С.М. Бак, Д.М. Домбровська

ВАРІАЦІЙНИЙ ПІДХІД У ЗАДАЧІ ПРО ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В ЛАНЦЮГАХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Вступ. В даній статті вивчаються рівняння, що описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Нехай q_n — узагальнена координата n-го осцилятора. Рівняння його руху при відсутності взаємодії з сусідніми осциляторами мають вигляд:

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Припускається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з двома своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - a_n(q_n - q_{n+1}), n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Подібні системи представляють інтерес у зв'язку з чисельними застосуваннями у фізиці [6], [7], [8]. В роботі [9] за допомогою теорії біфуркацій вивчались біжучі хвилі в таких ланцюгах, а в [1], [2], [6], [11] – періодичні за часом розв'язки. Огляд відомих результатів про такі системи зроблено в [12].

В даній статті за допомогою теореми про зачеплення отримано умови існування періодичних біжучих хвиль. Ця стаття узагальнює результати, отримані в статті [3].

Постановка задачі. Розглянемо однорідний за просторовою змінною ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів з потенціалом:

$$U_n(r) = U(r) = -\frac{c_0}{2}r^2 + V(r).$$

Тоді система (1) набуде вигляду $\ddot{q}_n = a\Delta_d q_n + c_0 q_n - V'(q_n),$ (2)

де $(\Delta_d q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$, Δ_d – одновимірний дискретний оператор Лапласа.

Біжуча хвиля має вигляд $q_n(s) = u(n - cs)$ і для її профілю $u(s)$ отримаємо рівняння $c^2 u''(s) = a(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)) + c_0 u(s) - V'(u(s))$. (3)

Це рівняння має, фактично, варіаційну структуру.

Відмітимо, що функція неперервного аргументу $u(s), u \in R$ називається профілем хвилі. Константа $c \neq 0$ представляє собою швидкість хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля зміщується вправо, а якщо $c < 0$, то вліво. Інтерес представляють нетривіальні хвилі з профілем тотожно відмінним від нуля.

Зауважимо, що профіль періодичної біжучої хвилі задовольняє умові

$$u(s+2k)=u(s), t\in R. \tag{4}$$

Всюди далі під розв'язком рівняння (3) розуміється функція *u(s)* класу $C^2(\mathbf{R})$, яка задовольняє рівняння (3) для всіх $s\in R$.

Варіаційне формулювання задачі. Всюди далі припускається, що потенціал задовольняє умову: *(h) функція V(r) неперервно диференційовна, V(0) = V'(0) = 0 і V'(r) = o(r), при* $r\to 0$ *та існує таке* $\mu > 2$, *що* $0<\mu V(r)\le V'(r)r, r\neq 0$.

Зазначимо, що в рівняння (3) швидкість *c* входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція *u(t)* задовольняє рівнянню (3), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$. Одна з них рухається вправо, інша – вліво.

З рівнянням (3) та умовою (4) пов'язується функціонал J_k

$$J_k(u)\int_{-k}^{k}\{\frac{c^2}{2}(u'(t))^2-\frac{a}{2}(u(t+1)-u(t))^2+\frac{c_0}{2}u^2(t)-V(u(t))\}dt, \tag{5}$$

який визначений на просторі $E_k=\{u\in H^1_{loc}(R): u(s+2k)=u(s)\}$

з нормою $\|u\|_k=(\|u\|^2_{L^2(-k,k)}+\|u'\|^2_{L^2(-k,k)})^{\frac{1}{2}}=(\int_{-k}^{k}(|u(s)|^2+|u'(s)|^2)ds)^{\frac{1}{2}}$. Тобто E_k— соболевський простір *2k*-періодичних функцій.

Нам знадобляться наступні леми, отримані в роботі [3]:

Лема 1. *В зроблених припущеннях* J_k — *функціонал класу* C^1 *на* E_k. *Його похідна виражається формулою*

$$\langle J_k'(u),h\rangle=\int_{-k}^{k}\{c^2u'(s)h'(s)+a(u(s+1)+$$
$$+u(s-1)-2u(s))h(s)+c_0u(s)h(s)-V'(u(s))h(s)\}ds \tag{6}$$

для $u,h\in E_k$.

Лема 2. *Критичні точки функціоналу* J_k *є* C^2*-розв'язками рівняння (3), що задовольняють умові (4).*

Лема 3. *Має місце нерівність* $\int_{-k}^{k}|u(s+1)-u(s)|^2ds\le\int_{-k}^{k}|u'(s)|^2ds, u\in E_k$. (7)

Для спрощення записів позначимо через $(Au)(s):=u(s+1)-u(s)$.

Основні результати. За допомогою теореми про зачеплення встановимо існування нетривіальних біжучих хвиль з періодичним профілем. Для цього, згідно леми 2, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Відмітимо, що $u = 0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожньо рівна нулю.

Теорема 1. *Нехай виконується умова (h) і* $c_0 > 0$. *Для будь-яких* $k\ge 1$ *і* $c>0$ *рівняння (3) має розв'язок u,що задовольняє умові (4), Тим самим, існують дві біжучі хвилі з профілем u та швидкостями* $\pm c$.

Сформулюємо теорему про зачеплення ([12], [13], [14]).

Нехай H — гільбертів простір, $H=Y\oplus Z$. Нехай також $p > r > 0$ і $z\in Z:\|z\|=r$. Позначимо $M:=\{u=y+\lambda z: y\in Y, \|u\|\le\rho, \lambda\ge 0\}$

і $M_0:=\{u=y+\lambda z: y\in Y, \|u\|=\rho$ і $\lambda\ge 0$, або $\|u\|\le\rho, \lambda=0\}$,

тобто M_0 – межа M (∂M). Нехай $N:=\{u\in Z: \|u\|=r\}$.

Розглянемо функціонал φ на H і припустимо, що $\beta:=\inf_{u\in N}\varphi(u)>\alpha:=\sup_{u\in M_0}\varphi(u)$.

В такому випадку говорять, що функціонал φ задовольняє геометрії зачеплення.

Теорема 2 (Про зачеплення). *Нехай φ — функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, що задовольняє геометрії зачеплення та умові Пале-Смейла: (PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $\varphi'(u_n) \to 0$ і $\varphi(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.*

Нехай $b := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{u\in M} \varphi(\gamma(u))$, *де* $\Gamma := \{\gamma \in C(M;H) : \gamma = id \text{ на } M_0\}$.

Тоді b — критичне значення φ і $\beta \le b \le \sup_{u\in M}\varphi(u)$.

Почнемо з умови Пале-Смейла.

Лема 4. *За умов теореми 1 функціонал J_k задовольняє умові Пале-Смейла.*

Лема 5. *Якщо V задовольняє (h), то існують такі константи $d>0$ та $d_0 \ge 0$, що* $V(r) \ge d\,|r|^{\mu} - d_0$. (8)

Доведення. Зафіксуємо $r_0 > 0$. Оскільки $V'(r) \ge \mu \dfrac{V(r)}{r}$,

то згідно стандартних результатів про диференціальні нерівності [5], $V(r) \ge y(r)$ при $r \ge r_0$, де $y(r)$ — розв'язок диференціального рівняння

$$y'(r) = \frac{\mu}{r}\, y(r)$$

з початковою умовою $y(r_0) = V(r_0)$. Останнє можна знайти в явному вигляді

$$y(r) = \frac{V(r_0)}{r_0^{\mu}}\, r^{\mu}.$$

Отже, $V(r) \ge \dfrac{V(r_0)}{r_0^{\mu}}\, r^{\mu},\ r \ge r_0$.

Тоді для всіх $r \ge 0$, $V(r) \ge V(r_0)\left(\dfrac{r^{\mu}}{r_0^{\mu}} - 1\right) = \dfrac{V(r_0)}{r_0^{\mu}}\, r^{\mu} - V(r_0)$.

Аналогічно, для $r \le 0$, $V(r) \ge \dfrac{V(-r_0)}{r_0^{\mu}}\,|\, r^{\mu}\,| - V(r_0)$.

Звідси отримуємо (8) з $d = \min\left[\dfrac{V(-r_0)}{r_0^{\mu}}, \dfrac{V(r_0)}{r_0^{\mu}}\right]$, $d_0 = \max[V(r_0), V(-r_0)]$. □

Лема 6. *За умов теореми 1 функціонал J_k задовольняє геометрії зачеплення.*

Доведення теореми 1. Лема 4 та лема 6 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 2, u — C^2 - розв'язок задачі (3), (4). Теорему доведено.

Література:

1. Бак С.Н., Панков А.А. О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов //Доповіді НАН України. – 2004. – №9. – С.13-16.

2. Бак С.Н. Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов //Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – №3. – Т.11. – С. 263-273.

3. Бак С.Н., Панков А.А. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов //Український математичний журнал. – 2006. – №6. – Т.58. – С.723-729.

4. Бак С.М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів //Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140-153.

5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

6. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence,linear stability and quantization // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201 – 250.

7. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators// Bak S. M. //Communications in Mathematical Analysis. – 2007. –Volume 3, Number 1. – P. 19–26.

8. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel–Kontorova model. – Berlin: Springer, 2004. – 427 p.

9. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators //Commun. Math. Phys. – 2000. – 211. – P. 439 – 464.

10. Lions P.L. The concentration – compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II // Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire. – 1984. – V. 1. – P. 223 – 238.

11. MacKay R.S., Aubry S. Proof of existence of breathers for time-reversible a Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators //Nonlinearity. – 1994. – P.1623 – 1643.

12. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 p.

13. Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations./ Rabinowitz P. – Providence, R. I.: American Math. Soc. – 1986. – 100 p.

14. Willem M. Minimax theorems./ Willem M. – Boston, Birkhäuser. – 1996. – 162 p.