УДК 517.97

Бак Сергій
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського
Печериця Іван
студент факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ З ПЕРІОДИЧНОЮ АМПЛІТУДОЮ В ДИСКРЕТНОМУ НЕЛІНІЙНОМУ РІВНЯННІ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Анотація: *В статі розглянуто дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. Було наведено умови існування періодичних стоячих хвиль.*

Ключові слова: *Дискретне нелінійне рівняння Шредінгера, двовимірна ґратка, стоячі хвилі.*

Abstract: *In the article a discrete nonlinear Schrödinger equation on a two-dimensional lattice is considered. Conditions of the existence of periodic standing waves were given.*

Keywords: *The discrete nonlinear Schrödinger equation, a two-dimensional lattice, standing waves.*

У 1895 році датські вчені Д. Кортевег і Г. де Фріз (де Вріз) вивели рівняння для опису довгих хвиль на воді. Принцип суперпозиції розв’язків (сума розв’язків є також розв’язком) для рівняння Кортевега-де Фріза не виконується, і тому це рівняння є нелінійним і описує нелінійні хвилі. Розв'язок рівняння Кортевега-де Фріза є біжучою хвилею.

Нелінійне рівняння Шредінгера, як і рівняння Кортевега-де Фріза, також має широку поширеність при описі хвиль у різних областях фізики. Це рівняння було запропоновано в 1926 році видатним австрійським фізиком Ервіном Шредінгером для аналізу фундаментальних властивостей квантових систем і спочатку було використано при описі взаємодії внутріатомних частинок. Узагальнене або нелінійне рівняння Шредінгера описує сукупність явищ у фізиці хвильових процесів. Наприклад, воно використовується для опису ефекту самофокусування при впливі потужного лазерного променя на нелінійне діелектричне середовище і для опису розповсюдження нелінійних хвиль в плазмі.

У цій статті будемо вивчати дискретне нелінійне рівняння Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці з кубічною нелінійністю

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) = -\Delta\psi_{n,m}(t) - x_{n,m}\left|\psi_{n,m}(t)\right|^2\psi_{n,m}(t), \quad n,m\in\mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $\psi_{n,m}(t)$ – хвильова функція n,m-ї частинки, а

$$(\Delta\psi)_{n,m} = \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} - 4\psi_{n,m}$$

двовимірний дискретний оператор Лапласа.

Припускається, що послідовність $(x_{n,m})\subset\mathbb{R}$ є N-періодичною, тобто $x_{n+N,m} = x_{n,m+N} = x_{n,m}$.

Стоячі хвилі в цьому випадку мають вигляд

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m}\exp(-i\omega t), \tag{2}$$

де $(u_{n,m})\subset\mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega\in\mathbb{R}$ – частотою. Такі розв'язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами (за аналогією до лакунарних солітонів у фотонних кристалах).

Підставляючи (2) в (1) матимемо рівняння

$$-\Delta u_{n,m} - \omega u_{n,m} = x_{n,m}\left|u_{n,m}\right|^2 u_{n,m}. \tag{3}$$

Розглянемо більш загальне рівняння

$$Lu_{n,m} - \omega u_{n,m} = x_{n,m} \left| u_{n,m} \right|^2 u_{n,m}, \tag{4}$$

де

$$L = a_{n,m} u_{n+1,m} + a_{n-1,m} u_{n-1,m} + b_{n,m} u_{n,m+1} + b_{n,m-1} u_{n,m-1} + c_{n,m} u_{n,m}.$$

З рівнянням (4) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu - \omega u, u) - \frac{1}{4} \sum_{n,\, m \in \mathbb{Z}} x_{n,m} u_{n,m}^4, \tag{5}$$

визначений на гільбертовому просторі $E := l^2$ зі скалярним добутком $(u, v) = \sum_{n,\, m \in \mathbb{Z}} u_{n,m} v_{n,m}$, та нормою $\|u\| = \left(\sum_{n,\, m \in \mathbb{Z}} \left| u_{n,m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$ і позначимо через E_k простір всіх kN-періодичних послідовностей. Це є kN-вимірний гільбертів простір зі скалярним добутком $(u, v)_k = \sum_{n \in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$, та нормою $\|u\|_k = \left(\sum_{n,\, m \in Q_k} \left| u_{n,m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,

де

$$Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[\frac{kN}{2} \right] \le n \le kN - \left[\frac{kN}{2} \right] - 1 \right\},$$

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u - \omega u, u) - \frac{1}{4} \sum_{n \in Q_k} x_n u_n^4. \tag{6}$$

В силу періодичності коефіцієнтів оператора L критичні точки оператора J є kN-періодичні розв'язки рівняння (4).

Нам знадобляться наступні леми.

Лема 1. *Похідні функціоналів J та J_k визначаються за формулами*

$$\left\langle J'(u), h \right\rangle = (Lu - \omega u, h) - \sum_{n,\, m \in \mathbb{Z}} x_{n,m} u_{n,m}^3 h_{n,m}, \; u, h \in E,$$

$$\left\langle J_k'(u), h \right\rangle = (L_k u - \omega u, h)_k - \sum_{n,\, m \in Q_k} x_{n,m} u_{n,m}^3 h_{n,m}, \; u, h \in E_k,$$

а їх критичні точки є розв'язками рівняння відповідно з просторів E та E_k.

Допоміжні леми. Наступна лема дає умови неіснування нетривіальних критичних точок.

Лема 2. *Нехай $x_{n,m} > 0$ та $b = +\infty$. Тоді $u = 0 \in E$ (відповідно $u = 0 \in E_k$) єдина критична точка функціоналу J (відповідно J_k).*

Щоб довести існування kN-періодичних розв'язків нам знадобиться наступна лема.

Лема 3. *Для будь-яких нетривіальних критичних точок $u \in E$ та $u^{(k)} \in E^k$ відповідно функціоналів J та J_k з критичними значеннями $c = J(u)$ і $c^{(k)} = J_k\left(u^{(k)}\right)$ правильні нерівності $\|u\| \le 4\delta^{-1}Mm^{-\frac{3}{4}}c^{\frac{3}{4}}$ і $\left\|u^{(k)}\right\|_k \le 4\delta^{-1}Mm^{-\frac{3}{4}}\left(c^{(k)}\right)^{\frac{3}{4}}$, де $M = \max\{x_n\}$ і $m = \min\{x_n\}$.*

Нам також потрібні низькі оцінки для нетривіальних критичних точок і критичних значень. Їх нам дасть лема 4.

Лема 4. *За умов леми 3 правильні нерівності $\|u\|^2 \ge 2^{-\frac{1}{2}}\delta M^{-1}$, $c \ge 2^{-3}\delta^2\overline{m}^{-2}m$, і $\left\|u^{(k)}\right\|_k^2 \ge 2^{-\frac{1}{2}}\delta M^{-1}$, $c^{(k)} \ge 2^{-3}\delta^2 M^{-2}m$.*

Для того щоб довести існування нетривіальних kN-періодичних розв'язків рівняння (4) згідно леми 1, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Нам знадобиться теорема про зачеплення ([8], [11]).

Нехай H – гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z : \|z\| = r$. Позначимо

$$M = \left\{u = y + \lambda z : y \in Y,\ \|u\| \le \rho,\ \lambda \ge 0\right\}$$

і

$$M_0 = \left\{u = y + \lambda z : y \in Y,\ \|u\| = \rho \text{ і } \lambda \ge 0,\ \textit{або } \|u\| \le \rho \text{ і } \lambda = 0\right\},$$

тобто M_0 – межа $M\left(\partial M\right)$. Нехай

$$N := \{u \in Z : \|u\| = r\}.$$

Розглянемо функціонал φ на H і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} \varphi(u) > \alpha := \sup_{u \in M_0} \varphi(u).$$

В такому випадку говорять, що функціонал φ задовольняє *геометрії зачеплення*.

Теорема 1 (про зачеплення). *Нехай φ – функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, що задовольняє геометрії зачеплення та умові Пале-Смейла:*

(PS) *якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $\varphi'(u_n) \to 0$ і $\varphi(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.*

Нехай

$$b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)),$$

де

$$\Gamma := \{\gamma \in C(M; H) : \gamma = id \text{ на } M_0\}.$$

Тоді b – критичне значення φ і

$$\beta \le b \le \sup_{u \in M} \varphi(u).$$

Зауважимо, що послідовність (u_n) точок гільбертового простору H називається послідовністю Пале-Смейла функціоналу φ рівня b, якщо $\varphi(u_n) \to b$ і $\varphi'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$ ([6]).

Лема 5. *Функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла, тобто будь-яка послідовність Пале-Смейла містить збіжну підпослідовність.*

Лема 6. *Для достатньо великого $\rho > 0$ $J_k(u) \le 0$, $u \in M_0$, а при $r^2 \le \overline{m}^{-1}\delta : J_k(u) \ge \frac{\delta}{4} r^2$, $u \in N$. Більше того, існує константа $C > 0$, незалежна від k і така, що $J_k(u) \le C$, $u \in M$.*

Наступна теорема дає існування нетривіальних періодичних розв'язків рівняння (4).

Теорема 2. *Нехай* $x_{n,m} > 0$, $\omega \in (a; b)$ *та* $b \neq +\infty$. *Тоді для будь-якого* $k \geq 1$ *рівняння (6) має нетривіальний* kN*-періодичний розв'язок* $u^{(k)} \in E_k$. *Більше того, існує константа* $C > 0$, *незалежна від* k *і така, що* $n\left\|u^{(k)}\right\|_k \leq C$, $J_k\left(u^{(k)}\right) \leq C$.

Таким чином, у цій статті за допомогою методу критичних точок і теореми про зачеплення встановлено умови існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою для дискретного нелінійного рівняння Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці.

Література:

1. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуванню нелінійністю / С. М. Бак // Математичні студії. – 2010. – Т. 33, №1. – С. 78-84.
2. Бак С.М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. – 2012. – Т. 37, №1. – С. 76-88.
3. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201-250.
4. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. – Berlin: Springer, 2004. – 427 pp.
5. Henning D. Wave transmission in nonliniear lattices / D. Henning, G. Tsironis // Physics Repts. – 1999. – 309. – P. 333-432.
6. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations / A. Pankov // Nonlinearity. – 2006. – 19. – P. 27-40.
7. Pankov A. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity / A. Pankov, V. Rothos // Proc. Royal Society A. – 2008. – 464. – P. 3219-3236.

8. Rabinowitz P. Minimax methods in criticsl point theory with applications to differential equations / P. Rabinowitz. – Providence: Amer. Math. Soc., 1986. – 100 p.

9. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices // Functional analysis with current applications in science, technology and industry / P. Srikanth. – 1998. – Volume 377. – P. 118-122.

10. Teschl G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices / G. Teschl. – Providence: Amer. Math. Soc., 2000. – 251 p.

11. Willem M. Minimax theorems / M. Willem. – Boston: Birkhauser, 1996. – 162 p.

УДК 514.12.01

Бевз Дар'я

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницький державний педагогічний університет

імені Михайла Коцюбинського

ГРА «АЗИМУТАЛЬНИЙ ХІД» - ВЕКТОРИ НАВКОЛО НАС

Анотація: *У статті представлена самостійна робота для учнів 9-го класу, що навчаються за програмою поглибленого вивчення математики. Виконання даної роботи сприятиме кращому засвоєнню учнями властивості комутативності додавання векторів. Також подано приклад закріплення вказаної властивості через інтеграцію в урок географії, а саме за допомогою гри «Азимутальний хід».*

Ключові слова: *вектор, координати, лінійні операції над векторами.*

Abstract: *The article is an independent work for students of the 9th grade of study in the program of in-depth study of mathematics. Thanks to this independent work students learn the property of the commutativity of the vectors. Also, the article*