтерпретації, застосування й оцінювання математичних результатів, тому що увагу в ньому зосереджено на оцінюванні ефективності математичного представлення даних, які стосуються контекстних елементів реального світу (у цьому випадку уявної або побудованої діаграми). Завдання

спонукає до міркувань щодо наведених даних, до математичного осмислення зв'язку між даними та формою їхнього представлення, а також до оцінювання результату. Особа, яка розв'язує цю задачу, має усвідомлювати, що ці дані буде складно належно представити на діаграмі через одну з двох причин: через широкий діапазон часу розкладання деяких видів сміття (цей діапазон складно відобразити на стандартній діаграмі) або через великий розкид даних щодо часу розкладання деяких видів сміття (на осі часу, яка дає змогу показати найбільший період розкладання сміття, найменші періоди будуть невидимими). Наведені нижче зразки відповідей учасників було зараховано як повністю правильні для цього завдання.

Відповідь 1: «Це буде важко зробити за допомогою стовпчастої діаграми, тому що є такі дані, як 1–3, 1–3, 0,5 тощо, отже, зробити її точною буде важко».

Відповідь 2: «Оскільки є велика різниця між найбільшим періодом часу розкладання деяких видів сміття й найменшим, буде важко відобразити точні дані і для 100 років, і для декількох днів».

Схема 12. Зразки відповідей на завдання «Побутові відходи»

Процес розв'язування завдання «Побутові відходи» потребує активації таких загальних математичних умінь:

- комунікація (сприйняття – повідомлення) –

активується там, де необхідно прочитати текст та інтерпретувати таблицю, крім того, повідомлення має бути більш високого рівня, коли потрібно відповісти, надавши короткий опис міркувань;

- математизація ситуації – активація низького рівня цього вміння виникає, коли необхідно визначити та виділити ключові математичні характеристики діаграми для кожного вказаного виду сміття;
- представлення – особа, яка розв’язує задачу, має інтерпретувати представлені дані з таблиці, уявити графічну репрезентацію й зіставити ці два представлення, що і є ключовою вимогою цього завдання;
- аргументація й міркування, вибудовування стратегії – вимоги до цього вміння відносно низького рівня;

- використання символів, формальної та технічної мов та операцій – це вміння потрібне для застосування процедурних і фактичних знань, щоб уявити побудову діаграми або нашвидкуруч накреслити її, а також допомагає усвідомити потрібний масштаб для вертикальної осі;
- використання математичних інструментів – уміння не активується.

На схемі 13 показано, який вигляд мало б тестове завдання «Побутові відходи» в комп’ютерному форматі. Формат відповіді залишається тим самим.

PISA-2015
?
← →

Побутові відходи
 Завдання 1/1

Прочитайте інформацію про час розкладання різних видів сміття. Надрукуйте свою відповідь на завдання нижче.

Один з учнів хоче представити зібрані дані у формі стовпчастої діаграми.

*Наведіть **одну** причину, чому стовпчаста діаграма не підходить для відображення цих даних.*

Виконуючи домашнє завдання з природознавства, учні зібрали інформацію про час розкладання декількох видів сміття, що викидають люди:

Види сміття	Час розкладання
Бананова шкірка	1–3 роки
Апельсинова шкірка	1–3 роки
Картонні коробки	0,5 року
Жувальна гумка	20–25 років
Газети	Декілька днів
Посуд із полістиролу	Більше 100 років

Схема 13. Завдання «Побутові відходи» в комп’ютерному форматі

5. РОК-КОНЦЕРТ

Наступне демонстраційне завдання «Рок-концерт» представлено на схемі 14. Це завдання з простим множинним вибором було використано на пілотному етапі дослідження циклу PISA-2003, пізніше його було оприлюднено з демонстраційною метою. Близько 28 % учасників вибірки правильно відповіли на це завдання, обравши варіант С, отже, його складність виявилася оптимальною на тлі інших завдань у цюлі завдань пілотного етапу. Тестове завдання

«Рок-концерт» належить до категорії суспільного контексту, тому що описана в ньому ситуація стосується організації концертного заходу, хоча й з опорою на особистий досвід перебування глядача в натовпі. Його класифіковано як завдання змістової категорії «кількість», тому що потрібно виконати арифметичні дії із числами; також у ньому наявні елементи категорії «простір і форма».

Завдання: РОК-КОНЦЕРТ

Для проведення рок-концерту глядачам було зарезервовано прямокутний майданчик розміром 100 м на 50 м. Усі квитки на концерт розпродали, і майданчик був повністю заповнений фанатами, які стояли один біля одного.

Яке із цих значень, на Вашу думку, є найкращою оцінкою кількості людей, що відвідали концерт?

- A 2 000
- B 5 000
- C 20 000
- D 50 000
- E 1 000 000

Схема 14. Демонстраційне завдання «Рок-концерт»

Це завдання потребує застосування кожної з трьох категорій процесів, але, у першу чергу, – формулювання ситуації математично з метою осмислення запропонованої контекстної інформації (розмір і форма майданчика; усі квитки на концерт розпродано; фанати стоять) і надання їй математичної форми. Також є необхідність виявити інформацію, якої бракує, але зробити це за допомогою оцінки, отриманої з опорою на власні знання й досвід із реального життя. Конкретно в цьому завданні необхідно побудувати модель майданчика на одну особу або для групи фанатів. Не виходячи за межі математики, особа, яка розв'язує задачу, повинна застосувати математичні поняття, факти, процедури й міркування, щоб зіставити загальну площу концертного майданчика та площу, зайняту однією особою, із кількістю фанатів, виконуючи при цьому необхідні кількісні порівняння. Для перевірки обґрунтованості розв'язку та для оцінювання варіантів відповіді порівняно з математичними результатами проведених обчислень необхідно застосувати вміння інтерпретації, застосування й оцінювання математичних результатів.

Альтернативна модель – уявити фанатів, які стоять рядами, заповнюючи весь майданчик, й оцінити їхню кількість, помноживши кількість рядів на кількість фанатів у кожному ряді. Особи, які розв'язують цю задачу і мають належні вміння побудови математичних моделей, можуть уважати модель із використанням рядів і стовпців ефективною, незважаючи на контраст між нею й типовою поведінкою фанатів на рок-концертах. Правильна відповідь не залежить від того, яку саме з моделей буде застосовано учасником для розв'язування цієї задачі.

Під час виконання цього завдання виникає необхідність застосувати такі основні математичні вміння:

- комунікація (сприйняття – повідомлення) – активується на доволі низькому рівні: потрібно прочитати й зрозуміти текст. Математичне значення слів, наприклад, «прямокутний» або «розмір», і висловів, наприклад, «майданчик був заповнений» і «приблизна кількість», має бути належно інтерпретоване й усвідомлене. Допомогти в цьому можуть знання з реального життя;

- математизація – завдання має високу вимогу щодо застосування цього вміння, тому що розв’язування задачі потребує певних припущень стосовно площі місця, яке займає особа, стоячи серед натовпу, а також створення базової моделі, наприклад, $(\text{кількість фанатів}) \times (\text{середня площа для однієї особи}) = (\text{площа майданчика})$. Особа має уявити ситуацію або представити її схематично як частину процесу побудови моделі з метою співвіднести площу, яку займає один фанат, із площею майданчика;
- вибудовування стратегії – уміння, необхідне для розв’язування цієї задачі на декількох етапах, а саме коли треба вирішити, який підхід обрати, коли потрібно уявити, яку модель можна використати для знаходження площі, а також коли необхідно усвідомити потребу в застосуванні певної процедури для перевірки моделі та її валідації. Одна зі стратегій розв’язування полягає у встановленні площі для однієї особи й множенні її на кількість людей, указану в кожному варіанті відповіді, та порівняння результату з наданими в завданні умовами. Можна зробити навпаки: почати з площі майданчика й діяти у зворотному порядку, використовуючи кожний

варіант відповіді для обчислення відповідної площі для однієї особи та вибору найкращого варіанта, що відповідає встановленим у завданні критеріям;

- використання символів, формальної й технічної мов та операцій – необхідне для реалізації будь-якої прийнятої стратегії, що полягає в інтерпретації та використанні наведених вимірів, і виконання необхідних обчислень із метою встановити зв’язок між площею майданчика та площею, яку займає одна особа;
- аргументація й міркування – необхідність застосувати це вміння виникає, коли потрібно осмислити зв’язок між побудованою моделлю, отриманим рішенням і реальним контекстом із метою валідації використаної моделі та перевірки правильності обраного варіанта;
- використання математичних інструментів – не активується.

На схемі 15 показано, який вигляд мало б тестове завдання «Рок-концерт» у комп’ютерному форматі.

PISA-2015
?
← →

Рок-концерт
Завдання 1/1

Виберіть варіант відповіді на поставлене питання.

Для проведення рок-концерту глядачам було зарезервовано прямокутний майданчик розміром 100 м на 50 м. Усі квитки на концерт розпродали, і майданчик був повністю заповнений фанатами, які стояли один біля одного.

Яке із цих значень, на Вашу думку, є найкращою оцінкою кількості людей, що відвідали концерт?

- 2 000
- 5 000
- 20 000
- 50 000
- 1000 000

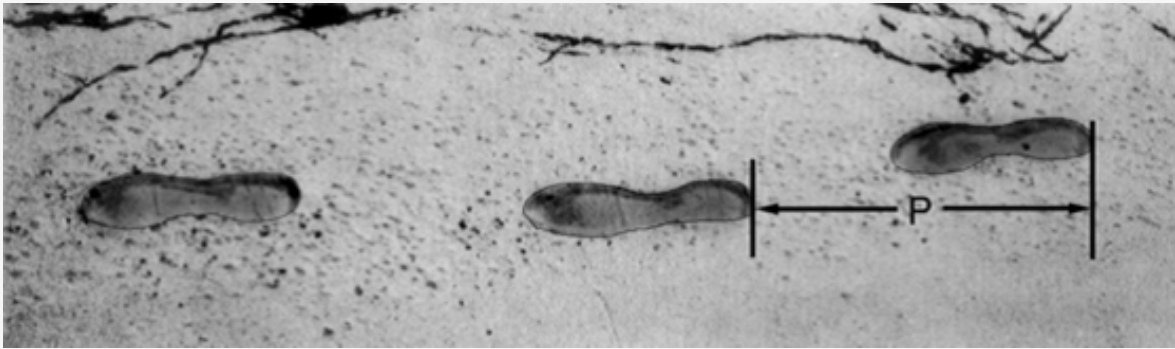
Схема 15. Завдання «Рок-концерт» у комп’ютерному форматі

6. КРОКИ

У групі завдань «Кроки» на схемі 16 наведено, на перший погляд, дещо неочікуваний, але перевірений на основі спостереження за ходою в природному темпі значної кількості людей алгебраїчний зв'язок між двома змінними. Учням пропонують два завдання, які передбачають активацію алгебраїчних знань і вмінь. Крім того, друге завдання також потребує глибокого мислення, аргументації й міркувань, тобто застосування вмінь, які є викликом для багатьох 15-річних підлітків. Ці завдання було використано на основному етапі дослідження PISA-2003, після чого їх було оприлюднено, і наразі їх використовують як демонстраційні завдання в рамкових документах та інших публікаціях. Обидва завдання скеровують

учасників працювати з наведеною інформацією та формулювати свою відповідь. Обидва завдання належать до тієї самої змістової категорії «зміни й залежності», тому що мають стосунок до залежності між змінними, вираженій в алгебраїчній формі; до особистісної контекстної категорії, тому що вони зосереджені на питаннях, які безпосередньо стосуються досвіду й поглядів особи; до категорії застосування математичних фактів, понять, процедур і міркувань, тому що завдання було сформульовано в термінах, які вже мають математичну структуру, а робота, яку потрібно виконати, в основному полягає в оперуванні математичними поняттями й об'єктами.

КРОКИ



На знімку зображено сліди людини, які вона залишила на піску. Довжина кроку P – відстань між двома сусідніми слідами.

Залежність між числом кроків дорослого чоловіка й довжиною його кроку наближено виражається формулою $\frac{n}{P} = 140$, де n – кількість кроків за одну хвилину, P – довжина кроку в метрах.

Завдання 1: КРОКИ

Використовуючи наведену формулу, обчисліть довжину кроку Андрія, якщо він робить 70 кроків за хвилину. Запишіть хід своєї роботи.

.....
.....

Завдання 2: КРОКИ

Богдан знає, що довжина його кроку дорівнює 0,80 м. Застосовуючи наведену вище формулу, обчисліть швидкість пересування Богдана в метрах за секунду та в кілометрах за годину. Запишіть хід своєї роботи.

.....
.....

Схема 16. Демонстраційне завдання «Кроки»

Завдання 1

Завдання 1 на основному етапі дослідження у 2003 році правильно розв'язало 36 % учасників, таким чином, воно виявилось складнішим 70 % завдань у пулі 2003 р. Такий результат був дещо несподіваним, оскільки все, що треба було зробити з математичної погляду, – це підставити значення $n=70$ у формулу та виконати прості алгебраїчні перетворення, щоб знайти значення P . Це завдання ілюструє думку, яку часто висловлюють стосовно тестових завдань PISA: коли тестові завдання подані в контексті реальних життєвих ситуацій, незважаючи на те, що в задачі явно представлений математичний складник, 15-річні учні/студенти часто докладають невиправдано великих зусиль для їх розв'язування. Основні математичні вміння, які застосовуються для розв'язування цієї задачі:

- комунікація (сприйняття – повідомлення) – необхідність у цьому вмінні виникає, коли треба прочитати та зрозуміти стимул до завдання та записати розв'язання;
- математизація – потреби в цьому вмінні немає,

Завдання 2

Завдання 2 більш складне. Лише близько 20 % учасників тестування 2003 р. відповіли на нього правильно: воно належить до 10 % найскладніших задач, використаних у цьому циклі дослідження. Вибудовування стратегії для цього завдання є складним через кількість операцій, які необхідно зробити, щоб отримати бажаний кінцевий результат: P – відомо, і тому n можна знайти, використавши запропоноване рівняння; помноживши обидві частини рівняння на P , одержимо швидкість у метрах за хвилину; далі можна використати пропорційне перетворення, щоб отримати швидкість у кілометрах за годину. Для того щоб урахувати всі проміжні варіанти між неправильною та повністю правильною відповіддю, під час оцінювання цього завдання пропонують розглядати й частково правильні відповіді. Різницю між відсотками правильних відповідей на завдання 2 і завдання 1 можна найкраще пояснити, описавши, як по-різному в них активовано основні загальні математичні вміння:

- комунікація (сприйняття – повідомлення) – для обох завдань ці вміння активуються на рівні читання та розуміння запитання, але в завданні 2 треба використати знімок, щоб установити зв'язок між одним кроком і вказаною довжиною кроку, – залежність, яка не потрібна в завданні 1. Отже, представлення розв'язання потребує більш високого рівня застосування вміння комунікації для завдання 2;

тому що в задачі наведено математичну модель у формі, яка добре відома багатьом 15-річним учням/студентам;

- представлення – вимога є значимою для цієї задачі, тому що стимул включає і текст, і алгебраїчний вираз, які необхідно співвіднести;
- вибудовування стратегії – вимога до цього вміння є досить низького рівня, оскільки необхідну стратегію вже чітко наведено в завданні;
- аргументація й міркування – застосовується на мінімальному рівні, тому що завдання чітко сформульоване, а всі необхідні елементи очевидні;
- використання символів, формальної й технічної мови та операцій – це вміння потрібне, коли конкретне значення змінної підставляють у формулу й здійснюють перетворення виразу, щоб обчислити P .

- математизація – вимога в завданні 2 більш високого рівня, тому що розв'язування задачі потребує використання пропорції для обчислення швидкості ходіння Богдана в заданих одиницях вимірювання;
- вибудовування стратегії – процес розв'язування задачі потребує активації ефективних механізмів для всієї багатокрокової процедури, отже, вимога застосування вміння вибудовування стратегії в завданні 2 значно вища, ніж у завданні 1;
- представлення – друге завдання передбачає вихід за межі представлення, наведеного в завданні 1, і необхідність більш активної роботи із запропонованим алгебраїчним представленням;
- використання символів, формальної й технічної мови та операцій – реалізація вибудованої стратегії та використання поданих представлень потребує цього вміння, що включає алгебраїчні перетворення й застосування пропорцій та арифметичних обчислень;
- аргументація й міркування – застосовується впродовж усього процесу для активації усталених процесів мислення, необхідних для отримання результату;
- використання математичних інструментів – вимога до цього вміння є на відносно низькому рівні за умови, що учасники ефективно використовують калькулятор.

На схемах 17 і 18 показано групу завдань (відповідно завдання 1 і завдання 2) «Кроки» в тому вигляді, у якому вони могли б бути представлені на екрані за комп'ютерного формату тестування.

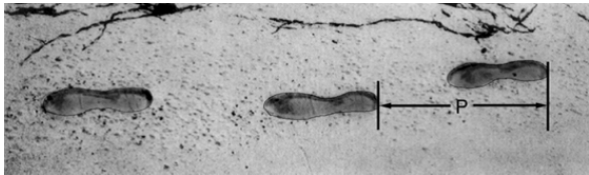
Зауважте, що в комп'ютерному форматі кожне завдання представлено разом зі стимулом на окремому екрані.

PISA-2015 ? ← →

КРОКИ
Завдання 1/2

Прочитайте інформацію про час вимірювання довжини кроку людини. Надрукуйте свою відповідь на завдання нижче.

Використовуючи наведену формулу, обчисліть довжину кроку Андрія, якщо він робить 70 кроків за хвилину. Запишіть хід своєї роботи.



На знімку зображено сліди людини, які вона залишила на піску. Довжина кроку P – відстань між двома сусідніми слідами.

Залежність між числом кроків дорослого чоловіка й довжиною його кроку наближено виражається формулою

$$\frac{n}{P} = 140,$$

де

- n – кількість кроків за одну хвилину,
- P – довжина кроку в метрах.


Схема 17. Завдання 1 із групи завдань «Кроки» в комп'ютерному форматі

PISA-2015 ? ← →

КРОКИ
Завдання 2/2

Прочитайте інформацію про час вимірювання довжини кроку людини. Надрукуйте свою відповідь на завдання нижче.

Богдан знає, що довжина його кроку дорівнює 0,80 м. Застосовуючи наведену вище формулу, обчисліть швидкість пересування Богдана в метрах за секунду та в кілометрах за годину. Запишіть хід своєї роботи.



На знімку зображено сліди людини, які вона залишила на піску. Довжина кроку P – відстань між двома сусідніми слідами.

Залежність між числом кроків дорослого чоловіка й довжиною його кроку наближено виражається формулою

$$\frac{n}{P} = 140,$$

де

- n – кількість кроків за одну хвилину,
- P – довжина кроку в метрах.

Схема 18. Завдання 2 із групи завдань «Кроки» в комп'ютерному форматі

7. КЛУМБИ

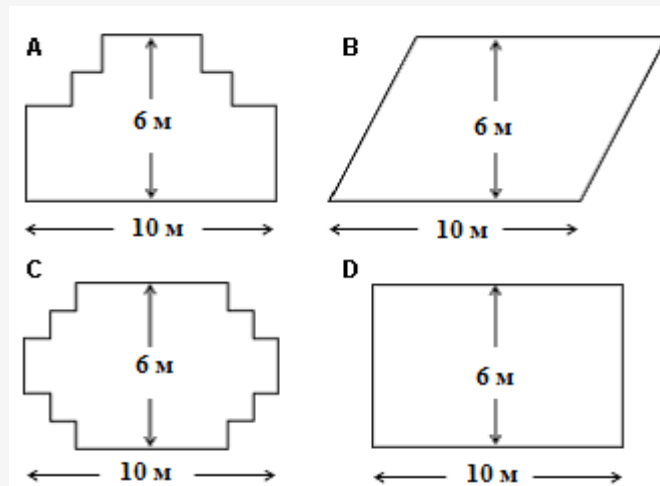
На схемі 19 представлено тестове завдання PISA «Клумби». Його було використано в дослідженнях 2000 р. та 2003 р. та пізніше оприлюднено. Воно є зразком завдання складного множинного вибору, коли учасники тестування мають вибрати декілька відповідей на завдання з наведених варіантів. Відповідь учасників на це завдання зараховується повністю, якщо вони правильно вкажуть, що всі клумби, окрім В, можна обнести 32 метрами дерев'яної огорожі.

Завдання належить до змістової категорії «простір і форма», тому що воно розглядає властивості фігур. Воно пов'язане з професійною контекстною

категорією, тому що в ньому йдеться про роботу садівника. За процесом тестове завдання належить до категорії застосування математичних понять, фактів, процедур і міркувань, тому що для його розв'язування необхідно застосувати процедурні знання до конкретних математичних об'єктів. Завдання також певною мірою потребує інтерпретації, застосування й оцінювання математичних результатів, оскільки необхідно пов'язати представлені математичні об'єкти з контекстуальним елементом – обмеженням довжини наявної дерев'яної огорожі.

Завдання : КЛУМБИ

Садівник має 32 метри дерев'яної огорожі й хоче обнести нею клумбу. Він обирає форму клумби з таких варіантів:



Обведіть «Так» або «Ні» для кожної форми клумби залежно від того, чи вистачить 32 м огорожі, щоб обнести нею клумбу.

Форма клумби	Чи вистачить 32 м огорожі, щоб обнести нею клумбу?
Форма А	Так / Ні
Форма В	Так / Ні
Форма С	Так / Ні
Форма D	Так / Ні

Схема 16. Демонстраційне завдання «Кроки»

Це завдання було одним із найскладніших завдань дослідження PISA-2003: частка правильних відповідей становила трохи менше 20 %. Його можна розв'язати, застосувавши геометричні знання й міркування. У завданні надано достатньо інформації, щоб уможливити обчислення точного периметра форм А, С та D, для яких він однаковий і становить 32 метри.

Проте стосовно форми В не надано достатньої інформації, отже, необхідно застосувати інший підхід. Міркування можуть бути такими: тоді як сума довжин «горизонтальних» відрізків для кожної із чотирьох фігур є однаковою, бічні (похилі) сторони форми В є довшими, ніж сума «вертикальних» відрізків кожної з інших фігур.

Уміння комунікації застосовується для читання й розуміння завдання, а також для того, щоб зв'язати наведену в тексті інформацію з графічним зображенням чотирьох клумб. Завдання представлено в зрозумілій математичній формі, отже, вимога математизації не актуальна. Міркування з використанням об'єктів реального світу, наприклад, урахування довжини стандартних частин дерев'яної огорожі, а також геометрії кутів не використовуються в процесі розв'язування; ключові вміння, необхідні для розв'язування цієї задачі, – це аргументація й міркування, за допомогою яких можна визначити, що форма В має периметр, більший за довжину наявної огорожі, і усвідомити, що довжина кожного окремого «вертикального» відрізка форми А невідома, але відома їхня загальна довжина (як і у формі С – стосовно і

«вертикальних», і «горизонтальних» відрізків). Вибудовування стратегії включає усвідомлення того, що необхідну інформацію про периметр можна знайти, незважаючи на той факт, що довжини деяких окремих відрізків невідомі. Символи, формальна й технічна мови та операції використовуються при оперуванні поняттям «периметр». Вимога застосування математичних інструментів для розв'язування завдання не актуальна.

На схемі 20 зображено, який вигляд могло б мати тестове завдання «Клумби» на екрані за умови комп'ютерного тестування. Зауважте, що було збережено формат складного множинного вибору, і учасники мали обрати за допомогою миші потрібні варіанти відповідей.

PISA-2015
?
← →

КЛУМБИ

Завдання 1/1

Прочитайте інформацію про вибір садівником форми клумби. Позначте у таблиці обрані вами варіанти відповідь на завдання, подане нижче.

Обведіть «Так» або «Ні» для кожної форми клумби залежно від того, чи вистачить 32 м огорожі, щоб обнести нею клумбу.

Форма клумби	Чи вистачить 32 м огорожі, щоб обнести нею клумбу?	
	Так	Ні
Форма А	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Форма В	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Форма С	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Форма D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Садівник має 32 метри дерев'яної огорожі й хоче обнести нею клумбу. Він обирає форму клумби з таких варіантів:

А

В

С

D

Схема 20. Тестове завдання «Клумби» в комп'ютерному форматі

ВИСНОВКИ

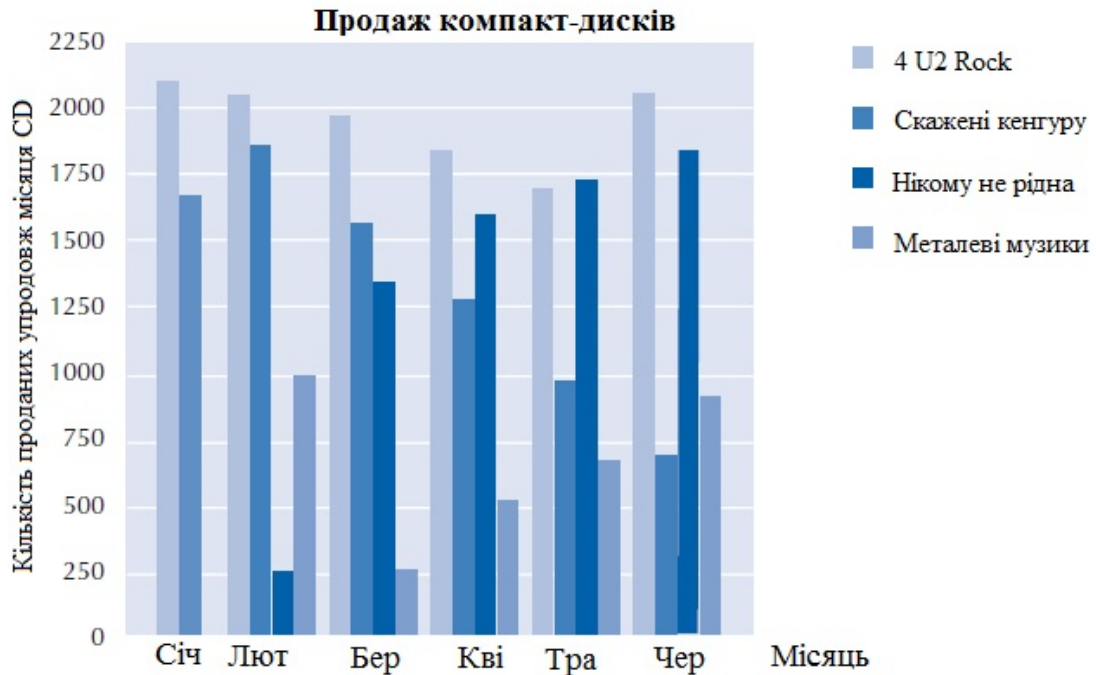
Метою програми PISA з оцінювання математичної грамотності є розробка індикаторів, які показують, наскільки ефективно країни готують своїх учнів/студентів до використання математики в кожному аспекті їхнього особистого, суспільного та професійного життя як частин їхнього творчого, активного й свідомого буття як громадян. Для досягнення цієї мети PISA розробила визначення математичної грамотності та структуру тестування, яке відображає важливі елементи цього визначення. Тестові завдання з математики, обрані для включення до PISA-2015 на основі цього визначення та структури тестування, були призначені для відображення балансу відповідних математичних процесів, математичного змісту та контекстів. Ці завдання мали визначити, як учні можуть використовувати те, чого вони навчилися у своєму навчальному закладі, залучити учнів до використання відомого

їм змісту, до участі в математичних процесах і до застосування своїх умінь для розв'язання проблем, що виникають із досвіду реального життя. В оцінюванні минулого циклу було використано завдання в різних форматах із різним ступенем умонтованого керування, але головну увагу було приділено автентичним задачам, виконуючи які учні мали мислити самостійно. Завдання циклу PISA-2015 було представлено в комп'ютерному вигляді, що дало можливість реалізувати зобов'язання програми PISA представляти реальні життєві проблеми в тому вигляді, у якому вони з'являються в реальному світі. Хоча багато характеристик комп'ютерного тестування не було використано у 2015 р. з метою збереження порівнюваності з паперовим тестуванням 2012 р., таке оновлення буде сферою для просування в рамках майбутніх циклів тестування PISA.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ (РОЗДАТКОВІ МАТЕРІАЛИ)

1. МУЗИЧНИЙ ХІТ-ПАРАД

У січні вийшли нові компакт-диски гуртів «4 U2 Rock» і «Скажені кенгуру». Після цього в лютому вийшли компакт-диски гуртів «Нікому не рідна» і «Металеві музики». Нижче на діаграмі показано продажі компакт-дисків цих гуртів із січня до червня.



Завдання 1: МУЗИЧНИЙ ХІТ-ПАРАД

PM918Q01

Скільки компакт-дисків продав у квітні гурт «Металеві музики»?

- A 250
- B 500
- C 1000
- D 1270

Завдання 2: МУЗИЧНИЙ ХІТ-ПАРАД

PM918Q02

У якому місяці гурт «Нікому не рідна» вперше продав більше компакт-дисків, ніж гурт «Скажені кенгуру»?

- A такого місяця не було
- B у березні
- C у квітні
- D у травні

Завдання 3: МУЗИЧНИЙ ХІТ-ПАРАД

PM918Q05

Менеджер гурту «Скажені кенгуру» схвильований через те, що кількість проданих компакт-дисків зменшилася з лютого до червня.

Продаж якої кількості компакт-дисків цього гурту варто очікувати в липні, якщо та сама негативна тенденція зберігатиметься й надалі?

- A 70 компакт-дисків
- B 370 компакт-дисків
- C 670 компакт-дисків
- D 1340 компакт-дисків

2. ФУДЗІ

Гора Фудзі – це знаменитий дрімаючий вулкан у Японії.



Завдання 1: ФУДЗІ

PM942Q01

Гора Фудзі відкрита для сходження на неї лише з 1 липня до 27 серпня щороку. За цей період близько 200 000 людей сходять на гору Фудзі.

Скільки в середньому людей сходять на гору Фудзі щодня?

- A 340
- B 710
- C 3400
- D 7100
- E 7400

Завдання 2: ФУДЗІ

PM942Q02

Пішохідна доріжка Готемба, що веде в бік вершини гори Фудзі, має довжину близько 9 км.

Туристи мають повертатися з 18-кілометрової прогулянки не пізніше 20.00.

Тимофій розрахував, що він може йти вгору із середньою швидкістю 1,5 кілометра на годину, а спускатися – удвічі швидше. Ця швидкість ураховує перерви на їжу й час для відпочинку.

За допомогою показників швидкості, розрахованих Тимофієм, визначте, не пізніше якої години він повинен розпочати свою подорож, щоб повернутися до 20.00?

Відповідь:

Завдання 3: ФУДЗІ

PM942Q03

Тимофій одягнув крокомір, щоб підрахувати свої кроки під час походу доріжкою Готемба. Його крокомір показав, що він пройшов 22 500 кроків угору.

Розрахуйте довжину кроку Тимофія під час його сходження 9-кілометровою доріжкою Готемба. Дайте відповідь у сантиметрах (см).

Відповідь: см.

3. ПІЦА

У піцерії пропонують два види круглої піци однакової товщини, але різного розміру. Діаметр меншої піци дорівнює 30 см, і вона коштує 30 зедів. Діаметр більшої піци дорівнює 40 см, і вона коштує 40 зедів.

Завдання 1: ПІЦА

M154Q01

Яку із піц вигідніше купити? Наведіть хід своєї роботи.

.....
.....



4. ПОБУТОВІ ВІДХОДИ

Виконуючи домашнє завдання з природознавства, учні зібрали інформацію про час розкладання декількох видів сміття, що викидають люди:

Види сміття	Час розкладання
Бананова шкірка	1–3 роки
Апельсинова шкірка	1–3 роки
Картонні коробки	0,5 року
Жувальна гумка	20–25 років
Газети	Декілька днів
Посуд із полістиролу	Більше 100 років

Один з учнів хоче представити зібрані дані у формі стовпчастої діаграми.

Завдання 1: ПОБУТОВІ ВІДХОДИ

M505Q01

Наведіть одну причину, чому стовпчаста діаграма не підходить для відображення цих даних.

.....

5. РОК-КОНЦЕРТ

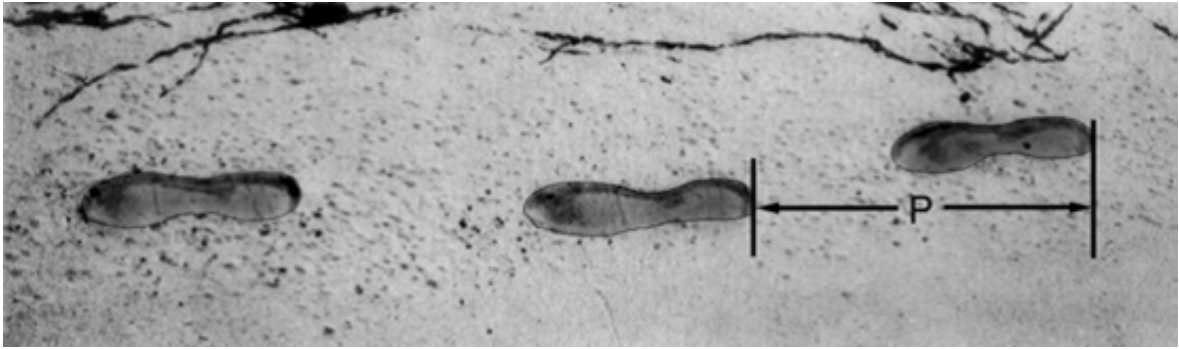
Для проведення рок-концерту глядачам було зарезервовано прямокутний майданчик розміром 100 м на 50 м. Усі квитки на концерт розпродали, і майданчик був повністю заповнений фанатами, які стояли один біля одного.

Завдання: РОК-КОНЦЕРТ

Яке із цих значень, на Вашу думку, є найкращою оцінкою кількості людей, що відвідали концерт?

- A 2 000
- B 5 000
- C 20 000
- D 50 000
- E 1 000 000

6. КРОКИ



На знімку зображено сліди людини, які вона залишила на піску. Довжина кроку P – відстань між двома сусідніми слідами.

Залежність між числом кроків дорослого чоловіка й довжиною його кроку наближено виражається формулою $\frac{n}{P} = 140$, де n – кількість кроків за одну хвилину, P – довжина кроку в метрах.

Завдання 1: КРОКИ

M124Q01

Використовуючи наведену формулу, обчисліть довжину кроку Андрія, якщо він робить 70 кроків за хвилину. Запишіть хід своєї роботи.

.....

.....

Завдання 2: КРОКИ

M124Q03

Богдан знає, що довжина його кроку дорівнює 0,80 м. Застосовуючи наведену вище формулу, обчисліть швидкість пересування Богдана в метрах за секунду та в кілометрах за годину. Запишіть хід своєї роботи.

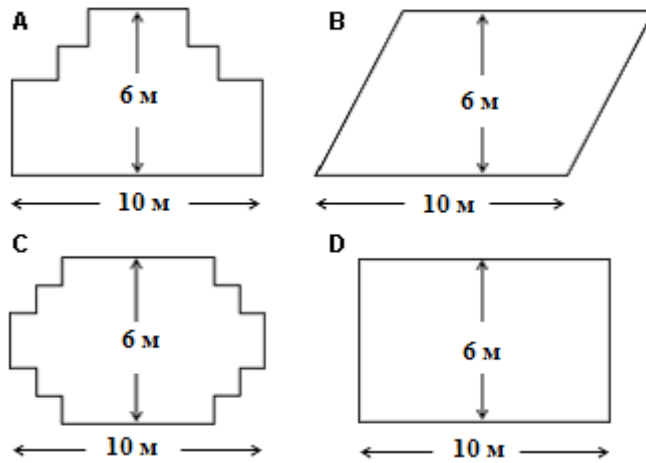
.....

.....



7. КЛУМБИ

Садівник має 32 метри дерев'яної огорожі й хоче обнести нею клумбу. Він обирає форму клумби з таких варіантів:



Завдання : КЛУМБИ

M266Q01

Обведіть «Так» або «Ні» для кожної форми клумби залежно від того, чи вистачить 32 м огорожі, щоб обнести нею клумбу.

Форма клумби	Чи вистачить 32 м огорожі, щоб обнести нею клумбу?
Форма А	Так / Ні
Форма В	Так / Ні
Форма С	Так / Ні
Форма D	Так / Ні

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ ПОКАЖЧИК

Математична грамотність – здатність людини формулювати, застосовувати й інтерпретувати математику в різноманітних контекстах. Включає математичні міркування й застосування математичних понять, процедур, фактів та інструментів для опису, пояснення й прогнозування явищ, допомагає зрозуміти роль математики у світі, робити аргументовані умовиводи й приймати рішення, необхідні людям як творчим, активним і мислячим громадянам. Метою саме такого визначення було інтегрування у визначення математичної грамотності поняття математичного моделювання, яке є наріжним каменем рамкового документа PISA з математики (ОЕСР, 2003). Оскільки людина застосовує математику й математичні інструменти для розв'язання проблем у життєвому контексті, її робота складається із серії етапів.

Контексти – аспекти особистісного світу індивідуума, у якому розглядають проблеми; ситуації, у яких особа може мати можливість використовувати математику. PISA оцінює, наскільки вміло 15-річні учні/студенти можуть застосовувати математику, коли мають справу із запропонованими ситуаціями й задачами, більшість із яких надані в контекстах реального світу. Уміння працювати в межах контексту є дуже значущим і ставить перед особою, яка розв'язує задачі, додаткові вимоги. Контексти розподілено на чотири контекстні категорії: особистісна, суспільна, професійна й наукова. Ці категорії використано для класифікації тестових завдань, розроблених для PISA.

Особистісні контексти – ситуації, сконцентровані навколо діяльності окремої особи, родини або групи людей. Типи (теми) контекстів: гра, приготування їжі, покупки, здоров'я людини, власний транспорт, спорт, подорожі, складання особистого розкладу, планування особистого бюджету тощо.

Професійні контексти – ситуації, зосереджені на світі праці, діяльності особи як працівника (як некваліфікованого, так і спеціаліста найвищої категорії). Типи (теми) контекстів: вимірювання, оцінка вартості й замовлення матеріалів для будівництва, нарахування заробітної плати й бухгалтерський облік, контроль якості, планування й інвентаризація, проведення дизайнерських та архітектурних

робіт, прийняття рішення стосовно робочих питань тощо.

Суспільні контексти – ситуації, зосереджені на певній громаді (місцевій, національній або світовій), діяльності людини як частини суспільства. Типи (теми) контекстів: виборчі системи, громадський транспорт, урядування, соціальна політика, демографія, реклама, національна статистика й економіка тощо.

Наукові контексти – ситуації, що передбачають застосування математики для аналізу явищ природного світу й наукових і технологічних питань і тем. Типи (теми) контекстів: погода й клімат, екологія, медицина, наука про космос, генетика, вимірювання й власне світ математики тощо.

Математичні теми – теми, які типово є частинами національних освітніх програм із математики та які учні/студенти мали можливість засвоїти до 15-річного віку. Ці теми стосуються чотирьох змістових категорій – «зміни й залежності», «простір і форма», «кількість» та «невизначеність і дані», проте між темами й категоріями немає взаємно однозначної відповідності. Багато математичних тем стосуються всіх чотирьох змістових категорій, тим самим підсилюють цілісність математики як дисципліни. Основними темами, які надають уявлення про математичний зміст тестових завдань PISA є: функції; алгебраїчні вирази; рівняння й нерівності; системи координат; плоскі й об'ємні геометричні фігури, залежності між ними та між їхніми елементами; вимірювання; числа й одиниці вимірювання; арифметичні операції; принципи підрахунків; наближені обчислення; збір, представлення й інтерпретація даних; дисперсія даних та її опис; вибірки; випадковість і ймовірність. Цей перелік не є вичерпним у PISA.

Математичні процеси – сукупність дій, які особа робить для поєднання контексту проблеми (особистісного, професійного, суспільного, наукового) з математикою і, таким чином, для розв'язання проблеми. У кожному з математичних завдань тестування PISA увага приділена одному з трьох математичних процесів: 1) формулювання ситуацій математично; 2) застосування математичних понять,

фактів, процедур і міркування; 3) інтерпретація, застосування й оцінювання математичних результатів.

Процес формулювання показує, наскільки ефективно учні/студенти можуть розпізнавати можливості використання математики в проблемних ситуаціях і далі задіювати відповідну математичну структуру, щоб представити певну контекстоцентровану проблему в математичній формі. Включає такі дії: визначати математичні аспекти проблеми, яка описана в контексті реального життя, і виявляти значущі змінні; розпізнавати математичну структуру в проблемах або ситуаціях; спростувати проблему або ситуацію з метою зробити її придатною для математичного аналізу; установлювати обмеження й припущення для математичної моделі, що впливають із контексту; представляти ситуацію математично, використовуючи відповідні змінні, символи, діаграми й стандартні моделі; представляти проблему в інший спосіб, зокрема організувати її згідно з математичними поняттями й робити відповідні припущення; розуміти й пояснювати зв'язок між специфічною мовою проблеми, тобто мовою, що відповідає контексту, і формальною мовою та символами, потрібними для представлення цієї проблеми в математичній формі; перекладати проблему на математичну мову або репрезентувати її в інший спосіб; визначати аспекти проблеми, які відповідають відомим задачам або математичним поняттям, фактам або процедурам; використовувати технологічні інструменти для відображення математичної залежності, яка описана математичною моделлю процесу чи явища.

Процес застосування показує, наскільки добре учні/студенти можуть виконувати обчислення й операції, а також використовувати відомі їм математичні поняття й факти для розв'язання проблеми, сформульованої математично. Включає такі дії: розробляти й реалізувати стратегії для знаходження математичних розв'язань; використовувати математичні інструменти, зокрема й технології, для знаходження точних і наближених результатів; застосовувати математичні факти, правила, алгоритми й структури в процесі знаходження розв'язань; виконувати операції з числами, графічними й статистичними даними й

інформацією, алгебраїчними виразами й рівняннями, а також геометричними образами; будувати діаграми, графіки й геометричні конструкції, видобувати з них математичну інформацію; використовувати різні види представлення інформації й здійснювати переходи між ними в процесі знаходження розв'язань; робити узагальнення на основі результатів застосування математичних процедур із метою знаходження розв'язань; осмислювати математичну аргументацію й пояснювати та підтверджувати математичні результати.

Процес інтерпретації показує, наскільки ефективно учні/студенти можуть аналізувати математичні розв'язки або висновки, інтерпретувати їх у контексті проблеми з реального життя й визначати обґрунтованість результатів або висновків. Включає такі дії: інтерпретувати математичний результат у контексті реального світу; оцінювати обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної проблеми; розуміти, як реальна ситуація зумовлює наслідки застосування математичних процедур або моделей, що вможливило формулювання суджень щодо контексту про те, яким чином отримані результати можуть бути скориговані або застосовані; пояснювати причини наявності або відсутності сенсу в математичному результаті або висновку, зважаючи на певний контекст розглядуваної проблеми; розуміти обсяг і межі математичних понять і математичних розв'язань; критично осмислювати й установлювати межі моделі, використаної для розв'язування проблеми.

Загальні математичні вміння – набір загальних математичних умінь, які є основою математичних процесів зокрема й математичної грамотності загалом; набір когнітивних здатностей, який мають учні/студенти або яких вони можуть набути з метою розуміти світ із математичної позиції, бути задіяними в ньому й розв'язувати проблеми. З підвищенням рівня математичної грамотності особа здатна застосовувати більший обсяг своїх загальних математичних умінь. Рамковий документ PISA виокремлює сім загальних математичних умінь.

Комунікація (сприйняття й повідомлення) – здатність сприймати наявність певного виклику в проблемній ситуації, розпізнавати та розуміти таку ситуацію, читати, розуміти й надавати сенсу

висловлюванням, питанням, завданням або об'єктам з метою сформувавши ментальну модель відповідної ситуації, що є важливим кроком у розумінні, уточненні й формулюванні задачі, підсумовувати й представляти своє розуміння в конкретній формі, трансформувати своє представлення по-іншому, пояснювати та/або аргументувати свій розв'язок.

Математизація – здатність перетворювати задачу, яка стосується реального світу, у суто математичну форму, що полягає в структуруванні, концептуалізації, формулюванні припущень та/або побудові моделі, тлумачити й оцінювати математичний результат або математичну модель стосовно початкової проблеми. Термін «математизація» використовується для того, щоб описати загальну математичну діяльність.

Представлення – здатність представляти математичні об'єкти й ситуації у вигляді графіків, таблиць, діаграм, рисунків, рівнянь, формул тощо. Це передбачає вибір, інтерпретацію, використання різних видів представлення та перетворення з метою зафіксувати ситуацію, установити зв'язок із проблемою чи представити отриманий результат.

Аргументація й міркування – здатність здійснювати логічні узвичаєні процеси мислення, такі як осмислення різних аспектів проблеми й установлення зв'язків між ними, завдяки чому стає можливим робити умовиводи, перевіряти наведені аргументи або забезпечувати аргументацію тверджень чи розв'язання задач.

Вибудовування стратегій для розв'язування задач – здатність здійснювати низку процесів критичного контролю, що спрямовує на ефективне розпізнавання, формулювання та розв'язання проблем. Це вміння характеризують як вибір або вибудовування плану (стратегії) використання математики для розв'язування задач, що постають із завдання або контексту, а також як вміння реалізувати цей план.

Використання символів, формальної й технічної мов та операцій – здатність здійснювати регульовані математичними правилами розуміння, інтерпретацію, використання алгебраїчних виразів і перетворення їх у межах математичного контексту (зокрема й числові вирази та операції), розуміти й використовувати формальні концепції на основі

визначень, правил і формальних систем, а також використовувати алгоритми дій із цими об'єктами.

Використання математичних інструментів – здатність використовувати математичні інструменти (вимірювальні прилади, калькулятори, зокрема й комп'ютерні інструменти), яка, таким чином, передбачає знання про різні інструменти, які можуть сприяти математичній діяльності, а також знання про обмеження цих інструментів.

Змістові категорії математики – категорії математичного домену, які характеризують математичний зміст, що важливий для цієї дисципліни й охоплений завданнями PISA. Виділення змістових категорій відповідає вимогам історизму, відносної цілісності охоплення математичної галузі й основних явищ, що мотивували її розвиток, а також відбиває основні теми шкільних програм. У дослідженні PISA виокремлено чотири змістові категорії: зміни й залежності; простір і форма; кількість; невизначеність і дані.

Зміни й залежності – категорія, що охоплює як у реальному, так і в змодельованому світі величезну кількість тимчасових і постійних залежностей, у яких зміни (у часі, дискретні, безперервні тощо) відбуваються в системах взаємопов'язаних об'єктів або елементів, які здійснюють вплив одне на одного. Оволодіння цією категорією математики передбачає розуміння фундаментальних типів змін і здатність визначати, коли вони відбуваються, для використання відповідної математичної моделі з метою опису й прогнозування змін. У математичному сенсі це означає моделювання змін і залежностей за допомогою відповідних функцій або рівнянь, а також створення, інтерпретацію й графічне зображення символічних залежностей і навпаки. *Зміни та залежності* можна спостерігати в багатьох різноманітних явищах, наприклад, у зростанні кількості організмів, у музиці, у циклічності пір року, у погодних умовах, у рівнях зайнятості населення й в економічних умовах. Такі аспекти традиційного математичного змісту, як функції та алгебра, зокрема й алгебраїчні вирази, рівняння й нерівності, табличні й графічні представлення, є головними в описі, моделюванні й інтерпретації змін. Опис представлення даних і залежностей за допомогою статистики також

часто застосовують для зображення й інтерпретації змін і залежностей. Крім того, важливим для визначення й інтерпретації змін і залежностей є чітке усвідомлення цілого та його частин. Деякі цікаві залежності можна виявити під час геометричних вимірювань, наприклад, як може змінюватися периметр фігури зі зміною її площі або які залежності є між довжинами сторін трикутників.

Простір і форма – категорія, що охоплює широкий спектр явищ нашого візуального та фізичного світу: моделі, властивості предметів, розташування й орієнтації, представлення предметів, кодування й декодування візуальної інформації, навігація й динамічна взаємодія з реальними формами та їх представленнями. Простір і форма лежать в основі геометрії, але ця змістова категорія виходить за межі традиційного змісту геометрії, її значення й методів і спирається на інші математичні підгалузі, приміром, просторову візуалізацію, вимірювання й алгебру. До цієї змістової категорії також входять перетворення форм і їх інтерпретація, що потребує застосування різних інструментів – від програм динамічної геометрії до систем глобального позиціонування (GPS). Математична грамотність у питаннях простору й форми включає цілу низку математичних процесів, наприклад, розуміння перспективи (як у живописі), складання та читання карт, перетворення форм за допомогою технологій і без них, інтерпретація видів тривимірних сцен із різних позицій і побудова зображень геометричних форм.

Кількість – категорія, що стосується взаємодії зі світом і функціонування у ньому, включаючи в себе визначення кількості атрибутів об'єктів, залежностей, ситуацій у світі, розуміння різноманітних представлень таких визначень кількостей, а також оцінювання інтерпретацій та аргументів на основі кількості. Для визначення кількості будь-чого в реальному житті необхідно розуміти процес вимірювання, робити обчислення, знати одиниці вимірювань, числові тенденції й закономірності тощо. З погляду категорії кількості головними аспектами математичної грамотності є аспекти кількісного обґрунтування, наприклад числові значення, різні представлення чисел, точність обчислень, усні розрахунки, оцінювання обґрунтованості результату. Визначення

кількості – це основний метод опису й вимірювання різноманіття властивостей певних аспектів світу. Ця дія дає змогу моделювати ситуації, перевіряти зміни та залежності, описувати простір і форму та маніпулювати ними, організовувати й інтерпретувати дані, вимірювати й оцінювати невизначеність тощо. У межах математичної грамотності категорія кількості охоплює знання чисел і числових операцій, застосовуваних у різноманітних умовах.

Невизначеність і дані – категорія, що охоплює визначення місця змін у процесах, усвідомлення кількісної оцінки цих змін, визнання невизначеності й похибки у вимірюваннях і знання про ймовірність. Крім того, до неї входять формування, інтерпретація й оцінювання висновків, зроблених у ситуаціях, для яких характерна невизначеність. Представлення й інтерпретація даних – це ключові поняття цієї категорії. Невизначеність – це явище, яке міститься в центрі математичного аналізу багатьох проблемних ситуацій. Невизначеність є в науковому прогнозуванні, результатах опитувань громадської думки, прогнозах погоди та в економічних моделях. Варіативність стосується виробничих процесів, результатах тестів і досліджень; випадковість має принципове значення в багатьох заходах, пов'язаних із відпочинком. У традиційній навчальній програмі теми ймовірності й статистики забезпечують формальні засоби опису моделювання й інтерпретації конкретного класу явища невизначеності, а також навчають робити відповідні умовиводи. Крім того, знання чисел та аспектів алгебри (наприклад, графіків і символічного представлення) допомагає успішно вирішувати проблеми в рамках цієї змістової категорії.

Математичний тест PISA – тестовий інструмент, який складається з груп тестових завдань, що містять словесний матеріал-стимул і, зазвичай, іншу інформацію, наприклад, таблиці, графіки, діаграми тощо та одне або більше завдань, пов'язаних із цим матеріалом-стимулом. Такий формат надає учням/студентам можливість більш детально зрозуміти контекст або проблему, виконуючи низку пов'язаних завдань.

Математичні інструменти – різні фізичні та цифрові прилади, програмне забезпечення та обчислювальні пристрої. Комп'ютерні математичні інструменти доволі широко використовуються

в роботі, де виникає потреба в математичному розв'язанні проблем. Наразі набір онлайн-інструментів, доступних учням/студентам під час виконання тестів PISA, містить базовий науковий калькулятор, який включає операції додавання, віднімання, множення й ділення, а також квадратний корінь, число л, дужки, показник степеня, квадрат, дріб ($\frac{a}{b}$), обернену величину ($\frac{1}{x}$) і запрограмований таким чином, щоб відповідати загальноприйнятому порядку виконання математичних дій.

Шкала рівнів оволодіння математичною грамотністю – шкала, прийнята в дослідженні PISA для звітування про рівні математичної грамотності 15-річних підлітків, що відображає зростання

рівня активації загальних математичних умінь (комунікація (сприйняття й повідомлення), математизація, представлення, аргументація й міркування, вибудовування стратегій для розв'язування задач, використання символів, формальної й технічної мов та операцій, використання математичних інструментів) учнів/ студентів. Загальні математичні вміння відіграють головну роль у визначенні того, що означає бути на тому чи іншому рівні оволодіння математичною грамотністю загалом і кожним із процесів, що оцінюються: загальні математичні вміння визначають підвищення спроможності стосовно всіх аспектів математичної грамотності. Попередні цикли PISA показали, що всі ці вміння є показниками глибини знань, і тому вони є основними чинниками для визначення складності завдань.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- Bennett, R. (2003), *Online Assessment and the Comparability of Score Meaning*. Princeton, United States: ETS.
- Bennett, R, et. al. (2008), "Does it Matter if I Take My Mathematics Test on Computer? A Second Empirical Study of Mode Effects in NAEP." *Journal of Technology, Learning, and Assessment*, 6(9).
- Common Core State Standards Initiative (2010), *Common Core State Standards for Mathematics*, Common Core State Standards initiative, Washington, D.C. http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.
- Devlin, K. (1994) *Mathematics: The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind and the Universe*. United States: W. H. Freeman Scientific American Library.
- ETS. (2008) *Online Assessment in Mathematics and Writing: Reports from the NAEP Technology-Base Assessment Project*. Princeton, United States: ETS.
- Hoyles, C., A. Wolf, S. Molyneux-Hodgson and P. Kent (2002), *Mathematical skills in the workplace: final report to the Science Technology and Mathematics Council, Project Report*, Institute of Education, University of London, Science, technology and Mathematics Council, London, <http://eprints.ioe.ac.uk/1565/1/Hoyles2002MathematicalSkills.pdf>.
- Mason, B., M. Patry and D. Berstein (2001), An examination of the equivalence between non-adaptive computer based and traditional testing, *Journal of Education Computing Research*, no. 24, vol. 1, pp. 29-39.
- Moore, D. (1997), New pedagogy and new content: the case of statistics, *International Statistical Review*, no. 65, vol. 2, pp. 123-137.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, reston, Virginia, <http://www.nctm.org/standards/>.
- Niss, M., W. Blum, and P. Galbraith (2007), "Introduction", in Blum, W., P. Galbraith, H.-W. Henn and M. Niss, (eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education (The 14th ICMI Study)*, Springer, New York, pp. 3-32.
- Niss, M. (2003), "Mathematical Competencies and the learning of mathematics: the Danish KoM Project", in Gagatsis a. and S. Papastavridis (eds.), 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education, the Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, Athens, pp. 115-124, http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf.
- Niss, M. and T. H. Jensen (2002), *Kompetencer og matematikl ring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*, uddannelsesstyrelsens temah fteserie, no. 18, Ministry of education, Copenhagen, <http://pub.uvm.dk/2002/kom/>.
- Niss, M. and T. H jgaard (eds.) (2011), *Competencies and Mathematical learning: ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*, Ministry of education, report no. 485, Roskilde university, Roskilde, https://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf.
- OECD (2010), *Pathways to Success: How knowledge and skills at age 15 shape future lives in Canada*, PISA, OECD Publishing, www.OECD.org/dataOECD/59/35/44574748.pdf.
- OECD (2003), *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, PISA, OECD Publishing.
- OECD (2010), *Draft PISA 2012 Mathematics Framework*. OECD publishing, <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf>.
- OECD (2012) *PISA 2015 Design [Ref: EDU/PISA/GB(2012)5]*. Paper presented at the 33rd meeting of PISA Governing Board, Tallinn, April 2012.
- Richardson, M. et. al. (2002), Challenging Minds? Students' perceptions of computer-based World Class tests of problem solving, *Computers in Human Behavior*, vol. 18, issue 6, November, pp. 633-649.
- Stacey, K. and D. Wiliam (2013), "Technology and assessment in Mathematics", in Clements M. a. (Ken), a. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, and F. leung (eds), *Third International Handbook of Mathematics Education*, Springer, pp. 721-752.

- Steen, L. (1990), *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*, National Academy Press Washington, D.C.
- Turner, R. (2012), “Some drivers of test item difficulty in Mathematics”, Paper presented at the annual Meeting of the American educational research association (AERA), 13-17 April 2012, Vancouver, <http://research.acer.edu.au/PISA/4/>.
- Qualifications and Curriculum Authority (2007), *Mathematics: Programme of study for key stage 3 and attainment targets*, Qualifications and Curriculum authority, London, <http://media.education.gov.uk/assets/files/pdf/q/mathematics%202007%20programme%20of%20study%20for%20key%20stage%203.pdf>.
- Turner, R. and Adams, R.J. (2012), “Some drivers of test item difficulty in mathematics: an analysis of the competency rubric”, Paper presented at the annual Meeting of the American educational research association (aera), 13-17 April 2012, Vancouver, <http://research.acer.edu.au/PISA/7/>.
- Turner, R., J. Dossey, W. Blum and M. Niss (2013), “Using mathematical competencies to predict item difficulty in PISA”, in Prenzel, M., M. Kobarg, K. Schöps and S. rönnebeck (eds), *Research on PISA: Research Outcomes of the PISA Research Conference 2009*, Springer, New York. pp. 23-27.
- Watson, J. M. and R. Callingham (2003), Statistical literacy: a complex hierarchical construct, *Statistics Education Research Journal*, no. 2, vol. 2, pp. 3-46.
- Wang, S., Jiao, H., Young, M. J., Brooks, T. E., & Olson, J. (2007). A meta-analysis of testing mode effects in Grade K–12 mathematics tests. *Educational and Psychological Measurement*, 67, 219-238.





УЦОЯО
вулиця Володимира Винниченка, 5,
Київ, 02000

ВЕБ-САЙТ: <http://pisa.testportal.gov.ua>
Е-ПОШТА: pisa.ukraine@gmail.com