Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського

На правах рукопису

Бак Сергій Миколайович

УДК 517.97

РІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕННИХ ЛАНЦЮГІВ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ: ЗАДАЧА КОШІ, ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ, БІЖУЧІ ХВИЛІ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник –
Панков Олександр Андрійович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Вінниця – 2007

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. Зокрема, останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною.

Однією з найбільш популярних моделей є нескінченний ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Серед таких систем найбільш відома модель Френкеля–Конторової, вивчена в роботах Я. Френкеля та Т. Конторової 1938 року. Ця та близькі моделі з фізичної точки зору детально вивчені О. Браном, Ю.Ківшаром, Д. Хеннінгом (D. Henning), Г. Ціронісом (Tsironis G.) та ін. Математична ж сторона питання досліджена досить слабко. Відмітимо, однак, що близький клас систем Фермі–Паста–Улама вивчено досить добре такими математиками як Г. Фрісек (G. Friesecke), Дж. Воттіс (J. Wattis), Г. Аріолі (G. Arioli), Ф. Газзола (F. Gazzola), О. Панков та ін. В значній мірі досліджено дискретні нелінійні рівняння Шредінгера такими математиками як П. Кеврекідс (P. Kevrekides), К. Расмуссен (K. Rasmussen), А. Бішоп (A. Bishop), О. Панков, М. Вейнштейн (M. Weinstein) та ін.

Особливу роль в динаміці подібних систем відіграють періодичні розв'язки, які в фізиці називаються бризерами. Питання про існування бризерів тої чи іншої частоти є однією із актуальних проблем нелінійної фізики.

На даний час у цьому напрямку є окремі часткові результати, отримані методами теорії збурень для однорідних ланцюгів зі слабким зв'язком.

Значних результатів досягли такі вчені як С. Обрі (S. Aubry) та Р. Маккей (R. MacKay).

Іншим важливим класом розв'язків є біжучі хвилі. Такі розв'язки виникають в багатьох задачах. Біжучі хвилі для параболічних рівнянь в частинних похідних досить детально досліджено такими математиками як Дж. Смоллер (J. Smoller), А. Вольперт (A. Volpert) та В. Вольперт (V. Volpert). Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі–Паста–Улама можна знайти в роботах О. Панкова, зокрема в [55] найбільш повний огляд результатів. В той же час для ланцюгів осциляторів відома лише одна робота Г. Йосса (G. Iooss) та К. Кіршгаснера (K. Kirschgässner) ([45]), результати якої отримано методами теорії біфуркацій.

Таким чином, тема даної роботи – дослідження задачі Коші, періодичних по часу розв'язків та біжучих хвиль для ланцюгів лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів – представляється актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в рамках державної бюджетної теми „Варіаційні методи дослідження нелінійних рівнянь математичної фізики в необмежених областях" (номер державної реєстрації 0103U003236), що є складовою частиною досліджень, передбачених планами наукової роботи кафедри математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертації є:

1) Дослідження умов існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.
2) Дослідження умов існування періодичних за часом розв'язків для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів та методів їх побудови.

3) Дослідження умов існування біжучих хвиль в ланцюгах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

Об'єктом дослідження є нескінченна система диференціальних рівнянь, що описує динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

Предметом дослідження є умови існування та єдиності розв'язків задачі Коші, умови існування періодичних розв'язків та біжучих хвиль для системи осциляторів.

В даній роботі розвинуто варіаційний метод відшукання періодичних розв'язків таких систем, метод умовної мінімізації та метод періодичних апроксимацій.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати, сформульовані і доведені в дисертації, є новими та строго обґрунтованими. У дисертаційній роботі отримано такі результати:

1) Умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.
2) Умови існування періодичних за часом розв'язків для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів та досліджено методи їх побудови.
3) Умови існування біжучих хвиль в ланцюгах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

Зауважимо, що питання коректності задачі Коші взагалі не розглядалось для таких систем, лише для близького класу систем Фермі–Паста–Улама (див. [55]). Щодо періодичних розв'язків, то на даний час у цьому напрямку є окремі часткові результати, отримані методами теорії збурень для однорідних по простору ланцюгів зі слабким зв'язком ([34], [35], [49]). Також для ланцюгів нелінійних осциляторів відома лише одна робота, присвячена питанню існування тільки періодичних біжучих хвиль ([45]).

Результати цієї роботи отримано методами теорії біфуркацій для ланцюгів зі слабким зв’язком.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосовані в теорії звичайних диференціальних рівнянь та у нелінійній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації одержано автором самостійно. У працях [3] та [5] науковому керівнику Панкову О.А. належать формулювання задач та аналіз одержаних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включено до дисертації, доповідались на:

– VIII всеукраїнській науково-практичній конференції „Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість” (Київ, 2005 р.);
– Обласній звітній науково-практичній конференції викладачів та студентів (Вінниця, 2005 р.);
– міжнародній конференції „Математичний аналіз і суміжні питання” (Львів, 2005 р.);
– Обласній звітній науково-практичній конференції викладачів та студентів (Вінниця, 2006 р.);
– XI міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2006 р.);
– Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (Львів, 2006 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 8-и працях ([3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]), з них 5 – у наукових журналах та збірниках наукових праць, 3 – у тезах та матеріалах конференцій. Серед публікацій 4 праці у наукових фахових виданнях з переліку ВАК України.

ДЕЯКІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ

Для $p \in [1; \infty)$ позначимо через l^p банахів простір всіх p-сумованих нескінченних в обидві сторони послідовностей $q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ з нормою

$$\|q\|_{l^p} = \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} |q_n|^p \right]^{1/p}.$$

Через l^∞ позначається банахів простір в обидві сторони обмежених послідовностей з нормою

$$\|q\|_{l^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |q_n|.$$

При $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ простір l^{p_1} неперервно вкладений в l^{p_2}, $l^{p_1} \subseteq l^{p_2}$, причому

$$\|q\|_{l^{p_2}} \le \|q\|_{l^{p_1}}, \quad q \in l^{p_1}.$$

Простір l^2 є гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)}, q^{(2)} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_n^{(1)} q_n^{(2)}.$$

Нехай E – банахів простір і $(a, b) \subset \mathbb{R}$ – інтервал. Тоді через $L^p(a, b; E)$, $1 \le p \le \infty$, позначається банахів простір вимірних p-сумованих функцій f на (a, b) зі значенням в E з нормою

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_a^b \|f(t)\|^p \, dt \right]^{1/p}.$$

Якщо E – гільбертів простір, то $L^2(a, b; E)$ також гільбертів.

Через $L^\infty(a, b; E)$ позначається банахів простір дійсних обмежених вимірних функцій на (a, b) зі значенням в E з нормою

$$\|f\|_{L^\infty} = \underset{t \in (a, b)}{ess \sup} \|f(t)\|_E.$$

Якщо інтервал (a, b) скінченний, то при $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ простір $L^{p_2}(a, b; E) \subseteq L^{p_1}(a, b; E)$.

Через $L^p_{loc}(\mathbb{R}; E)$ позначається простір таких вимірних функцій f на $\mathbb{R}$ зі значеннями в E, що звуження f на будь-який скінчений інтервал (a, b) належить $L^p(a, b; E)$.

Для замкнутого інтервалу $[a, b] \subset \mathbb{R}$ через $C(a, b; E)$ позначається банахів простір всіх неперервних на $[a, b]$ функцій зі значеннями в E.

Нехай тепер E – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot\,, \cdot)_E$ та (a, b) – довільний інтервал. Через $H^1(a, b; E)$ позначається простір таких функцій u на (a, b) зі значеннями в E, що $u \in L^2(a, b; E)$ та її слабка похідна $u' \in L^2(a, b; E)$. Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(u, v)_{H^1} = \int_a^b \left[(u(t), v(t))_E + (u'(t), v'(t))_E \right] dt$$

та нормою

$$\|u\|_{H^1} = \left[(u, u)_{H^1} \right]^{1/2}.$$

Через $H^1_{loc}(\mathbb{R}; E)$ позначимо простір таких функцій u на $\mathbb{R}$ зі значеннями в E, що обмеження u на кожний скінченний інтервал (a, b) належить $H^1(a, b; E)$. Відомо ([16]), що $H^1(a, b; E) \subset C(a, b; E)$ для будь-якого скінченного інтервалу (a, b). Зокрема, функції з $H^1_{loc}(\mathbb{R}; E)$ неперервні на $\mathbb{R}$. Простір H^1 є одним із представників родини просторів Соболєва.

Для лінійного неперервного функціоналу f на банаховому просторі через $\langle f, u \rangle$ позначається значення функціоналу f на елементі u. Нехай Φ функціонал на банаховому просторі E. Похідною Гато функціоналу Φ в точці $u \in E$ називається такий лінійний неперервний функціонал f на E, що для будь-якого $h \in E$

$$\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{1}{\lambda}\left(\Phi(u+\lambda h)-\Phi(u)\right)-\langle f, h\rangle\right]=0.$$

Похідна Гато позначається $\Phi'(u)$ та є елементом спряженого простору E^*. Якщо $\Phi'(u)$ існує для будь-якого $u\in E$ і відображення $\Phi': E\to E^*$ неперервне, то говорять, що функціонал Φ належить класу C^1.

Означення та основні властивості класичних банахових просторів можна знайти в [11], [14]. Диференціальне числення для функціоналів на банахових просторах викладено в [12], [19].

Щоб не використовувати численні індекси, часто літера C позначає загальну константу, яка може мінятися від оцінки до оцінки.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Останнім часом дискретні за просторовою змінною моделі широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. Найпростішою моделлю, що описує ланцюг частинок (атомів), які взаємодіють зі своїми найближчими сусідами, є модель Френкеля–Конторової, вивчена в роботах Я. Френкеля та Т. Конторової 1938 року. (Як зазначено в [37], ця система з'являлась і раніше в роботах Л. Прандтля та У. Делінгера 1928 – 29 рр.) Ця та близькі моделі з фізичної точки зору детально вивчені (див. [36], [37], [43] та цитовану там літературу). Математична ж сторона питання досліджена досить слабко.

Відмітимо, однак, що близький клас систем Фермі–Паста–Улама вивчено досить добре ([29] – [33], [41], [44], [46], [55], [60], [64], [65], [68]). В значній мірі досліджено дискретні нелінійні рівняння Шредінгера ([47], [53], [54], [56], [58], [61], [71]).

Всі ці моделі є нескінченновимірними гамільтоновими системами.

Питання про існування бризерів та біжучих хвиль для систем нелінійних осциляторів вивчали такі вчені як С. Обрі, Р. Маккей, Г. Йосс та К. Кіршгаснер ([34], [35], [45], [49]).

В роботах [39], [52] вивчаються стаціонарні розв'язки та біжучі хвилі для дискретних рівнянь типу реакції-дифузії. А в [21] вивчається рівняння Клейна–Гордона.

1.1. Існування та єдиність локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для нелінійних диференціальних рівнянь в банаховому просторі

Розглянемо в банаховому просторі $\mathcal{B}$ нелінійне диференціальне рівняння виду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1}$$

де $f(t, x)$ – деяка функція дійсної змінної t та x ($x \in \mathcal{B}$) зі значеннями в $\mathcal{B}$. Припускається, що функція $f(t, x)$ неперервна по змінній t.

Теорема 1.1.1 (локальна). *Нехай функція $f(t, x)$ неперервна по t і задовольняє при $t \in [a; b]$, $\|x - x_0\| \le \eta$ умовам*

$$\|f(t, x)\| \le M_1,$$

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \le M_2 \|x_2 - x_1\|.$$

Тоді існує число $\delta > 0$ ($\delta = \min\left\{\frac{\eta}{M_1}, \frac{1}{M_2}\right\}$) таке, що для будь-якого $t_0 \in [a; b]$ в інтервалі $(t_0 - \delta; t_0 + \delta) \cap [a; b]$ диференціальне рівняння (1.1) має один і тільки один розв'язок $x = \varphi(t)$, що задовольняє умові

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

і залишається в кулі

$$\|\varphi(t) - x_0\| \le \eta.$$

Теорема 1.1.2 (глобальна). *Нехай неперервна по t функція $f(t, x)$ задовольняє при $t \in [a; b]$, $x \in \mathcal{B}$ умовам*

$$\|f(t, x)\| \le M_1 + M_0 \|x\|,$$

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \le M_2 \|x_2 - x_1\|.$$

Тоді для будь-якого $x_0 \in \mathcal{B}$ і $t_0 \in [a; b]$ єдиний розв'язок $x = \varphi(t)$, що задовольняє початковій умові (1.2).

Ці результати можна знайти в [13].

1.2. Модель Френкеля–Конторової

Як було зазначено, найпростішою моделлю, що описує ланцюг частинок (атомів), які взаємодіють зі своїми найближчими сусідами, є модель Френкеля–Конторової, вивчена в роботах Я. Френкеля та Т. Конторової 1938 року. Ця та близькі моделі з фізичної точки зору детально вивчені (див. [36], [37], [43] та цитовану там літературу). Математична ж сторона питання досліджена досить слабко.

Цю модель зображено схематично на рис. 1.1. Вона характеризується гамільтоніаном

$$\mathcal{H} = K + U\ , \tag{1.3}$$

де K – кінетична енергія,

$$K = \frac{m_a}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{dq_n}{dt}\right)^2, \tag{1.4}$$

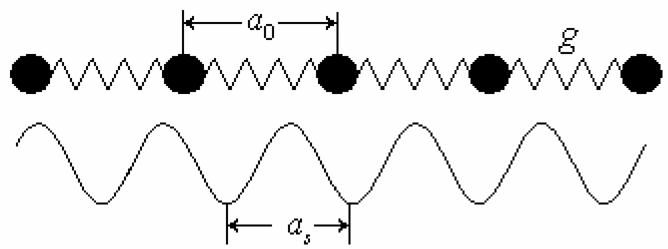

Рис. 1.1

де m_a – маса частинки і $q_n(t)$ – координата n-ої частинки ланцюга в момент часу t. Потенціальна енергія U складається з двох частин,

$$U = U_1 + U_2, \tag{1.5}$$

де U_1 – потенціал n-ої частинки, що подається у вигляді

$$U_1 = \frac{\varepsilon_s}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi q_n}{a_s}\right)\right], \tag{1.6}$$

з амплітудою ε_s та періодом a_s. Другий доданок в (1.5) характеризує гармонічну взаємодію найближчих сусідів в ланцюгові,

$$U_2 = \frac{g}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(q_{n+1} - q_n - a_0\right)^2, \qquad (1.7)$$

де g – еластична константа і a_0 – відхилення від положення рівноваги міжатомного потенціалу. Модель, представлена рівностями (1.4)–(1.7), задовольняє такі умови:

(i) *Рух атомів обмежується тільки одним напрямом;*

(ii) *У загальному виразі для внутрішньої потенціальної енергії,*

$$U_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_1\left(q_{n+1} - q_n\right),$$

функція $V_1(x)$ розкладається в ряд Фур'є і зберігається тільки перший несталий член;

(iii) *Потенціал взаємодії розглядається тільки між найближчими сусідами,*

$$U_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_2\left(q_{n+1} - q_n\right),$$

в розвиненні функції $V_2(x)$ в ряд Тейлора зберігається тільки квадратичний член (передбачається, що члени нульового і першого порядку відсутні). При цьому

$$g = V_2''(a_0).$$

При безрозмірних змінних

$$q_n \to \left(2\pi / a_s\right) q_n,$$

$$t \to \left(2\pi / a_s\right)\sqrt{\varepsilon_s / 2m_a}\, t,$$

гамільтоніан (1.3)–(1.7) набуває вигляду

$$H = \frac{\mathcal{H}}{\left(2\varepsilon_s / 2\right)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dq_n}{dt}\right)^2 + \left(1 - \cos q_n\right) + \frac{1}{2}\left(q_{n+1} - q_n - a_0\right)^2\right\}, \qquad (1.8)$$

де $a_0 \to a_0\left(2\pi / a_s\right)$ та безрозмірна константа

$$g \to g\frac{\left(a_s/2\pi\right)}{\left(\varepsilon_s/2\right)}.$$

Із гамільтоніана (1.8) випливає рівняння динаміки:

$$\ddot{q}_n + \sin q_n - g\left(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n\right) = 0\,, \tag{1.9}$$

де q_n – координата n-ої частинки, g – еластична константа.

В роботах [36], [37] приведено результати чисельних експериментів про розв’язки таких систем. Але ці результати не дають відповіді на питання: чи існують вони взагалі і при яких умовах? Ця дисертація дає в деякому сенсі строгі відповіді на ці запитання.

1.3. Нескінченні ланцюги нелінійних осциляторів зі слабким зв'язком

Періодичні розв'язки. Питання про існування бризерів для таких системах вивчали такі вчені як С. Обрі та Р. Маккей ([34], [35], [49]). Вони отримали часткові результати методами теорії збурень для однорідних за простором ланцюгів зі слабким зв'язком. Динаміка таких ланцюгів описується рівняннями

$$\ddot{q}_n = -V'(q_n) + \alpha\left(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n\right),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.10}$$

де $q_n(t)$ – координата n-го осцилятора в момент часу t, α – малий параметр.

В роботі [49] розглянуто систему (1.10) з умовами

$$V'(0) = 0, V''(0) = \omega_0^2 > 0.$$

Дана система подається в гамільтоновому вигляді із гамільтоніаном

$$H(p, q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} p_n^2 + V(q_n) + \frac{1}{2}\alpha(q_{n+1} - q_n)^2 \right).$$

Доведено, що при достатньо малому α система (1.10) має такий періодичний розв'язок, що q_n близьке до нуля при $n \neq n_0$, а q_{n_0} близьке до розв'язку рівняння $\ddot{q}_n = -V_n'(q_n)$.

Біжучі хвилі. Іншим важливим класом розв'язків є біжучі хвилі. Такі розв'язки виникають в багатьох задачах. Біжучі хвилі для параболічних рівнянь в частинних похідних досить детально досліджено такими математиками як Дж. Смоллер , А. Вольперт та В. Вольперт ([66], [70], див. також [24] стосовно застосувань в біології). Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі–Паста–Улама можна знайти в роботі О. Панкова ([55]). В той же час для ланцюгів осциляторів відома лише одна робота Г. Йосса та К. Кіршгаснера ([45]), результати якої отримано методами теорії біфуркацій. Встановлено існування біжучих хвиль з припущенням, що α достатньо мале.

Щодо задачі Коші для таких систем, то це питання випало з поля зору математиків. Лише для близького класу систем Фермі–Паста–Улама було досліджено питання коректності задачі Коші (див. [55]).

1.4. Система Фермі–Паста–Улама

Системи Фермі–Паста–Улама вивчено досить добре в роботах ([29] – [33], [41], [44], [46], [55], [60], [64], [65], [68]). Найбільш повний огляд результатів для таких систем можна знайти в [55].

Розглядається одновимірний ланцюг частинок, що взаємодіють зі своїми найближчими сусідами. Рівняння руху такої системи має вигляд:

$$m_n \ddot{q}_n = U'_{n+1}\left(q_{n+1} - q_n\right) - U'_n\left(q_n - q_{n-1}\right), \; n \in \mathbb{Z}, \tag{1.11}$$

де $q_n = q_n(t)$ – координата n-ої частинки в момент часу t, m_n – маса цієї частинки, U_n – потенціал взаємодії між n-ою та $(n-1)$-ою частинками. Припускається, що існують константи $M_1 > 0, M_2 > 0$, такі, що

$$M_1 \le m_n \le M_2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Рівняння (1.11) – нескінченна система звичайних диференціальних рівнянь, яка є гамільтоновою системою з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p_n^2}{2m_n} + U_n(q_{n+1} - q_n) \right), \tag{1.12}$$

де $p_n(t) = m_n \cdot \dot{q}_n(t)$.

Розглянемо простір l^2 двохсторонніх послідовностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Елементи цього простору задовольняють співвідношенню

$$\lim_{n \to \pm\infty} q_n(t) = 0. \tag{1.13}$$

У цьому випадку фазовим простором є $l^2 \times l^2$ і рівняння (1.11) може бути записане у вигляді

$$\dot{u} = J \nabla H(u), \tag{1.14}$$

де

$$u = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} : \; l^2 \times l^2 \to l^2 \times l^2,$$

I – одиничний оператор, $\nabla H(u)_n = \begin{pmatrix} U'_n(q_n - q_{n-1}) - U'_{n+1}(q_{n+1} - q_n) \\ \dfrac{p_n}{m_n} \end{pmatrix}$.

Позначимо через G нелінійний оператор

$$G(q)_n = U_n'(q_n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $q = \{q_n\}$, і розглянемо оператори

$$\left(\partial^+ q\right)_n := q_{n+1} - q_n,$$

$$\left(\partial^- q\right)_n := q_n - q_{n-1}.$$

Тоді

$$\nabla H(u) = \begin{pmatrix} -\partial^+ G\left(\partial^- q\right) \\ \dfrac{p}{m} \end{pmatrix},$$

і рівняння (1.11) набуде вигляду

$$m\ddot{q} = \partial^+ G\left(\partial^- q\right). \tag{1.15}$$

Відмітимо, що ∂^+ і ∂^- обмежені лінійні оператори в l^2 і $\left(\partial^+\right)^* = -\partial^-$.

Інша форма рівняння (1.15) така

$$m\ddot{q} = \partial^- G^+\left(\partial^+ q\right),$$

де

$$G^+(q)_n = U_{n+1}'(q_n).$$

Однак більш природним та більш важливим випадком конфігураційного простору є простір $X = \tilde{l}^2$, що складається з двохсторонніх послідовностей $q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ таких, що $\partial^+ q \in l^2$. Наділимо його нормою

$$\|q\|_X = \left(\left\|\partial^+ q\right\|_{l^2}^2 + |q(0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left\|\partial^- q\right\|_{l^2}^2 + |q(0)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

тоді X – гільбертів простір. Отримано такі результати (див. [55]):

Задача Коші. Задача Коші полягає в знаходженні розв’язку рівняння (1.14), що задовольняє початковим умовам:

$$q(0) = q^{(0)} \in l^2, \quad \dot{q}(0) = q^{(1)} \in l^2. \tag{1.16}$$

Далі припускається, що виконуються наступні умови:

(i) *Існують такі* $M_2 \ge M_1 \ge 0$, *що*

$$M_1 \le m_n \le M_2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(ii) *Потенціал* $U_n(r) \in C^1(\mathbb{R})$, $U_n(0) = U_n'(0) = 0$ *і для будь-якого* R *існує таке* $C(R) > 0$, *що для всіх* $n \in \mathbb{Z}$

$$\left|U_n'(r_1) - U_n'(r_2)\right| \le C(R)\left|r_1 - r_2\right|, \quad |r_1|, |r_2| \le R. \tag{1.17}$$

Теорема 1.4.1. *Нехай виконуються умови* (i) *та* (ii). *А також нехай виконується одна із умов*

(a) $U_n(r) \ge 0$ *для будь-яких* $n \in \mathbb{Z}$ *та* $r \in \mathbb{R}$;

(b) *існує неспадна неперервна функція* $h(r)$, $r \ge 0$, *така, що* $\lim\limits_{r \to +\infty} h(r) = +\infty$ *і для будь-якого* $n \in \mathbb{Z}$ $U_n(r) \ge h(|r|)$, $r \in \mathbb{R}$.

Тоді для будь-яких початкових даних $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ *задача Коші (1.14), (1.16) має єдиний глобальний розв'язок, визначений для всіх* $t \in \mathbb{R}$.

Періодичні розв'язки. Отримано умови існування T-періодичних розв'язків рівняння (1.11) при таких умовах:

(i) *Існують такі* $M_2 \ge M_1 \ge 0$, *що*

$$M_1 \le m_n \le M_2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(ii) *Потенціал* $U_n(r) \in C^1(\mathbb{R})$, $U_n(0) = U_n'(0) = 0$.

(iii) $U_n(r) = -\dfrac{c_n}{2} r^2 + V_n(r)$, *де* $V_n(0) = V_n'(0) = 0$ *і* $V_n'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$.

(iv) *Існує таке* $\theta > 2$, *що* $V_n'(r) \cdot r \ge \theta \cdot V_n(r) \ge 0$, *а також існує таке* $r_0 > 0$, *що* $V_n(r) > 0$ *при* $|r| \ge r_0$.

(v) $m_{n+N} = m_n$, $c_{n+N} = c_n$ *і* $V_{n+N}(r) = V_n(r)$.

Теорема 1.4.2. *Нехай виконуються умови* $(i)-(v)$ *з* $c_n \ne 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$. *Тоді для будь-якого* $T > 0$ *система (1.11) має ненульовий* T*-періодичний розв'язок. Причому цей розв'язок несталий, якщо* $c_n < 0$ *для* $n \in \mathbb{Z}$. *Якщо* $c_n > 0$ *для всіх* n, *то існує таке* $T_0 > 0$, *що цей розв'язок несталий при* $T > T_0$. *Якщо ж*

c_n набуває різних знаків, то існують $T_0 > 0$ і $T_1 > 0$, де $T_1 > T_0$ такі, що система (1.11) має несталий T-періодичний розв'язок для будь-якого $T \in (T_0; T_1)$.

Біжучі хвилі. Нагадаємо, що біжучою хвилею називається розв'язок виду

$$q_n(t) = u(n - ct), \tag{1.18}$$

де $u(s)$ – функція неперервного аргументу $s \in \mathbb{R}$. Функція $u(s)$ називається профілем хвилі. Константа $c \neq 0$ є швидкістю хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля рухається вправо, а якщо $c < 0$, то вліво. Інтерес представляють нетривіальні хвилі, тобто хвилі з профілем u тотожно не рівним нулю.

Розглядається однорідна система, тобто

$$\ddot{q}_n = U'(q_{n+1} - q_n) - U'(q_n - q_{n-1}), \ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.19}$$

Підставляючи (1.18) в (1.19), отримаємо рівняння

$$c^2 u''(t) = U'(u(t+1) - u(t)) - U'(u(t) - u(t-1)). \tag{1.20}$$

Це диференціальне рівняння з відхиленим аргументом. Теорії подібних рівнянь присвячено велику кількість робіт (див., наприклад, [1], [19], [17], [27], [28]). Однак, рівняння (1.20) містить відхилення аргументу як вперед, так і назад. Тому результати і методи цієї теорії не можна використати. Рівняння такого виду звичайно досліджуються за допомогою варіаційних методів, часто із залученням періодичних апроксимацій (див., наприклад, [55]).

Потенціал $U(r)$ подається у вигляді

$$U(r) = \frac{a}{2} r^2 + V(r),$$

де $V(r)$ – ангармонічна частина потенціалу. Нехай X – гільбертів простір

$$X := \left\{ u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}),\, u(0) = 0 \right\}$$

зі скалярним добутком

$$\left(u,\, v\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'(t)v'(t)dt.$$

Теорема 1.4.3. *Нехай* $c^2>\max\{0;\,a\}$ *і нехай виконуються умови:*

(i) $U(r)=\dfrac{a}{2}r^2+V(r)$, *де* $V\in C^1(\mathbb{R})$, $V(0)=V'(0)=0$ *та* $V'(r)=o(|r|)$ *при* $r\to 0$*;*

(ii) *існує таке* $r_0\in\mathbb{R}$*, що* $V(r_0)>0$ *та існує* $\theta>2$ *таке, що*

$$\theta\cdot V(r)\le r\cdot V'(r),\quad r\in\mathbb{R}.$$

Тоді існує нетривіальна відокремлена хвиля $u\in X$.

1.5. Дискретні нелінійні рівняння Шредінгера

Відмітимо, що дискретні нелінійні рівняння Шредінгера досліджено в значній мірі такими математиками як П. Кеврекідс, К. Расмуссен, А. Бішоп, О. Панков, М. Вейнштейн та ін. (див. [47], [53], [54], [56], [58], [61], [71]).

Приведемо результати, отримані в роботах [53] та [54]. Розглянемо просторово локалізовані стоячі хвилі для дискретного нелінійного рівняння Шредінгера (ДНРШ)

$$i\dot{q}_n = -\Delta q_n + \varepsilon_n q_n - \sigma_n \chi_n |q_n|^2 q_n, \quad n \in Z, \tag{1.21}$$

де $\sigma = \pm 1$,

$$\Delta q_n = (q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n),$$

Δ – дискретний одновимірний Лапласіан, а послідовності ε_n і χ_n є N-періодичними по n, тобто $\varepsilon_{n+N} = \varepsilon_n$ і $\chi_{n+N} = \chi_n$.

Використовуючи представлення стоячої хвилі у вигляді

$$q_n = u_n \exp(-i\omega t),$$

де u_n дійсна послідовність і $\omega \in \mathbb{R}$, отримаємо рівняння

$$-\Delta u_n + \varepsilon_n u_n - \omega u_n = \sigma \chi_n |u_n|^2 u_n. \tag{1.22}$$

Накладемо наступну умову:

$$\lim_{n \to \pm\infty} u_n = 0, \tag{1.23}$$

та розглянемо нетривіальні розв'язки, тобто розв'язки, що тотожно відмінні від нуля.

Зокрема, ми розглянемо більш загальне рівняння

$$Lu_n - \omega u_n = \sigma \chi_n |u_n|^2 u_n \tag{1.24}$$

з тією ж самою умовою обмеження (1.23). Тут L оператор другого порядку

$$Lu_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n,$$

де a_n і b_n дійсні N-періодичні послідовності. Оператор L можна представити у формі

$$Lu_n = -(\partial^* a_n \partial) f_n + (a_{n-1} + a_n + b_n) u_n,$$

де

$$\partial u_n = u_{n+1} - u_n, \quad \partial * u_n = u_{n-1} - u_n.$$

Коли $a_n \equiv 1$ і $b_n = -2 + \varepsilon_n$, ми отримаємо рівняння (1.22).

Розглянемо рівняння (1.24) як нелінійне рівняння в просторі l^2 двохсторонніх нескінченних послідовностей. Відмітимо, що кожний елемент l^2 автоматично задовольняє (1.23).

Оператор L обмежений і самоспряжений оператор в l^2. Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа замкнутих інтервалів (див., [69]). Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа відкритих інтервалів, що називаються *спектральними лакунами*. Два з них напівскінченні. Якщо $N = 1$, то скінченні проміжки не існують. Однак, в загальному скінченні проміжки не існують і найбільш цікавий випадок в рівнянні (1.24), коли частота ω лежить в скінченному проміжку. Зафіксуємо довільну спектральну лакуну і позначимо її через $(\alpha;\ \beta)$.

Головним результатом є наступна теорема

Теорема 1.5.2. *Нехай* $\chi_n > 0$ *і* $\omega \in (\alpha,\ \beta)$. *Якщо також* $\sigma = +1$ *і* $\beta \neq +\infty$, *або* $\sigma = -1$ *і* $\alpha \neq -\infty$, *тоді рівняння (1.24) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$. *Більше того, розв'язок* u *має експоненціальну оцінку на нескінченності:*

$$\left|u_n\right| \le Ce^{-\gamma|n|}, \quad n \in Z,$$

з деяким $C > 0$ *і* $\gamma > 0$. *Якщо також* $\sigma = +1$ *і* $\beta = +\infty$, *або* $\sigma = -1$ *і* $\alpha = -\infty$, *то нетривіальний розв'язок в* l^2 *не існує.*

Частковий випадок цього результату, коли $\sigma = +1, \alpha = -\infty$ або $\sigma = -1$, $\beta = +\infty$, міститься в [61]. Розв'язки побудовані в цій теоремі є бризерами спеціального виду. Вони також часто називаються *лакунарними солітонами.* Тут лакунарність означає, що частота ω лежить в спектральній лакуні. Відмітимо, що цей термін прийнятий в нелінійній оптиці, хоча розв'язки такого типу і не є, взагалі кажучи, солітонами в тому смислі, який використовується в теорії повністю інтегровних систем.

1.6. Основні результати дисертації

В роботі вивчаються нескінченні системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\ddot{q}_n = -U'_n(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - a_n(q_n - q_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.25}$$

Рівняння такого вигляду описують нескінченний ланцюг нелінійних осциляторів, розміщених в точках цілочисельної решітки $\mathbb{Z}$. Змінна q_n є узагальненою координатою n-го осцилятора в момент часу t, а $U_n(r)$ – його потенціал. Таким чином, при відсутності взаємодії між осциляторами динаміка кожного із них задається рівнянням виду

$$\ddot{q}_n = -U'_n(q_n).$$

Якщо ж в системі осциляторів є лінійна взаємодія між будь-якими двома найближчими сусідами, то рівняння руху такої системи мають вид (1.25).

В потенціалі U_n зручно виділити квадратичну частину та записати його у вигляді

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2} r^2 + V_n(r).$$

Покладемо також

$$b_n = c_n - a_n - a_{n-1}.$$

Тоді рівняння руху (1.25) набудуть вигляду

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n - V'_n(q_n), \quad n \in Z. \tag{1.26}$$

Систему рівнянь (1.25) або, що теж саме, (1.26) зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння в просторі l^2 дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, а саме, як рівняння вигляду

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{1.27}$$

де лінійний оператор A задається формулою

$$(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n, \tag{1.28}$$

а нелінійний оператор B –

$$B(q)_n = V'_n(q_n). \tag{1.29}$$

Оператори виду (1.28) – різницеві оператори другого порядку, для яких є повна теорія (див., наприклад, [25], [69]) . Вибір простору l^2 як основного пояснюється двома міркуваннями. По-перше, l^2 є гільбертовим простором, що дозволяє застосовувати багато абстрактних результатів і розглядати основне рівняння (1.25) як нескінченну гамільтонову систему. По-друге, елементи цього простору автоматично задовольняють співвідношенню

$$\lim_{n\to\pm\infty} q_n = 0. \tag{1.30}$$

При застосуванні до розглядуваної задачі це співвідношення є звичайною крайовою умовою на нескінченності. Воно означає, що у даній системі осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Скрізь далі під розв'язком рівняння (1.27) розуміється C^2-функція від t зі значеннями в l^2, що задовольняє це рівняння при всіх допустимих значеннях t. Іноді, як технічний засіб використовуються слабкі розв'язки.

Розділ 2 присвячений питанню коректності задачі Коші для рівняння (1.27). Скрізь в цьому розділі припускається, що виконуються умови

(i_1) *послідовності* $\{a_n\}$ *і* $\{c_n\}$ *дійсних чисел обмежені;*

(ii_1) $V_n(r)$ *– функція класу* C^1 *на* $\mathbb{R}$, $V_n(0) = V_n'(0) = 0$ *і для будь-якого* $R > 0$ *існує таке* $C = C(R) > 0,$ *що для всіх* $n \in \mathbb{Z}$

$$|V_n'(r_1) - V_n'(r_2)| \le C|r_1 - r_2|, \quad |r_1|, \ |r_2| \le R.$$

Задача Коші для рівняння (1.27) полягає у знаходженні розв'язку, що задовольняє початкові умови

$$q(0) = q^{(0)}, \quad \dot{q}(0) = q^{(1)}. \tag{1.31}$$

Розв'язок може бути визначеним на деякому інтервалі навколо нуля (локальний розв'язок), або ж на всій осі (глобальний розв'язок).

В зроблених припущеннях існування та єдиність локального розв'язку для будь-яких $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ (теорема 2.1.1) випливає із стандартних результатів про диференціальні рівняння в банаховому просторі (див. [13]).

Якщо припустити, що в умові (ii_1) константа $C(R)$ може бути вибрана не залежною від R, то для будь-яких $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ розв'язок задачі Коші існує на всій прямій (теорема 2.2.1). Це твердження безпосередньо випливає із відомих загальних результатів ([13]). Однак, така посилена умова (ii_1) не виконується у більшості цікавих прикладів.

Далі для отримання результатів про глобальні розв'язки використовується гамільтонова структура рівняння (1.27). Дійсно, рівняння (1.27) є гамільтоновою системою з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2}\left\{\|p\|^2 - (Aq, q)\right\} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(q_n),$$

де $p = \dot{q}$, а $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ – норма і скалярний добуток в l^2, відповідно. Тому $H(\dot{q}, q)$ є константою на розв'язках рівняння (1.27).

Основним загальним результатом є наступна теорема

Теорема 1.6.1. *Додатково до умов* (i_1) *та* (ii_1) *припустимо, що оператор* A *недодатний, тобто* $(Aq, q) \le 0$ *для будь-якого* $q \in l^2$. *Крім того, нехай виконується одна із наступних умов:*

(a) $V_n(r) \ge 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$ *і* $r \in \mathbb{R}$;

(b) *існує така неспадна функція* $h(r),\ r \ge 0,$ *що* $\lim_{r\to+\infty} h(r) = +\infty$ *і* $V_n(r) \ge h(|r|)$ *для всіх* $n \in Z$ і $r \in \mathbb{R}$.

Тоді задача Коші для рівняння (1.27) має єдиний глобальний розв'язок для будь-яких початкових даних $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$.

Це – теорема 2.2.2 основної частини роботи.

Наступний наслідок (наслідок 2.2.2) дозволяє зняти умову недодатності оператора A.

Наслідок 1.6.1. *Нехай виконуються умови* (i_1), (ii_1) *та умова* (b) *теореми 1.6.1, де*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{h(r)}{r^2} = +\infty.$$

Тоді задача Коші для рівняння (1.27) має єдиний глобальний розв'язок для будь-яких початкових даних із l^2.

Далі в цьому розділі вивчається важливий випадок кубічного потенціалу, який не задовольняє умовам теореми 1.6.1, а саме

$$V_n(r) = \frac{d_n}{3} r^3, \tag{1.32}$$

де послідовність d_n обмежена. В теоремі 2.3.1 описується деяка достатньо велика множина початкових даних, для яких задача Коші (1.27), (1.31) з потенціалом (1.32) має єдиний глобальний розв'язок. Тут припускається, що оператор A від'ємно визначений. Зокрема, це так для всіх початкових даних $q^{(0)}$, $q^{(1)}$ з достатньо малою l^2-нормою (наслідок 2.3.1). В наступному підрозділі 2.4 додатково припускається, що оператор A недодатний та вивчається питання про існування глобальних розв'язків. Основний результат цього підрозділу – теорема 2.4.1 – стверджує, що для достатньо великої множини початкових даних глобальний розв'язок не існує.

Останній підрозділ цього розділу присвячений прикладам. Зокрема, для кубічного дискретного рівняння Клейна–Гордона

$$\ddot{q}_n = \Delta q_n - m^2 q_n + a q_n^3, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де

$$\Delta q_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

задача Коші має глобальний розв'язок для будь-яких початкових даних при $a < 0$. Відмітимо, що Δ – одновимірний дискретний оператор Лапласа. Якщо ж $a > 0$, то питання про існування глобальних розв'язків залишається відкритим і, можливо, має негативну відповідь.

Для квадратного дискретного рівняння Клейна–Гордона

$$\ddot{q}_n = \Delta q_n - m^2 q_n + a q_n^2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $m > 0,$ глобальний розв'язок задачі Коші існує для всіх початкових даних з достатньо малою l^2-нормою, незалежно від знаку $a.$ Існування глобальних розв'язків при $m = 0$ залишається відкритим.

Розділ 3 присвячений періодичним за часом розв'язкам рівняння (1.25) з крайовими умовами (1.30), точніше, рівняння (1.27) в l^2. В цьому розділі накладаються наступні умови:

(i_2) *коефіцієнти* a_n *і* c_n *є* N*-періодичними, тобто* $a_{n+N} = a_n$, $c_{n+N} = c_n$, *і* A *додатно визначений в* l^2, *тобто існує таке* $\alpha_0 > 0,$ *що*

$$(Aq,\quad q) \geq \alpha_0 \|q\|^2, \quad q \in l^2;$$

(ii_2) *для будь-якого* $n \in \mathbb{Z}$ *функція* $V_n(r)$ *неперервно диференційовна,* $V_n(0) = V_n'(0) = 0,$ $V_n'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$ *і виконується умова* N*-періодичності* $V_{n+N} = V_n$;

(iii_2) *існує таке* $\mu > 2,$ *що*

$$0 < \mu V_n(r) \leq V_n'(r)r, \quad r \neq 0.$$

Для побудови періодичних розв'язків використовується варіаційний підхід, а саме, теорема про гірський перевал (див. [71], [72]). При цьому рівняння (1.25) розглядається не тільки з граничними умовами (1.30), але й з періодичними по n умовами

$$q_{n+kN} = q_n, \tag{1.33}$$

де $k > 0$ – фіксоване ціле число. Остання задача інтегрується як рівняння

$$\ddot{q} = A_k q - B_k(q) \tag{1.34}$$

в скінченновимірному гільбертовому просторі l_k^2, що складається із kN-періодичних послідовностей. Норма і скалярний добуток в цьому просторі позначаються $\|\cdot\|_{l_k^2}$ і $(\cdot,\ \cdot)_{l_k^2}$, відповідно. Оператори A_k і B_k задаються тими ж формулами (1.28) та (1.29), тільки застосовуються до kN-періодичних послідовностей.

В підрозділі 3.1 подається варіаційна постановка цих задач. Точніше, з ними пов'язуються функціонали

$$\Phi(q)=\int\limits_{-T/2}^{T/2}\left\{\frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2+\frac{1}{2}(Aq,\, q)-\sum_{n\in Z}V_n(q_n(t))\right\}dt,$$

$$\Phi_k(q)=\int\limits_{-T/2}^{T/2}\left\{\frac{1}{2}\|\dot{q}\|_{l_k^2}^2+\frac{1}{2}(A_k q,\ \ q)_{l_k^2}-\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}V_n(q_n(t))\right\}dt$$

відповідно. Ці функціонали визначені на деяких гільбертових просторах X_T і $X_{T,\,k}$ відповідно. Критичні точки цих функціоналів є T-періодичними розв'язками відповідних задач. В цьому підрозділі також наводяться деякі оцінки для критичних точок та критичних значень функціоналів Φ і Φ_k.

Підрозділ 3.2 містить деякі допоміжні відомості про стаціонарні розв'язки, тобто про розв'язки, що не залежать від часу.

В підрозділі 3.3 встановлено наступний результат (теорема 3.3.2) про існування T-періодичних розв'язків задачі (1.25), (1.33) або, що теж саме, рівняння (1.34):

Теорема 1.6.2. *Нехай виконуються умови* $(i_2)-(iii_2)$. *Тоді для будь-якого* $T>0$ *та будь-якого натурального* k *рівняння (1.34) має ненульовий* T-*періодичний розв'язок. Більше того, існує таке* $T_0>0$, *яке не залежить від* k, *що при* $T\geq T_0$ *побудований розв'язок не є сталим.*

Доведення цієї теореми полягає в перевірці умов теореми про гірський перевал для функціоналу Φ_k. Важливим фактом є те, що функціонал Φ_k задовольняє так званій умові Пале–Смейла.

Зазначимо, що отриманий результат використовується при побудові періодичних розв'язків задачі (1.25), (1.30). Однак, він представляє і самостійний інтерес.

Підрозділ 3.4 присвячений періодичним розв'язкам задачі (1.25), (1.30). Тут встановлено основний результат другого розділу:

Теорема 1.6.3. *Нехай виконуються умови* $(i_2)-(iii_2)$. *Тоді для будь-якого* $T>0$ *задача (1.25), (1.30) має ненульовий* T*-періодичний розв'язок. При цьому існує таке* $T_0>0$, *що при* $T \ge T_0$ *цей розв'язок не є сталим.*

При доведенні цієї теореми розв'язки шукаються як критичні точки функціоналу Φ. Цей функціонал не задовольняє умові Пале–Смейла, хоча і задовольняє всім іншим умовам теореми про гірський перевал. Тому остання теорема не може бути використана. Замість цього розв'язок в теоремі 1.6.1 знаходиться як границя в деякому смислі розв'язків з теореми 1.6.2 при $k \to \infty$. Цей метод, відомий як метод періодичних апроксимацій, успішно використовувався в багатьох інших задачах (див. [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [62]).

В підрозділі 3.5 розглядається випадок потенціалу виду

$$V_n(r) = \frac{d_n}{p}|r|^p, \tag{1.35}$$

де $p>2$ і $d_n>0$ – N-періодична послідовність. Тут T-періодичні розв'язки задачі (1.25), (1.30) будуються за допомогою методу умовної мінімізації.

Введемо функціонали

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\|\dot{u}\|^2 + (Au,\, u)\right\}dt,$$

$$S(u) = \frac{1}{p}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\sum_{n\in Z} d_n|u_n(t)|^p\right)dt$$

на просторі X_T. Відмітимо, що

$$\Phi(u) = \Psi(u) - S(u). \tag{1.36}$$

Для $\theta>0$ розглянемо задачу мінімізації

$$I_\theta = \inf\left\{\Psi(v):\ v\in X_T,\ \ S(v)=\theta\right\}. \tag{1.37}$$

Доведено, що ця задача має розв'язок $u \in X_T$, тобто $\Psi(u) = I_\theta$ і $S(u) = \theta.$ Більше того, при достатньо великих $T > 0$ цей розв'язок несталий.

В силу правила множників Лагранжа існує таке $\lambda \in \mathbb{R}$ (множник Лагранжа), що

$$\Psi'(u) = \lambda S'(u). \tag{1.38}$$

Більше того, для множника Лагранжа маємо формулу

$$\lambda = \frac{2I_\theta}{p\theta}.$$

Покладемо $q = \lambda^{\frac{1}{p-2}} u.$ Тоді рівняння (1.36), разом із визначенням функціоналів Ψ та S, показує, що q – критична точка функціоналу Φ і, отже, розв'язок задачі (1.25), (1.30).

В останньому підрозділі 3.6 встановлені вище теореми застосовуються до рівняння

$$\ddot{q} = a\Delta q_n + cq_n - d\left|q_n\right|^{p-2} q_n.$$

Отримані результати уточнюють та узагальнюють відомі результати ([49]).

Розділ 4 присвячений питанню існування біжучих хвиль в однорідних за просторовою змінною $n \in \mathbb{Z}$ ланцюгах ($a_n \equiv a$). В даному випадку

$$U_n(r) = U(r) = -\frac{c_0}{2} r^2 + V(r)$$

і рівняння (1.25) набуде вигляду

$$\ddot{q}_n = a\Delta_d q_n + c_0 q_n - V'(q_n), \tag{1.39}$$

де

$$\left(\Delta_d q\right)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n,$$

Δ_d – одновимірний дискретний оператор Лапласа.

Нагадаємо, що біжучою хвилею називається розв'язок виду

$$q_n(t) = u(n - ct). \tag{1.40}$$

Функція $u(s)$ називається профілем хвилі.

Підстановка розв'язку виду (1.40) в рівняння (1.25) дає рівняння виду

$$c^2 u''(s) = a(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)) + c_0 u(s) - V'(u(s)). \qquad (1.41)$$

В даному розділі розглядаються біжучі хвилі двох типів: періодичні та відокремлені. У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі достатньо знайти розв'язок рівняння (1.41) з умовою періодичності

$$u(s+2k) = u(s), \quad s \in \mathbb{R}. \qquad (1.42)$$

Профіль відокремленої хвилі є розв'язком рівняння (1.41) з крайовою умовою на нескінченності

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \qquad (1.43)$$

В обох випадках розв'язок може бути знайдено варіаційним методом, використовуючи теорему про гірський перевал.

Скрізь далі припускається, що потенціал задовольняє умови (ii_2), (iii_2), які в нашому випадку приймають вигляд:

(h) *функція* $V(r)$ *неперервно диференційовна,* $V(0) = V'(0) = 0$ *і* $V'(r) = o(r)$, *при* $r \to 0$ *та існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu V(r) \le V'(r)r, \quad r \ne 0.$$

В підрозділі 4.2 розглядаються функціонали J_k та J на просторах $E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : \ u(s+2k) = u(s)\}$ та $E = H^1(\mathbb{R})$ відповідно, які визначаються формулами

$$J_k(u) = \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}\left(u'(s)\right)^2 - \frac{a}{2}(u(s+1) - u(s))^2 + \frac{c_0}{2}u(s)^2 - V(u(s)) \right\} ds \qquad (1.44)$$

і

$$J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{c^2}{2}\left(u'(s)\right)^2 - \frac{a}{2}(u(s+1) - u(s))^2 + \frac{c_0}{2}u(s)^2 - V(u(s)) \right\} ds. \qquad (1.45)$$

Тут показано, що критичні точки функціоналів J_k і J є C^2-розв'язками рівняння (1.41), що задовольняють умови (1.43) і (1.42) відповідно.

В підрозділі 4.3 розглянуто допоміжні леми.

В підрозділі 4.4 за допомогою теореми про гірський перевал встановлено існування нетривіальних біжучих хвиль з періодичним профілем. Для цього достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Зазначимо, що $u = 0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожно рівна нулю.

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема

Теорема 1.6.4. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c_0 > 0$. *Тоді для будь-яких* $k \geq 1$ *і* $c^2 > \max\{0, a\}$ *рівняння (1.41) має розв'язок* u, *що задовольняє умові (1.42). Тим самим, існують дві біжучі хвилі з профілем* u *та швидкостями* $\pm c$. *Більше того, існують такі константи* $\varepsilon_0 > 0$ *і* $C > 0$, *які не залежать від* k, *що*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C, \tag{1.46}$$

$$\varepsilon_0 \leq J_k \leq C. \tag{1.47}$$

В підрозділі 4.5 доводиться існування відокремлених біжучих хвиль з тими ж припущеннями, з якими встановлено існування періодичних хвиль. Біжучі хвилі в даному випадку знаходяться як критичні точки функціоналу J. Функціонал J задовольняє частині умов теореми про гірський перевал. Однак, умова Пале–Смейла для цього функціоналу не виконується. Тому критичні точки в даному випадку будуються іншим способом – за допомогою переходу до границі в критичних точках функціоналу J_k при $k \to \infty$.

В цьому підрозділі встановлено такий результат

Теорема 1.6.5. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c_0 > 0$. *Тоді для будь-якого* $c^2 > \max\{0, a\}$ *рівняння (1.41) має розв'язок* $u \in E$, *(отже, він задовольняє умові (1.43)). Таким чином, існують дві відокремлені біжучі хвилі з профілем* u *та швидкостями* $\pm c$.

В підрозділі 4.6 вивчається поведінка розв’язків задачі (1.41), (1.43) на нескінченності і при відповідних припущеннях доводиться експоненціальна оцінка для розв’язку. Рівняння (1.41) можна подати у вигляді

$$Lu = f(u), \tag{1.48}$$

де

$$Lu(t) = -c^2 u''(t) + a(u(t+1) + u(t-1) - 2u(t)) + c_0 u(t)$$

і $f(r) = V'(r).$ Відносно функції $f(r)$ зробимо наступне, більш слабше, ніж (h), припущення.

(h') *$f(r)$ неперервна на $\mathbb{R}$, $f(0) = 0,$ $f(r) = o(r)$ при $r \to 0$ і $f(r) \neq 0$ при $r \neq 0.$*

Тут розглядаються розв’язки, що лежать в просторі $E = H^1(\mathbb{R}).$

Нехай $u \in E$ – такий розв’язок. Покладемо

$$g(t) = \frac{f(u(t))}{u(t)}$$

(якщо $u(t) = 0,$ то $g(t) = 0$ за означенням). Із умови (h') слідує, що

$$\lim_{t \to \pm\infty} g(t) = 0.$$

Тоді рівняння (1.48) набуде вигляду

$$Lu(t) = g(t) \cdot u(t).$$

До останнього рівняння застосуємо перетворення Фур’є

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} u(t)\,dt.$$

Отримуємо

$$\sigma(\xi)\hat{u}(\xi) = \widehat{g \cdot u}(\xi),$$

де

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4a\sin^2\frac{\xi}{2} + c_0.$$

Відмітимо, що функція $\sigma(\xi),\quad \xi \in \mathbb{R},$ продовжується до цілої функції

$$\sigma(\varsigma) = c^2\varsigma^2 - 4a\sin^2\frac{\varsigma}{2} + c_0, \quad \varsigma \in \mathbb{C}.$$

Тут показано, що якщо $c^2 > \max\{a,\ 0\}$ і $c_0 > 0$, то існує таке $\beta_0 > 0$, що функція $\sigma(\varsigma)$ не має нулів в смужці $|\mathrm{Im}\,\varsigma| < \beta_0$.

Наступне твердження є основним результатом даного підрозділу

Теорема 1.6.6. *Нехай виконується умова* (h'), $c^2 > \max\{a,\ 0\}$ *і* $c_0 > 0$. *Якщо* $u \in E$ *– розв'язок рівняння (1.41), то для будь-якого* $\beta \in (0,\ \beta_0)$ *існує таке* $C_\beta > 0$, *що*

$$|u(t)| \le C_\beta e^{-\beta|t|}. \tag{1.49}$$

Теорема доводиться за допомогою 2-х допоміжних лем та теореми Пелі–Вінера (див. [21], теорема IX.14).

Оскільки умова (h) сильніша, ніж умова (h'), то із теореми 1.6.6 випливає

Наслідок 1.6.2. *В умовах теореми 1.6.6 для розв'язку* u *виконується експоненціальна оцінка (1.49) для будь-якого* $\beta \in (0,\ \beta_0)$.

В останньому підрозділі 4.7 встановлені вище теореми застосовуються до рівняння

$$\ddot{q} = a\Delta q_n + cq_n - d|q_n|^{p-2} q_n.$$

Висновки до розділу 1

З наведеного огляду літератури випливає, що дискретні моделі представляють значний інтерес в нелінійній фізиці. Їм присвячено багато фізичних та математичних робіт. Однією з найбільш популярних моделей є ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Ця модель недостатньо вивчена з математичної точки зору. Отримані результати про існування та єдиність глобальних розв'язків є цілком новими, а результати про існування періодичних розв'язків та біжучих хвиль значно узагальнюють та доповнюють відомі результати.

РОЗДІЛ 2

РІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕННОГО ЛАНЦЮГА ОСЦИЛЯТОРІВ

1.1. Формулювання задачі, існування та єдиність локальних розв'язків задачі Коші

В даній роботі вивчаються деякі питання динаміки нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Нехай q_n – узагальнена координата n-го осцилятора. Рівняння його руху при відсутності взаємодії з сусідніми осциляторами має вигляд:

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n), \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з двома своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n) + a_{n-1}\left(q_{n-1} - q_n\right) - a_n\left(q_n - q_{n+1}\right), \; n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Рівняння (2.1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Розглядаються такі розв'язки системи (2.1), що

$$\lim_{n\to\pm\infty} q_n(t) = 0, \tag{2.2}$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_n(r)$ запишемо у вигляді

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2} r^2 + V_n(r)$$

і покладемо

$$b_n = c_n - a_n - a_{n-1}.$$

Тоді рівняння (2.1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n - V_n'(q_n),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Враховуючи граничні умови (2.2), при певних припущеннях це рівняння природно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q) \tag{2.4}$$

в гільбертовому просторі l^2 дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, де

$$(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n,$$

а нелінійний оператор B визначається формулою

$$B(q)_n = V_n'(q_n). \tag{2.5}$$

Скалярний добуток і норма в l^2 позначаються $(\cdot\,,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ відповідно.

За означенням, розв’язком (2.4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значенням в l^2.

Передбачається, що

(i_1) *послідовності* $\{a_n\}$ *і* $\{c_n\}$ *дійсних чисел обмежені;*

(ii_1) $V_n(r)$ *– функція класу* C^1 *на* $\mathbb{R}$, $V_n(0) = V_n'(0) = 0$ *і для будь-якого* $R > 0$ *існує таке* $C = C(R) > 0$, *що для всіх* $n \in \mathbb{Z}$

$$|V_n'(r_1) - V_n'(r_2)| \le C|r_1 - r_2|,\ |r_1|, |r_2| \le R. \tag{2.6}$$

В умові (i_1) неважко бачити, що A є обмежений самоспряжений оператор в l^2.

Лема 2.1.1. *Нехай виконується умова* (ii_1), *тоді оператор* B *є обмеженим оператором в* l^2. *Більше того, оператор* B *є неперервним за Ліпшицем на кожній кулі простору* l^2.

Доведення. Нехай $q \in l^2$ і $\|q\| \le R$. Покажемо, що $B(q) \in l^2$ і $\|B(q)\| \le C$ з деякою константою $C = C(R)$. Оскільки $\|q\|_{l^\infty} \le \|q\|_{l^2} = \|q\| \le R$, то з нерівності (2.6) та умови $V_n'(0) = 0$ випливає, що

$$|V_n'(q_n)| \le C|q_n|.$$

Звідси

$$\|B(q)\| = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |V_n'(q_n)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \le C\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |q_n|^2\right]^{\frac{1}{2}} = C\|q\|,$$

що доводить першу частину леми.

Нехай тепер $q^{(1)} = \left\{q_n^{(1)}\right\},\ q^{(2)} = \left\{q_n^{(2)}\right\} \in l^2$ і $\left\|q^{(i)}\right\| \le R,\ i = 1, 2.$ Тоді

$$\left\|q^{(i)}\right\|_{l^\infty} \le R$$

і нерівність (2.6) дає

$$\left|V_n'\left(q_n^{(1)}\right) - V_n'\left(q_n^{(2)}\right)\right| \le C\left|q_n^{(1)} - q_n^{(2)}\right|.$$

Аналогічно до попереднього отримуємо

$$\left\|B\left(q^{(1)}\right) - B\left(q^{(2)}\right)\right\| \le C\left\|q^{(1)} - q^{(2)}\right\|,$$

що і доводить неперервність за Ліпшицем. Лему доведено. □

Рівняння (2.4) можна записати як рівняння першого порядку в просторі $l^2 \times l^2$

$$\dot{y} = Gy, \tag{2.7}$$

де $y = (q,\ p)$ і $Gy = (p,\ Aq - B(q))$ (стандартний прийом приведення рівняння другого порядку до системи першого порядку). Згідно леми 2.1.1, оператор G є неперервним за Ліпшицем в просторі $l^2 \times l^2$.

Як наслідок стандартного результату про існування та єдиність локальних розв'язків (див., наприклад, [13]), має місце

Теорема 2.1.1. *Нехай виконуються умови* (i_1) *та* (ii_1). *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l^2$ *і* $q^{(1)} \in l^2$ *рівняння (2.3) має єдиний розв'язок класу* C^2, *який визначений на деякому інтервалі* $(-t_0;\, t_0)$ *і задовольняє початкові умови*

$$q(0) = q^{(0)},\ \dot{q}(0) = q^{(1)}. \tag{2.8}$$

1.2. Існування та єдиність глобальних розв'язків задачі Коші

Оскільки рівняння (2.4) може бути записане у вигляді еквівалентного рівняння (2.7), то наступне твердження про існування та єдиність глобальних розв'язків випливає із теореми 1.2, розділу 8 [13].

Теорема 2.2.1. *Нехай виконуються умови* (i_1) *та* (ii_1) *з константою* C*, що не залежить від* R*. Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l^2$ *і* $q^{(1)} \in l^2$ *задача (2.4), (2.8) має єдиний розв'язок визначений при всіх* $t \in \mathbb{R}$.

Умови теореми 2.2.1 означають, зокрема, що потенціал V_n має зріст на нескінченності не вище другого степеня.

Рівняння (2.4) можна записати у гамільтоновому вигляді з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2}\left[\|p\|^2 - (Aq, q)\right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(q_n), \tag{2.9}$$

де $p = \dot{q}$.

Лема 2.2.1. *В умовах* $(i_1), (ii_1)$ $H(p, q)$ *є функціоналом класу* C^1 *на* $l^2 \times l^2$.

Доведення. Квадратичні члени $\|p\|^2$ і (Aq, q) в (2.9) є, очевидно, функціоналами класу C^1 (нагадаємо, що згідно (i_1) A – обмежений лінійний оператор). Тому достатньо показати, що

$$\varphi(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(q_n)$$

– функціонал класу C^1 на l^2. Нехай $q \in l^2, h \in l^2$ і $B(q)$ визначено рівністю (2.5).

За формулою Лагранжа, існують такі $\theta_n \in (0, 1)$, що

$$\varphi(q+h) - \varphi(q) - (B(q), h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[V_n'(q_n + \theta_n h_n) - V_n'(q_n)\right] h_n.$$

Припустимо, що $\|q\| \le R$ і $\|h\| \le R$. Тоді $\|q\|_{l^\infty} \le R, \|h\|_{l^\infty} \le R$ і згідно (ii_1),

$$\left|\varphi(q+h)-\varphi(q)-\left(B(q),h\right)\right|\le C\sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta_n\left|h_n\right|^2\le C\|h\|^2=o\left(\|h\|\right).$$

Це означає, що похідна $\varphi'(q)$ існує і $\varphi'(q)=B(q)$. Оскільки, за лемою 2.1.1, оператор $B(q)$ неперервний, то $\varphi\in C^1$. Лему доведено. □

Розглянемо гамільтонову систему з гамільтоніаном H:

$$\dot p=-H'_q(p,q),\;\; \dot q=H'_p(p,q). \tag{2.10}$$

Оскільки $H'_p\left(p,q\right)=p$ і $H'_q\left(p,q\right)=-Aq+B(q)$, то система (2.10) еквівалентна рівнянню (2.7), а значить і рівнянню (2.1). Як добре відомо (див., наприклад, [2], [38], [50]), $H(p,q)$ є інтегралом системи (2.2). Звідси отримуємо

Наслідок 2.2.1. *В умовах* $(i_1),(ii_1)$ *нехай* $q(t)$ *– розв'язок рівняння (2.1) зі значеннями в* l^2. *Тоді*

$$H(\dot q,q)=const.$$

Теорема 2.2.2. *Додатково до умов* (i_1) *та* (ii_1), *припустимо, що оператор* A *недодатний, тобто* $(Aq,q)\le 0$ *для будь-якого* $q\in l^2$. *Крім того, нехай виконується одна із наступних умов:*

(a) $V_n(r)\ge 0$ *для всіх* $n\in\mathbb{Z}$ *і* $r\in\mathbb{R}$;

(b) *існує така неспадна функція* $h(\xi),\,\xi\ge 0$, *що* $\lim\limits_{r\to+\infty}h(\xi)=+\infty$ *і* $V_n(\xi)\ge h\left(|\xi|\right)$ *для всіх* $n\in\mathbb{Z}$ *і* $\xi\in\mathbb{R}$.

Тоді для будь-яких $q^{(0)},q^{(1)}\in l^2$ *задача (2.4), (2.8) має єдиний розв'язок, визначений при всіх* $t\in\mathbb{R}$.

Доведення. Випадок (a). Нехай $q(t)$ – локальний розв'язок задачі (2.4), (2.8), що існує згідно теореми 2.1.1. Для того, щоб довести, що $q(t)$ визначена на всій осі, достатньо показати, що функція $\|q(t)\|+\|\dot q(t)\|$ залишається обмеженою на будь-якому скінченому інтервалі $\left(-t_0,t_0\right)$ існування розв'язку (див., наприклад, [21], теорема X.74).

Маємо

$$H\left(\dot{q}(t), q(t)\right) = H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right).$$

Згідно умов теореми і означення гамільтоніана,

$$\frac{1}{2}\left\|\dot{q}(t)\right\|_{l^2}^2 \le H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right).$$

Отже, $\left\|\dot{q}(t)\right\|$ обмежена на $\left(-t_0, t_0\right)$. Оскільки

$$q(t) = \int_0^t \dot{q}(\tau)d\tau + q^{(0)},$$

то звідси випливає обмеженість $\left\|q(t)\right\|$ і теорему в цьому випадку доведено.

Випадок (b). Нехай $H_0 \ge 0$ такий, що $H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) \le H_0$ і $\overline{r} > 0$ – розв'язок рівняння $h(r) = H_0$ (він, очевидно, існує). Із означення H та умов теореми випливає, що

$$h\left(\left|q_n^{(0)}\right|\right) \le H_0$$

і, отже, на множині, де $h(r)$ строго зростає, виконується нерівність

$$\left|q_n^{(0)}\right| \le \overline{r}\ .$$

На множині, де $h(r)$ стала, виберемо $H_0 \ge 0$ так, щоби $\overline{r}$ було найбільшим на даній множині, тоді автоматично $\left|q_n^{(0)}\right| \le \overline{r}$.

Нехай $\psi(r)$ – функція, визначена рівністю

$$\psi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le \overline{r}, \\ -r + \overline{r} + 1, & \overline{r} \le r \le \overline{r} + 1, \\ 0, & r \ge \overline{r} + 1. \end{cases}$$

Покладемо

$$\tilde{V}_n(r) = \int_0^r \left[\psi(|\rho|)V_n'(\rho) + 2\left(1 - \psi(|\rho|)\right)\rho\right] d\rho.$$

Неважко перевірити, що модифіковане рівняння (2.3) з потенціалом $\tilde{V}_n$ задовольняє умовам теореми 2.2.1 і, отже, має глобальний розв'язок $q(t)$ з початковими даними $q^{(0)}, q^{(1)}$. Елементарні обчислення показують, що

$$\tilde{V}_n(r) \geq \tilde{h}(r),$$

де

$$\tilde{h}(r) = \begin{cases} h(r), & 0 \leq r \leq \overline{r}, \\ (-r + \overline{r} + 1)h(r) + \int\limits_{\overline{r}}^{r} h(\rho)d\rho + 2\left(\dfrac{r^3}{3} - \overline{r}\dfrac{r^2}{2} + \dfrac{\overline{r}^3}{6}\right), & \overline{r} \leq r \leq \overline{r} + 1, \\ r^2 + \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+1} h(\rho)d\rho + \left[\dfrac{\overline{r}^3}{3} - \dfrac{(\overline{r}+1)^3}{3}\right], & r \geq \overline{r} + 1. \end{cases}$$

Для модифікованого гамільтоніана $\tilde{H}$ маємо $\tilde{H}\left(p(t), q(t)\right) = \tilde{H}\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right)$. Оскільки $\left|q_n^{(0)}\right| \leq \overline{r}$, то $\tilde{H}\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) \leq H_0$. Отже,

$$\tilde{h}\left(\left|q_n\right|\right) \leq H_0.$$

Оскільки $\tilde{h}(r) \geq \tilde{h}(\overline{r}) = h(\overline{r}) = H_0$, то $\left|q_n\right| \leq \overline{r}$. Оскільки для $q(t)$ модифіковане рівняння співпадає з вихідним, то теорему доведено. □

При деяких додаткових припущеннях умову недодатності в теоремі 2.2.2 можна відкинути.

Наслідок 2.2.2. *Нехай виконуються умови* (i_1), (ii_1) *та умова* (b) *теореми 2.2.2, де*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{h(r)}{r^2} = +\infty.$$

Тоді задача (2.4), (2.8) має єдиний глобальний розв'язок для будь-яких $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$.

Доведення. Запишемо U_n у вигляді

$$U_n(r) = -\frac{c_n - 2\lambda}{2} r^2 + \left(V_n(r) - \lambda r^2\right)$$

з достатньо великим $\lambda > 0$. Тоді новий оператор A, що відповідає коефіцієнтам a_n і $c_n - 2\lambda$, буде недодатним. В той же час

$$V_n(r) - \lambda r^2 \geq h(|r|) - \lambda r^2 = h(|r|)\left(1 - \lambda \frac{r^2}{h(|r|)}\right).$$

Звідси випливає, що

$$V_n(r) - \lambda r^2 \geq k_1 h(|r|) - k_2$$

з деякими $k_1 \in (0, 1)$ і $k_2 \geq 0$. Тепер достатньо застосувати теорему 2.2.2 із заміною $h(r)$ на $k_1 h(r) - k_2$. □

Наслідок 2.2.2 можна застосувати, наприклад, до потенціалів виду $V_n(r) = \alpha_n r^3 + \beta_n r^4$, де послідовності α_n і β_n обмежені і $\beta_n \geq k > 0$.

Вище згадані аргументи можна застосувати і у випадку сингулярних потенціалів типу Леннарда–Джонса [42].

Збережемо умову (i_1), а умову (ii_1) замінимо наступною:

(iii_1) *Функція $V_n(r)$ передбачається належною C^1 на $(-\infty; d)$, $d > 0$, і на кожному скінченому інтервалі $[\alpha; \beta] \subset (-\infty; d)$ виконується нерівність (2.6) з константою C, що не залежить від $n \in \mathbb{Z}$, але, можливо, залежить від інтервалу.*

Теорема 2.2.3. *Нехай виконуються умови $(i_1), (iii_1)$ і нехай оператор A недодатний. Нехай існує така функція $h(r)$ на $(-\infty; d)$, що $h(r)$ незростає на деякому інтервалі $(-\infty; \alpha_0)$ і не спадає на $(\alpha_0; d)$, причому $\lim\limits_{r \to d} h(r) = \lim\limits_{r \to -\infty} h(r) = +\infty$ і $V_n(r) \geq h(r)$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $r \in (-\infty; d)$. Тоді для будь-яких $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ таких, що $q_n^{(0)} < d$, задача (2.4), (2.8) має єдиний глобальний розв'язок.*

Доведення теореми проводиться аналогічно доведенню теореми 2.2.2, випадок (b). Потенціал $V_n(r)$ склеюється з квадратним потенціалом на деяких інтервалах $(\alpha_0; \alpha_0+\varepsilon)$ і $(-\beta_0-\varepsilon; -\beta_0)$, де β_0 – достатньо велике, тобто перший інтервал лежить правіше другого та вони не перетинаються. До модифікованого рівняння застосовується теорема 2.2.1 і перевіряється, що розв'язок модифікованого рівняння є насправді розв'язком вихідного рівняння.

Відмітимо, що для розв'язку $q_n(t)<d$ для всіх $t\in\mathbb{R}$. Оскільки множина $\{q\in l^2 : q_n<d, n\in\mathbb{Z}\}$ не є відкритою в l^2, то у випадку, що розглядається, класичні результати про існування та єдиність локальних розв'язків застосувати не можна.

1.3. Існування глобальних розв'язків: кубічний потенціал

Розглянемо тепер випадок

$$V_n(r) = \frac{d_n}{3} r^3,$$

де d_n – обмежена послідовність. Передбачається, що оператор A від'ємно визначений, тобто

$$\left(Aq,\, q\right) \le -\alpha_0 \|q\|^2, \;\; \alpha_0 > 0,$$

для $q \in l^2$.

Покладемо

$$J(q) = -\frac{1}{2}\left(Aq,\, q\right) + \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n q_n^3 = \frac{1}{2}a(q) + \frac{1}{3}b(q).$$

Відмітимо, що $a^{1/2}(q)$ – норма на l^2, еквівалентна стандартній нормі $\|\cdot\|_{l^2}$. Тоді

$$H(p,\, q) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + J(q).$$

Оскільки $|b(q)| \le c'\|q\|_{l^3}^3 \le c''\|q\|^3$, то існує така константа $c > 0$, що

$$|b(q)|^{1/3} \le c a(q)^{1/2}, \;\; q \in l^2. \tag{2.11}$$

Далі в цьому підрозділі c завжди позначає константу з (2.11).

Покладемо

$$\gamma = \inf_q \left\{ \sup_{\lambda \ge 0} J\left(\lambda q\right) : q \in l^2,\, q \ne 0 \right\}. \tag{2.12}$$

Лема 2.3.1. $\gamma \ge \dfrac{1}{6c^6}$.

Доведення. Маємо

$$J\left(\lambda q\right) = \frac{\lambda^2}{2}a(q) + \frac{\lambda^3}{3}b(q).$$

Якщо $b(q) \ge 0$, то

$$\sup_{\lambda\geq 0} J\left(\lambda q\right) = +\infty.$$

Якщо $b(q) < 0$, то

$$\sup_{\lambda\geq 0} J\left(\lambda q\right) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)}q\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{a^3(q)}{b^2(q).}$$

Нерівність (2.11) дає необхідне. Лему доведено. □

Покладемо

$$W_\gamma = \left\{q \in l^2 : 0 \leq J\left(\lambda q\right) < \gamma,\ \forall\, \lambda \in [0,1]\right\}. \qquad (2.13)$$

Очевидно, що W_γ зірковий відносно початку координат, тобто якщо $q \in W_\gamma$, то $\theta q \in W_\gamma$ для будь-якого $\theta \in [0,1]$.

Лема 2.3.2. *Множина W_γ містить відкритий еліпсоїд*

$$B = \left\{q \in l^2 : a(q) < \rho\right\},$$

для будь-якого $\rho > 0$, що задовольняє умовам:

$$\rho \leq \frac{9}{4c^6},$$

$$\frac{\rho}{2} + \frac{c^3}{3}\rho^{3/2} < \gamma.$$

Доведення. Згідно (2.11)

$$\frac{\lambda^2}{2}a(q) - \frac{\lambda^3 c^3}{3}a^{3/2}(q) \leq J\left(\lambda q\right) \leq \frac{\lambda^2}{2}a(q) + \frac{\lambda^3 c^3}{3}a^{3/2}(q).$$

При $a(q) \leq \dfrac{9}{4c^6}$ маємо

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda c^3}{3}a^{1/2}(q) \geq 0,\ \ \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Отже, $J\left(\lambda q\right) \geq 0$ для будь-якого $\lambda \in [0,1]$.

Якщо $a(q) \leq \rho$, то, згідно другої умови на ρ,

$$J\left(\lambda q\right) < \frac{\lambda^2}{2}\rho + \frac{\lambda^3 c^3}{3}\rho^{3/2} = \lambda^2\left[\frac{1}{2}\rho + \frac{\lambda c^3}{3}\rho^{3/2}\right] < \gamma,\ \ \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Отже, $J\left(\lambda q\right) < \gamma$. Лему доведено. □

Покладемо

$$W_{*,\gamma} = \left\{ q \in l^2 : a(q) + b(q) > 0,\ J\left(q\right) < \gamma \right\}.$$

Згідно неперервності функціоналів $a(q)$ і $b(q)$, $W_{*,\gamma}$ – відкрита множина.

Лема 2.3.3. $W_\gamma = W_{*,\gamma} \cup B$.

Доведення. Достатньо показати, що $W_\gamma = W_{*,\gamma} \cup \{0\}$.

Нехай $q \in W_\gamma,\ q \neq 0$. Якщо $b(q) \geq 0$, то $a(q) + b(q) > 0$ і $J(q) < \gamma$. Якщо ж $b(q) < 0$, то

$$\sup J\left(\lambda q\right) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)} q \right) \geq \gamma.$$

Тоді $-\dfrac{a(q)}{b(q)} > 1$ і $J(q) < \gamma$. Це показує, що $q \in W_{*,\gamma}$.

Навпаки, нехай $q \in W_{*,\gamma}$. Якщо $b(q) \geq 0$, то

$$\sup_{\lambda \in [0,\,1]} J\left(\lambda q\right) = J(q) < \gamma$$

і $q \in W_\gamma$. Якщо ж $b(q) < 0$, то нерівність $-\dfrac{a(q)}{b(q)} > 1$ показує, що

$$\sup_{\lambda \in [0,\,1]} J\left(\lambda q\right) = J(q),$$

що й дає необхідне. Лему доведено. □

В силу відкритості $W_{*,\gamma}$ і B, лема 2.3.3 показує, що множина W_γ відкрита, тобто є околом нуля в l^2.

Лема 2.3.4. W_γ *– обмежена множина.*

Доведення. Якщо $b(q) \geq 0$, то $J(q) \geq \dfrac{1}{2} a(q)$ і $a(q) < 2\gamma$. Якщо ж $b(q) < 0$, то за лемою 2.3.3, $b(q) > -a(q)$. Значить, $J(q) > \dfrac{1}{6} a(q)$ і $a(q) < 6\gamma$.

Таким чином, W_γ міститься в обмеженій множині $\{q \in l^2 : a(q) < 6\gamma\}$. Лему доведено. □

Теорема 2.3.1. *Нехай* $V_n(r) = \frac{d_n}{3} r^3$, *де* d_n *– обмежена послідовність, оператор A від'ємно визначений і* $q^{(0)} \in W_\gamma$, $q^{(1)} \in l^2$ *такі, що*

$$\frac{1}{2}\left\|q^{(1)}\right\|^2 + J\left(q^{(0)}\right) < \gamma.$$

Тоді задача Коші з початковими даними $q^{(0)}, q^{(1)}$ *має єдиний глобальний розв'язок.*

Доведення. Існування та єдиність локального розв'язку $q(t)$ випливає із теореми 2.1.1. Як і в доведенні теореми 2.2.2, частина (a), достатньо показати, що $q(t)$ залишається обмеженим.

Покажемо, що $q(t) \in W_\gamma$. Припустимо, що це не так і нехай $t_1 > 0$ найменше значення $t > 0$, для якого $q(t_1) \notin W_\gamma$. Тоді $q(t_1)$ належить межі ∂W_γ множини W_γ. Оскільки W_γ зірковий, то $\theta q(t_1) \in W_\gamma$ для будь-якого $\theta \in [0, 1)$. Значить, $J\left(\theta q(t_1)\right) < \gamma$. Переходячи до границі при $\theta \to 1$, отримуємо, що $J\left(q(t_1)\right) \le \gamma$. Якщо $J\left(q(t_1)\right) < \gamma$, то, згідно визначення W_γ і того, що $J\left(\theta q(t_1)\right) < \gamma$, отримуємо $q(t_1) \in W_\gamma$. Останнє протирічить зробленому припущенню. Таким чином, $J\left(q(t_1)\right) = \gamma$.

Оскільки гамільтоніан H зберігається, то

$$J\left(q(t_1)\right) \le \frac{1}{2}\left|\dot{q}(t_1)\right|^2 + J\left(q(t_1)\right) = \frac{1}{2}\left|q^{(1)}\right|^2 + J\left(q^{(0)}\right) < \gamma.$$

Отримане протиріччя показує, що $q(t) \in W_\gamma$ для всіх $t > 0$, для яких q визначене. Отже, розв'язок існує при всіх $t > 0$.

Оскільки рівняння (2.1) інваріантне відносно заміни t на $-t$, то розв'язок визначено при всіх $t \in \mathbb{R}$. Теорему доведено. □

Теорема 2.3.1 є дискретним аналогом одного результату Сеттінджера ([63], див. також [15]), що відноситься до нелінійного хвильового рівняння. Зокрема, вона дає існування та єдиність глобальних розв’язків задачі Коші у випадку, коли початкові дані достатньо малі в l^2-нормі.

Оскільки множина початкових даних із теореми 2.1.1 відкрита і містить нульові дані, отримуємо

Наслідок 2.3.1. *Нехай* $V_n(r) = \dfrac{d_n}{3} r^3$, *де* d_n *– обмежена послідовність, оператор A від’ємно визначений. Тоді існує таке* $\delta > 0$, *що для будь-яких* $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ *з* $\|q^{(0)}\| \le \delta$ *і* $\|q^{(1)}\| \le \delta$ *задача Коші має єдиний глобальний розв’язок.*

1.4. Неіснування глобальних розв'язків: кубічний потенціал

В цьому підрозділі також розглядається випадок кубічного потенціалу та вивчається питання про неіснування глобальних розв'язків.

Таким чином

$$V_n(r)=\frac{d_n}{3}r^3,$$

де d_n – обмежена послідовність. Оператор A припускається недодатним, тобто

$$\left(Aq,q\right)\le 0,\ \ q\in l^2.$$

Рівняння (2.1) в даному випадку приймає вигляд

$$\ddot{q}=Aq-d_nq_n^2,\ \ n\in\mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

Нехай q – розв'язок рівняння (2.14) з початковими даними $q(0)=q^{(0)}$ і $\dot{q}(0)=q^{(1)}\in l^2$. Нас цікавить питання про те, коли максимальний інтервал $[0,t_0)$ існування розв'язку $q(t)$ скінченний. Це справджується тоді і тільки тоді, коли для деякого скінченного $t_0>0$

$$\lim_{t\to t_0-0}\left\|q(t)\right\|=\infty.$$

Для деякого фіксованого розв'язку q покладемо

$$E(t)=H\left(\dot{q}(t),q(t)\right)=\frac{1}{2}\left[\left\|\dot{q}\right\|^2-\left(Aq(t),q(t)\right)\right]+\frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_nq_n^3(t).$$

Згідно наслідку 2.2.1, $E(t)$ не залежить від t, тобто $E(t)\equiv E(0)$. Покладемо також

$$F(t)=\left\|q(t)\right\|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q_n^2(t).$$

Для доведення неіснування глобальних розв'язків буде використовуватися наступне просте твердження.

Лема 2.4.1. *Нехай для деякого* $\alpha>0$

$$\left(F^{-\alpha}(t)\right)'|_{t=0} < 0$$

і

$$\left(F^{-\alpha}(t)\right)'' \le 0$$

для всіх $t > 0$ із максимального інтервалу існування розв'язків. Тоді максимальний інтервал існування розв'язку скінченний.

Доведення. Припустимо протилежне. Тоді функція $F^{-\alpha}(t)$ визначена при всіх $t > 0$. Умови леми означають, що функція $F^{-\alpha}(t)$ вгнута, а її графік лежить нижче дотичної при $t = 0$. Однак, кутовий коефіцієнт дотичної від'ємний. Тобто вона перетинає додатну частину осі t. Звідси випливає, що і графік $F^{-\alpha}(t)$ повинен перетинати додатну частину осі t, тобто $F^{-\alpha}(t)$ перетворюється в нуль при деякому $t > 0$. Останнє, однак, неможливо, оскільки $F(t)$ скінченна при всіх $t > 0$. Отримане протиріччя доводить лему. □

Наступна теорема є основним твердженням про неіснування глобальних розв'язків.

Теорема 2.4.1. *Нехай*

$$V_n(r) = \frac{d_n}{3} r^3,$$

де d_n – обмежена послідовність і оператор A недодатний. Нехай початкові дані $q^{(0)} \in l^2$ і $q^{(1)} \in l^2$ задовольняють умовам

$$\left(q^{(0)}, q^{(1)}\right) > 0 \tag{2.15}$$

і

$$E(0) = H\left(q^{(0)}, q^{(1)}\right) = \frac{1}{2}\left[\left\|q^{(1)}\right\|^2 - \left(Aq^{(0)}, q^{(0)}\right)\right] + \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \left(q_n^{(0)}\right)^3 < 0. \tag{2.16}$$

Тоді розв'язок рівняння (2.14) з початковими даними $q^{(0)}$ та $q^{(1)}$ має скінченний максимальний інтервал існування.

Доведення. Для доведення покажемо, що умови леми 2.4.1 виконуються з деяким $\alpha > 0$. Маємо

$$\left(F^{-\alpha}(0)\right)' = -\alpha F^{-\alpha-1}(0)F'(0). \qquad (2.17)$$

$$F'(t) = \left(q(t),\, q(t)\right)' = 2\left(q(t),\, \dot{q}(t)\right). \qquad (2.18)$$

Оскільки $F(0) = \|q(0)\|^2$ і, згідно (2.15), $q(0) = q^{(0)} \neq 0$, то $F(0) > 0$. Згідно (2.18), $F'(0) = 2\left(q^{(0)},\, q^{(1)}\right) > 0$ та рівняння (2.17) показує, що

$$\left(F^{-\alpha}(t)\right)' |_{t=0} < 0$$

для будь-якого $\alpha > 0$.

Перевіримо тепер другу умову леми 2.4.1 з деяким $\alpha > 0$. Покладемо

$$Q(t) = (-\alpha)^{-1}\left(F(t)\right)^{\alpha+2}\left(F^{-\alpha}(t)\right)''.$$

Пряме обчислення показує, що

$$Q(t) = F''(t)F(t) - (\alpha+1)\left(F'(t)\right)^2. \qquad (2.19)$$

Оскільки $F(t) \geq 0$, то достатньо показати, що $Q(t) \geq 0$ для $t \geq 0$.

Диференціюючи (2.18), отримуємо

$$F''(t) = 2\left\{\left(q,\, \ddot{q}\right) + \|\dot{q}\|^2\right\} = 4(\alpha+1)\|\dot{q}\|^2 + 2\left\{\left(q,\, \ddot{q}\right) - (2\alpha+1)\|\dot{q}\|^2\right\} \qquad (2.20)$$

(останній вираз отримується простим тотожним перетворенням). Таким чином, використовуючи (2.18), (2.19) і (2.20), отримуємо

$$Q(t) = 4\left(\alpha+1\right)\left\{\|q\|^2\|\dot{q}\|^2 - \left(q,\, \dot{q}\right)^2\right\} + 2F(t)\left\{\left(q,\, \ddot{q}\right) - \left(2\alpha+1\right)\|\dot{q}\|^2\right\}. \qquad (2.21)$$

Покладемо

$$h(t) = \left(q,\, \ddot{q}\right) - (2\alpha+1)\|\dot{q}\|^2. \qquad (2.22)$$

Оскільки, згідно нерівності Шварца, перший член в правій частині (2.21) невід'ємний, то для доведення нерівності $Q(t) \geq 0$ достатньо перевірити, що $h(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Підставимо в (2.22) $\ddot{q}$ з рівняння (2.14). Тоді

$$h(t) = \left(Aq,\, q\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n q_n^3(t) - (2\alpha+1)\|\dot{q}\|^2. \qquad (2.23)$$

З іншої сторони,

$$E(t)=\frac{1}{2}\left(\|\dot{q}\|^2-\left(Aq,\,q\right)+\frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_nq_n^3(t)\right). \qquad (2.24)$$

Покладемо $\alpha=\frac{1}{4}$. Тоді $2(2\alpha+1)=3$ і рівняння (2.23), (2.24) показують, що

$$h(t)=-3E(t)-\frac{1}{2}\left(Aq(t),\,q(t)\right).$$

Оскільки $E(t)=E(0)<0$ і $\left(Aq(t),\,q(t)\right)\le 0$, то

$$h(t)=-3E(0)-\frac{1}{2}\left(Aq(t),\,q(t)\right)\ge -3E(0)>0.$$

Таким чином, всі умови леми 2.4.1 виконуються з $\alpha=\frac{1}{4}$ і теорему доведено. □

Наведемо більш явні умови неіснування глобальних розв'язків. Щоб виключити тривіальний випадок, припустимо, що $d_n\ne 0$ хоча б для одного $n\in\mathbb{Z}$. Відмітимо, що в тривіальному випадку, коли $d_n\equiv 0$, нелінійність відсутня і $E(0)$ не може бути від'ємним. В цьому випадку, як слідує із загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь в банановому просторі ([13]), глобальні розв'язки існують для будь-яких початкових даних. Покладемо

$$N_\pm=\left\{n\in\mathbb{Z}\mid \pm d_n>0\right\}.$$

Відмітимо, що в нетривіальному випадку хоча б одна множина N_+ або N_- не порожня.

Наслідок 2.4.1. *Нехай d_n не тотожний нуль і $q^{(0)}=\left\{q_n^{(0)}\right\}\in l^2$, $q^{(1)}=\left\{q_n^{(1)}\right\}\in l^2$ такі, що $q_n^{(0)}q_n^{(1)}\ge 0$ для будь-якого $n\in\mathbb{Z}$, $q_n^{(0)}q_n^{(1)}>0$ хоча б для одного $n\in N_+\bigcup N_-$, і $\mp q_n^{(0)}\ge 0$ для $n\in N_\pm$. Тоді існує таке $\lambda_0>0$, що для будь-якого $\lambda\ge\lambda_0$ розв'язок задачі Коші для рівняння (2.14) з початковими даними $\lambda q^{(0)}$ і $q^{(1)}$ має скінченний максимальний інтервал існування.*

Доведення. Перевіримо умови теореми 2.4.1 для початкових даних $\lambda q^{(0)}$ і $q^{(1)}$. Маємо

$$\left(\lambda q^{(0)},\, q^{(1)}\right) = \lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}} q_n^{(0)} q_n^{(1)} > 0$$

для будь-якого $\lambda > 0$. Далі

$$E(0) = \frac{1}{2}\left\{\left\|q^{(1)}\right\|^2 - \left(A\left(\lambda q^{(0)}\right),\, \lambda q^{(0)}\right)\right\} + \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \left(\lambda q_n^{(0)}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|q^{(1)}\right\|^2 - \frac{\lambda^2}{2}\left(Aq^{(0)},\, q^{(0)}\right) + \frac{\lambda^3}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \left(q_n^{(0)}\right)^3.$$

Останній вираз є кубічним многочленом від λ. Згідно умов, коефіцієнт при λ^3 від'ємний. Тому $E(0) < 0$ для достатньо великих $\lambda > 0$. □

1.5. Приклади

В цьому підрозділі наводиться застосування отриманих вище результатів до деяких найпростіших, але нетривіальних прикладів.

Позначимо через Δ одновимірний дискретний оператор Лапласа, заданий формулою

$$\Delta q_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.25}$$

Добре відомі (див., наприклад, [69]) наступні прості факти. Оператор Δ є обмеженим самоспряженим оператором в l^2. Більше того, Δ недодатний і його спектр, $\sigma(\Delta)$, є сегментом $[-2;\,0]$.

Розглянемо рівняння

$$\ddot{q}_n = \Delta q_n - m^2 q_n + f(q_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.26}$$

де $m \geq 0$ і $f(r)$ – деяка задана функція. Це рівняння є дискретним аналогом нелінійного рівняння Клейна–Гордона, добре відомого в класичній теорії поля [21]. Назвемо його дискретним нелінійним рівнянням Клейна–Гордона.

При $m = 0$ рівняння (2.26) є дискретним аналогом класичного нелінійного хвильового рівняння.

Рівняння (2.26) має вигляд (2.1) з $A = \Delta - m^2$ і $V_n(r) = V(r) = -\int\limits_0^r f(s)ds$.

Оператор $A = \Delta - m^2$, очевидно, недодатний.

Приклад 2.5.1. *Нехай* $f(r) = ar^2,\ a \neq 0$. *Тоді* $V_n(r) = -\dfrac{a}{3}r^3$ *і рівняння (2.26) є квадратичним дискретним рівнянням Клейна–Гордона*

$$\ddot{q}_n = \Delta q_n - m^2 q_n + a q_n^2, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.27}$$

Нехай $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ і $m^2 > 0$ (оператор A в цьому випадку від'ємно визначений). Якщо $\left\|q^{(0)}\right\|$ і $\left\|q^{(1)}\right\|$ достатньо малі, то, як показує наслідок 2.3.1, задача Коші для рівняння (2.27) має єдиний глобальний розв'язок. З іншої сторони, наслідок 2.4.1 показує, що при певному виборі початкових даних глобального розв’язку немає. Існування глобальних розв’язків при $m = 0$ залишається відкритим.

Приклад 2.5.2. *Нехай* $f(r) = ar^3$, $a \neq 0$. *Тут* $V_n(r) = -\dfrac{a}{4} r^4$. *Рівняння (2.26) в цьому випадку є кубічним дискретним рівнянням Клейна–Гордона*

$$\ddot{q}_n = \Delta q_n - m^2 q_n + a q_n^3, \ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{2.28}$$

Якщо $a < 0$, то виконуються умови теореми 2.2.2 і рівняння (2.28) має єдиний глобальний розв’язок при будь-яких початкових даних $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$. Більше того, згідно наслідку 2.2.2, в даному випадку можна навіть замінити в (2.28) $m^2 \geq 0$ будь-яким дійсним числом. Якщо ж $a > 0$, то теорема 2.1.1 дає існування локальних розв’язків. Питання про існування глобальних розв’язків в цьому випадку залишається відкритим, ймовірно, має негативну відповідь.

Висновки до розділу 2

Другий розділ дисертації присвячений питанню коректності задачі Коші для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують нескінченний ланцюг нелінійних осциляторів. Він складається з п’яти підрозділів. В першому підрозділі наводиться формулювання задачі та отримано, як наслідок стандартного результату для диференціальних рівнянь в банаховому просторі, умови існування та єдиності локального розв’язку.

В другому підрозділі отримано достатні умови існування глобальних розв’язків. Для цього використано подання системи в гамільтоновому виді. Основними умовами тут є недодатність оператора лінійної взаємодії між осциляторами та напівобмеженість знизу їх потенціалів. Показано, що для потенціалів вище другого степеня умову недодатності оператора лінійної взаємодії можна опустити.

Також окремо досліджено випадок кубічного потенціалу, який не задовольняє отриманим умовам. В третьому підрозділі отримано умови існування та єдиності у випадку кубічної потенціальної функції. Зокрема показано, що якщо початкові дані достатньо малі в l^2-нормі, то глобальний розв'язок існує. Однак для достатньо великої множини початкових даних цей розв'язок не може існувати. Умови неіснування глобального розв'язку отримано в четвертому підрозділі.

Останній підрозділ цього розділу присвячений прикладам. Зокрема, для кубічного дискретного рівняння Клейна–Гордона

$$\ddot{q}_n = \Delta q_n - m^2 q_n + a q_n^3, \quad n \in \mathbb{Z},$$

задача Коші має глобальний розв'язок для будь-яких початкових даних при $a < 0$. Якщо ж $a > 0$, то питання про існування глобальних розв'язків залишається відкритим. Тут ще також розглянуто і квадратне рівняння Клейна–Гордона. Показано, що при $m^2 > 0$, глобальний розв'язок задачі Коші існує для всіх початкових даних з достатньо малою l^2-нормою, незалежно від знаку a.

Результати даного розділу опубліковано в роботах [5], [6], [8].

РОЗДІЛ 3

ПЕРІОДИЧНІ ЗА ЧАСОМ РОЗВ'ЯЗКИ

3.1. Варіаційне формулювання задачі для скінченного і нескінченного ланцюгів

В цьому розділі вивчаються T-періодичні за часом розв'язки рівняння (2.1) з крайовими умовами (2.2) на нескінченності. Як і в розділі 2, ця задача зводиться до вивчення T-періодичних розв'язків диференціально-операторного рівняння (2.4) в просторі l^2. Нагадаємо, що (2.4) має вигляд

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{3.1}$$

де лінійний оператор A визначається формулами

$$\left(Aq\right)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n, \tag{3.2}$$

$$b_n = c_n - a_n - a_{n-1},$$

а нелінійний оператор B – формулою

$$B(q)_n = V_n'(q_n) \tag{3.3}$$

(див. підрозділ 2.1).

Всюди в цьому розділі припускається, що

$\left(i_2\right)$ *коефіцієнти* a_n *і* c_n *є* N*-періодичними, тобто* $a_{n+N} = a_n$, $c_{n+N} = c_n$, *і* A *– додатно визначений в* l^2, *тобто існує таке* $\alpha_0 > 0$, *що*

$$\left(Aq, q\right) \ge \alpha_0 \left\|q\right\|^2, \quad q \in l^2;$$

$\left(ii_2\right)$ *для будь-якого* $n \in \mathbb{Z}$ *функція* $V_n(r)$ *неперервно диференційовна,* $V_n(0) = V_n'(0) = 0$ *і* $V_n'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$, *та виконується умова* N*-періодичності* $V_{n+N} = V_n$;

(iii_2) *існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu V_n(r) \le V_n'(r) r, \quad r \ne 0.$$

Лема 3.1.1. *Якщо* V_n *задовольняє умовам* $(ii_2), (iii_2)$, *то існують такі константи* $d > 0$ *та* $d_0 \ge 0$, *які не залежать від* n, *що*

$$V_n(r) \ge d|r|^{\mu} - d_0. \tag{3.4}$$

Доведення. Зафіксуємо $r_0 > 0$. Оскільки

$$V_n'(r) \ge \mu \frac{V_n(r)}{r},$$

то згідно стандартних результатів про диференціальні нерівності ([26]), $V_n(r) \ge y(r)$ при $r \ge r_0$, де $y(r)$ – розв'язок диференціального рівняння

$$y'(r) = \frac{\mu}{r} y(r)$$

з початковою умовою $y(r_0) = V_n(r_0)$. Останнє можна знайти в явному виді

$$y(r) = \frac{V_n(r_0)}{r_0^{\mu}} r^{\mu}.$$

Отже,

$$V_n(r) \ge \frac{V_n(r_0)}{r_0^{\mu}} r^{\mu}, \quad r \ge r_0.$$

Тоді для всіх $r \ge 0$

$$V_n(r) \ge V_n(r_0)\left(\frac{r^{\mu}}{r_0^{\mu}} - 1\right) = \frac{V_n(r_0)}{r_0^{\mu}} r^{\mu} - V_n(r_0).$$

Аналогічно, для $r \le 0$

$$V_n(r) \ge \frac{V_n(-r_0)}{r_0^{\mu}} |r|^{\mu} - V_n(r_0).$$

Звідси отримуємо (3.4) з

$$d = \inf_n \min\left[\frac{V_n(-r_0)}{r_0^{\mu}}, \frac{V_n(r_0)}{r_0^{\mu}}\right],$$

$$d_0 = \sup_n \max\left[V_n(r_0), V_n(-r_0)\right].$$

Лему доведено. □

Лема 3.1.2. *В зроблених припущеннях існує така неперервна монотонно зростаюча функція* $\sigma(r),\ r \ge 0$*, що* $\sigma(0)=0,\ \lim\limits_{r\to\infty}\sigma(r)=+\infty$ *і*

$$V_n'(r)r \le \sigma(|r|)r^2. \qquad (3.5)$$

Доведення. Покладемо

$$\sigma(r)=\max_n \sup_{|s|\le r}\left|\frac{V_n'(s)}{s}\right|.$$

Нерівність (3.5), неперервність та монотонність $\sigma(r)$, а також рівність $\sigma(0)=0$, очевидні. Із умови (iii_2) та леми 3.1.1 випливає, що

$$\sigma(r) \ge const\cdot r^{\mu-2}$$

при достатньо великих r. Оскільки $\mu > 2$, то $\sigma(r)\to+\infty$ при $r\to+\infty$ і тому лему доведено. □

Зауваження 3.1.1. *Нехай, додатково до умов* $(i_2)-(iii_2)$*, виконується умова* (ii_1) *підрозділу 2.1, тобто потенціал* V_n *дещо більш регулярний, ніж вимагається вище. Тоді лема 3.1.1 показує, зокрема, що в зроблених припущеннях рівняння (3.1) задовольняє умовам наслідку 2.2.2, зокрема, задача Коші цього рівняння має глобальні розв'язки. Нагадаємо, що A – додатно визначений і, отже, умови теореми 2.2.2 не виконуються.*

Згідно умови просторової періодичності системи, природно розглядати такі періодичні по n крайові умови. Нехай $k>0$ – ціле. Розглянемо рівняння (2.1) з крайовою умовою

$$q_{n+kN}=q_n. \qquad (3.6)$$

Ця задача використовується як допоміжна при вивченні періодичних розв'язків задачі (2.1), (2.2). Запишемо цю задачу у вигляді диференціально-операторного рівняння. Позначимо через l_k^2 простір kN-періодичних послідовностей. Це скінченновимірний простір розмірності $kN-1$.

В просторі l_k^2 введемо норму

$$\|q\|_{l_k^2} = \left(\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} |q_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

та скалярний добуток

$$(p, q)_{l_k^2} = \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} p_n q_n,$$

де $[x]$ – ціла частина x.

Оператор A, заданий формулою (3.2), діє також в просторі l_k^2. Цей оператор будемо позначати A_k. Формула (3.3) показує, що оператор B також діє в l_k^2. Позначимо його B_k. Тоді задача (2.1), (3.6) запишеться у вигляді

$$\ddot{q} = A_k q - B_k(q). \tag{3.7}$$

Лема 3.1.3. *Нехай виконується умова* (i_2). *Тоді*

$$(A_k q, q) \geq \alpha_0 \|q\|_{l_k^2}^2, \quad q \in l_k^2.$$

Доведення. Оскільки A_k – самоспряжений скінченновимірний оператор, то достатньо показати, що для будь-якого його власного значення λ маємо $\lambda \geq \alpha_0$. Якщо λ – власне значення A_k з власним вектором $q \in l_k^2$, то q є узагальненим власним вектором оператора A (див., [11], [69]). Отже, λ – точка спектру оператора A. Оскільки спектр A лежить у множині $[\alpha_0; +\infty)$, то отримуємо те, що вимагалося. Лему доведено. □

Надалі нам знадобляться деякі простори соболєвського типу. Стосовно загальної теорії соболєвських просторів зі значеннями в гільбертовому просторі див. [16]. Нехай $T > 0$. Позначимо через X_T підпростір T-періодичних функцій із $H_{loc}^1\left(\mathbb{R}; l^2\right)$. Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(q,\ p)_T = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\dot{q}(t),\ \dot{p}(t) \right) + \left(q(t),\ p(t) \right) \right] dt.$$

Відповідна норма в X_T позначається через $\|\cdot\|_T$.

Більш явно, простір X_T складається із послідовностей $q = \{q_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ таких функцій $q_n \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, що $q_n(t+T) = q_n(T)$ і

$$\|q\|_T^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|q_n\|^2_{H^1(-T/2;\, T/2)} < \infty,$$

де

$$\|u\|^2_{H^1(a;\, b)} = \int_a^b \left[|\dot{u}(t)|^2 + |u(t)|^2 \right] dt.$$

Згідно теореми про вкладення ([16]), X_T неперервно вкладено в простір $C_T\left(\mathbb{R};\, l^2\right)$ неперервних T-періодичних функцій зі значеннями в l^2.

Аналогічно, $X_{T,k}$ позначає підпростір $H^1_{loc}\left(\mathbb{R};\, l_k^2\right)$, що складається із T-періодичних функцій, зі скалярним добутком

$$(q,\ p)_{T,k} = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\dot{q}(t),\ \dot{p}(t) \right)_{l_k^2} + \left(q(t),\ p(t) \right)_{l_k^2} \right] dt$$

і відповідною нормою $\|\cdot\|_{T,k}$. Його елементи – послідовності $q = \{q_n(t)\}$ таких функцій $q_n \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, що $q_n(t+T) = q_n(t)$ і $q_{n+kN}(t) = q_n(t)$. Як і вище, $X_{T,k} \subset C_T\left(\mathbb{R};\, l_k^2\right)$.

Перейдемо безпосередньо до варіаційних постановок для рівняння (3.1) та (3.7). Першому з них відповідає функціонал

$$\Phi(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 + \frac{1}{2}(Aq,\ q) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n\left(q_n(t)\right) \right] dt \tag{3.8}$$

на просторі X_T. Функціонал, що відповідає рівнянню (3.7) має вигляд

$$\Phi_k(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2_{l_k^2} + \frac{1}{2}\left(A_k q,\ q\right)_{l_k^2} - \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} V_n\left(q_n(t)\right) \right] dt \tag{3.9}$$

та визначений на просторі $X_{T,k}$. Ці функціонали коректно визначені на відповідних просторах. Дійсно, їх квадратичні члени скінченні згідно визначення просторів X_T та $X_{T,k}$. Неквадратичні члени також скінченні, оскільки, згідно теорем вкладення, $q(t)$ неперервна функція на $[-T/2; T/2]$ зі значеннями в l^2 або l_k^2 відповідно, а згідно (ii_2)

$$|V_n(r)| \le C|r|^2$$

на будь-якому скінченому інтервалі зміни r.

Для формулювання наступного результату нагадаємо, що $\langle f, u \rangle$ позначає значення лінійного функціоналу f на елементі u.

Лема 3.1.4. *В умовах $(i_2), (ii_2)$ функціонали Φ і Φ_k належать класу C^1. Їх похідні задаються формулами*

$$\langle \Phi'(q), h \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\dot{q}, \dot{h}\right) + \left(Aq(t), h(t)\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n'(q_n(t))h_n(t) \right] dt, \tag{3.10}$$

$$\langle \Phi_k'(q), h \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\dot{q}, \dot{h}\right)_{l_k^2} + \left(A_k q(t), h(t)\right)_{l_k^2} - \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} V_n'(q_n(t))h_n(t) \right] dt, \tag{3.11}$$

для $h \in X_T$ та $h \in X_{T,k}$ відповідно.

Доведення. Розглянемо функціонал Φ.

Відмітимо спочатку, що квадратичні члени функціоналу Φ є функціоналами класу C^1 та їх похідні виражаються лінійними по q членами в (3.10). Тому достатньо розглянути функціонал

$$\Psi(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n(q_n(t))dt.$$

Покажемо спочатку, що похідна Гато $\Psi'(q)$ існує і виражається формулою

$$\langle \Psi'(q), h \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n'(q_n(t))h_n(t)dt \tag{3.12}$$

для будь-яких $q\in X_T$ та $h\in X_T$. Дійсно, нехай для $q\in X_T$, $h\in X_T$ та $|\lambda|\le 1$. За формулою Лагранжа

$$\Psi\left(q+\lambda h\right)-\Psi(q)=\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}V_n'\left(q_n(t)+\lambda\theta_n h_n(t)\right)\lambda h_n(t)dt,$$

де $\theta_n\in\left(0;1\right)$.

Запишемо праву частину у вигляді

$$\lambda\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}V_n'\left(q_n(t)\right)h_n(t)dt+$$

$$+\lambda\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(V_n'\left(q_n(t)+\lambda\theta_n h_n(t)\right)-V_n'\left(q_n(t)\right)\right)h_n(t)dt.$$

За означенням похідної Гато, для доведення (3.12) достатньо показати, що

$$\lim_{\lambda\to 0}I_\lambda=0,$$

де

$$I_\lambda=\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(V_n'\left(q_n(t)+\lambda\theta_n h_n(t)\right)-V_n'\left(q_n(t)\right)\right)h_n(t)dt.$$

Запишемо I_λ у вигляді

$$I_\lambda=\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{|n|<m}\left(V_n'\left(q_n(t)+\lambda\theta_n h_n(t)\right)-V_n'\left(q_n(t)\right)\right)h_n(t)dt+$$

$$+\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{|n|\ge m}V_n'\left(q_n(t)+\lambda\theta_n h_n(t)\right)h_n(t)dt-$$

$$-\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{|n|\ge m}V_n'\left(q_n(t)\right)h_n(t)dt=I_\lambda^{(1)}+I_\lambda^{(2)}-I_\lambda^{(3)},$$

де m буде вибрано пізніше.

Нехай $\varepsilon>0$. Згідно $\left(ii_2\right)$, існує таке $\delta_\varepsilon>0$, що $\left|V_n'(r)\right|\le\varepsilon|r|$ при $|r|\le\delta_\varepsilon$. Згідно теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтегралу

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\|q_n\right\|^2_{C(-T/2,\,T/2)}=\left\|q\right\|_T^2.$$

За теоремою вкладення,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|q_n\|^2_{C([-T/2,\,T/2])}\le C\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|q_n\|^2_{H^1(-T/2,\,T/2)}<\infty.$$

Отже, при достатньо великому m маємо $\|q_n\|_{C([-T/2;\,T/2])}\le\delta_\varepsilon$ при $|n|\ge m$. Аналогічно, враховуючи, що $\theta_n\in(0;1)$ і $|\lambda|\le 1$, та збільшуючи, можливо, m, можна вважати, що

$$\|q_n+\lambda\theta_n h_n\|_{C([-T/2;\,T/2])}\le\delta_\varepsilon$$

при $|n|\ge m.$ Тоді

$$\left|I_\lambda^{(3)}\right|\le\varepsilon\cdot\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{|n|\ge m}|q_n(t)|\cdot|h_n(t)|\,dt\le\varepsilon\cdot\|q\|_{L^2\left(-T/2,\,T/2;\,l^2\right)}\|h\|_{L^2\left(-T/2,\,T/2;\,l^2\right)}$$

і

$$\left|I_\lambda^{(2)}\right|\le\varepsilon\left(\|q\|_{L^2\left(-T/2,\,T/2;\,l^2\right)}+\|h\|_{L^2\left(-T/2,\,T/2;\,l^2\right)}\right)\|h\|_{L^2\left(-T/2,\,T/2;\,l^2\right)}.$$

Що стосується $I_\lambda^{(1)}$, то $\lambda\theta_n h_n(t)\to 0$ при $\lambda\to 0$ рівномірно по t, функції $V_n'(r)$ рівномірно неперервні на кожному скінченому інтервалі зміни r, а вираз для $I_\lambda^{(1)}$ містить скінченне число доданків. Отже,

$$\lim_{\lambda\to 0}I_\lambda^{(1)}=0.$$

Оскільки $\varepsilon>0$ довільне, то звідси випливає, що $\lim\limits_{\lambda\to 0}I_\lambda=0.$

Залишається перевірити, що похідна $\Psi'(q)$, задана формулою (3.12), неперервна по $q\in X_T$. Для цього потрібно показати, що

$$\lim_{\|v\|_T\to 0}\sup_{\|h\|_T\le 1}\left|\left\langle\Psi'(q+v)-\Psi'(q),\,h\right\rangle\right|=0.$$

Згідно (3.12),

$$\left\langle\Psi'(q+v)-\Psi'(q),\,h\right\rangle=\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(V_n'\left(q_n(t)+v_n(t)\right)-V_n'(q_n(t))\right)h_n(t)\,dt=$$

$$=\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{|n|<m}\left(V_n'\left(q_n(t)+v_n(t)\right)-V_n'(q_n(t))\right)h_n(t)\,dt+$$

$$+\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{|n|\geq m}V_n'\big(q_n(t)+v_n(t)\big)h_n(t)dt-$$

$$-\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{|n|\geq m}V_n'(q_n(t))h_n(t)dt. \tag{3.13}$$

Як і вище,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|q_n\|^2_{C([-T/2;T/2])}<\infty,$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|v_n\|^2_{C([-T/2;T/2])}\leq C\|v\|_T^2$$

з деякою константою $C>0$. Тому, згідно (ii_2), для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $m>0$, що для будь-якого $v\in X_T$ з достатньо малою нормою $\|v\|_T$ другий та третій члени в правій частині (3.13) по модулю не перевищують

$$\varepsilon\cdot\left(\|q\|_T+\|v\|_T\right)\cdot\|h\|_T\leq\varepsilon\cdot\left(\|q\|_T+\|v\|_T\right)\leq C_1\varepsilon$$

та

$$\varepsilon\cdot\|q\|_T\cdot\|h\|_T\leq\varepsilon\cdot\|q\|_T\leq C_1\varepsilon$$

відповідно з деяким $C_1>0.$

Перший член в правій частині (3.12) по модулю не перевищує

$$\sup_{|n|<m,\,t\in[-T/2;T/2]}\left|V_n'\big(q_n(t)+v_n(t)\big)-V_n'\big(q_n(t)\big)\right|\cdot\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{|n|<m}|h_n(t)|dt\leq$$

$$\leq\sup_{|n|<m,\,t\in[-T/2;T/2]}\left|V_n'\big(q_n(t)+v_n(t)\big)-V_n'\big(q_n(t)\big)\right|\cdot C_2\left(\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{|n|<m}|h_n(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq C_2\cdot\sup_{|n|<m,\,t\in[-T/2;T/2]}\left|V_n'\big(q_n(t)+v_n(t)\big)-V_n'\big(q_n(t)\big)\right|\cdot\|h\|_T\leq$$

$$\leq C_2\cdot\sup_{|n|<m,\,t\in[-T/2;T/2]}\left|V_n'\big(q_n(t)+v_n(t)\big)-V_n'\big(q_n(t)\big)\right|.$$

Оскільки $\|v\|_T \to 0$, то $\|v\|_{C([-T/2,\, T/2];\, l^2)} \to 0$ і, згідно (ii_2), права частина останньої нерівності прямує до нуля рівномірно по $h \in X_T$ з $\|h\|_T \le 1$. Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, звідси слідує, те що вимагалося.

Випадок Φ_k аналогічний і навіть простіший, оскільки у виразі для Φ_k відсутні нескінченні суми. Лему доведено. □

Наступне твердження зводить знаходження T-періодичних розв'язків рівнянь (3.1) та (3.7) до пошуку критичних точок відповідних функціоналів.

Лема 3.1.5. *В умовах $(i_2)-(iii_2)$ критичні точки функціоналів Φ та Φ_k є T-періодичними розв'язками рівнянь (3.1) та (3.7) відповідно.*

Доведення. Розглянемо тільки випадок функціоналу Φ. Другий випадок аналогічний.

Якщо $q \in X_T$ – критична точка функціоналу Φ, то, за лемою 3.1.4

$$\left\langle \Phi'(q), h \right\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\dot{q}, \dot{h}\right) + \left(Aq(t), h(t)\right) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_n'(q_n(t)) h_n(t) \right] dt = 0$$

для будь-якого $h \in X_T$. Це означає, що q – слабкий розв'язок рівняння (3.1). Отже,

$$\ddot{q} = Aq - B(q)$$

в смислі узагальнених функцій. Однак, за теоремою вкладення, $q \in C\left(\mathbb{R}; l^2\right)$. Отже, $Aq \in C\left(\mathbb{R}; l^2\right)$ і, згідно умови (ii_2), $B(q) \in C\left(\mathbb{R}; l^2\right)$. Таким чином, $\ddot{q} \in C\left(\mathbb{R}; l^2\right)$ і значить, q – двічі неперервно диференційовна функція зі значеннями в l^2. Оскільки, за означенням простору X_T, q є T-періодичною функцією, то q – T-періодичний розв'язок рівняння (3.1). Лему доведено. □

Далі нам знадобиться наступна проста лема, яка дає нерівність між нормами критичних точок і відповідними критичними значеннями для функціоналів Φ і Φ_k.

Лема 3.1.6. *Нехай виконуються умови* $(i_2)-(iii_2)$. *Тоді існують такі константи* $\varepsilon_0 > 0$ *і* $c > 0$, *які не залежать від* k, *що для будь-якої критичної точки функціоналів* Φ *або* Φ_k

$$\varepsilon_0 \le \|q\|_T^2 \le c\Phi(q)$$

або

$$\varepsilon_0 \le \|q\|_{T,k}^2 \le c\Phi_k(q)$$

відповідно.

Доведення. Розглянемо випадок функціоналу Φ. Випадок Φ_k аналогічний. Нехай $q \in l^2$ – критична точка Φ. Тоді $\Phi'(q) = 0$ і

$$\Phi(q) = \Phi(q) - \frac{1}{\mu}\langle \Phi'(q), q\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int_{-T/2}^{T/2} \left\{\|\dot{q}(t)\|^2 + \left(Aq(t), q(t)\right)\right\} dt -$$

$$- \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(V_n(q_n(t)) - \frac{1}{\mu} V_n'(q_n(t))\right) dt.$$

Згідно умов (i_2) та (iii_2),

$$\Phi(q) \ge \frac{\mu-2}{2\mu}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\|\dot{q}(t)\|^2 + \alpha_0\|q(t)\|^2\right)dt \ge$$

$$\ge \frac{\mu-2}{2\mu}\beta_0\|q\|_T^2,$$

де $\beta_0 = \min(1, \alpha_0)$. Звідси випливає те, що вимагалося в другій нерівності.

Далі, оскільки $\langle \Phi'(q), q\rangle = 0$, то

$$\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\|\dot{q}(t)\|^2 + \left(Aq(t), q(t)\right)\right\}dt = \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n'(q_n(t))q_n(t)dt.$$

Використовуючи лему 3.1.2, отримуємо

$$\beta_0\|q\|_T^2 \le \sigma\left(\|q\|_{C(-T/2,T/2;\, l^\infty)}\right)\cdot\|q\|_T^2.$$

Оскільки $q \neq 0$, то звідси випливає, що

$$\beta_0 \le \sigma\left(\|q\|_{C\left(-T/2, T/2;\, l^\infty\right)}\right).$$

Згідно теореми вкладення

$$\beta_0 \le \sigma\left(\|q\|_{C\left(-T/2, T/2;\, l^\infty\right)}\right) \le \sigma\left(C \cdot \|q\|_T\right)$$

з деяким $C > 0$.

Тепер достатньо покласти

$$\varepsilon_0^{1/2} = C^{-1} \cdot \sigma^{-1}\left(\beta_0\right)$$

і лему доведено. □

3.2. Про стаціонарні розв’язки

Відмітимо, що будь-який стаціонарний, що не залежить від t, розв’язок систем, які розглядалися в попередніх підрозділах, є T-періодичним для будь-якого $T>0$. Стаціонарні розв’язки задовольняють рівняння

$$Aq = B(q) \qquad (3.14)$$

або

$$A_k q = B_k(q) \qquad (3.15)$$

в залежності від граничних умов. Відмітимо, що обмеження функціоналів Φ та Φ_k на простори сталих функцій мають вигляд $T\cdot\varphi(q)$ і $T\cdot\varphi_k(q)$, де

$$\varphi(q) = \frac{1}{2}\left(Aq,\, q\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n(q_n),\ q\in l^2,$$

$$\varphi_k(q) = \frac{1}{2}\left(A_k q,\, q\right)_{l_k^2} - \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} V_n(q_n),\ q\in l^2.$$

Отже, сталі розв’язки рівнянь (3.14) і (3.15) є критичними точками функціоналів φ та φ_k відповідно. В умовах $(i_2)-(iii_2)$ підрозділу 3.1 $q\equiv 0$ є тривіальним стаціонарним розв’язком.

Існування розв’язків для рівнянь такого типу досить добре вивчено (див. [61]), однак результати цих робіт надалі не використовуються. Проте, нам знадобиться одна проста властивість розв’язків рівнянь (3.14) та (3.15).

Лема 3.2.1. *В умовах $(i_2)-(iii_2)$ існує така константа $\delta_0>0$, яка не залежить від k, що для будь-якого ненульового розв’язку $q\in l_k^2$ (відповідно $q\in l^2$) рівняння (3.15) (відповідно (3.14))*

$$\|q\|_{l_k^2} \ge \delta_0$$

(відповідно,

$$\|q\| \ge \delta_0\text{).}$$

Крім того,

$$\varphi_k(q) \ge \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2,$$

$$\varphi(q) \ge \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2$$

відповідно.

Доведення. Розглянемо випадок рівняння (3.15). Помноживши його скалярно на q, маємо

$$\left(A_k q,\, q\right)_{l_k^2} = \left(B_k(q),\, q\right)_{l_k^2}.$$

Згідно умови (i_2) отримуємо

$$\alpha_0 \left\|q\right\|_{l_k^2}^2 \le \left(B_k(q),\, q\right)_{l_k^2} = \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} V_n'(q_n)q_n. \tag{3.16}$$

За лемою 3.1.2

$$V_n'(r)r \le \sigma\left(|r|\right)r^2, \tag{3.17}$$

де функція $\sigma(r),\ r \ge 0$, неперервна, монотонно зростає, $\sigma(0) = 0$ і $\sigma(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$.

Із нерівності (3.16) отримуємо, що

$$\alpha_0 \left\|q\right\|_{l_k^2}^2 \le \sigma\left(\left\|q\right\|_{l_k^2}\right)\left\|q\right\|_{l_k^2}^2.$$

Оскільки $q \ne 0$, то

$$\sigma\left(\left\|q\right\|_{l_k^2}\right) \ge \alpha_0 > 0$$

і, отже,

$$\left\|q\right\|_{l_k^2} \ge \delta_0 = \sigma^{-1}\left(\alpha_0\right) > 0.$$

Доведемо другу частину леми. Оскільки q – критична точка φ_k, то $\varphi_k'(q) = 0$. Отже,

$$\varphi_k(q) = \varphi_k(q) - \frac{1}{\mu}\left\langle \varphi_k'(q),\, q\right\rangle =$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\left(A_k q,\, q\right)_{l_k^2}-\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\left(V_n(q_n)-\frac{1}{\mu}V_n'(q_n)q_n\right).$$

Згідно умов (i_2) та (iii_2),

$$\varphi_k(q)\geq\frac{\mu-2}{2\mu}\cdot\alpha_0\left\|q\right\|_{l_k^2}^2\geq\frac{\mu-2}{2\mu}\cdot\alpha_0\delta_0^2,$$

тобто лему доведено. □

3.3. Існування: періодичні умови

В даному підрозділі доводиться існування T-періодичних розв'язків рівняння (2.1) з умовами просторової періодичності (3.6), тобто рівняння (3.7). Ця задача має незалежний інтерес, однак в наступному підрозділі результати про існування її розв'язків будуть використані для доведення існування T-періодичних розв'язків рівняння (2.1) з крайовими умовами (2.2) на нескінченності, тобто рівняння (3.1).

Для побудови шуканих розв'язків, згідно леми 3.1.5, достатньо знайти нетривіальні критичні точки функціоналу Φ_k в просторі $X_{T,k}$. З цією метою буде використана теорема про гірський перевал.

Наведемо спочатку деякі попередні відомості. Нехай φ – C^1-функціонал на гільбертовому просторі H. Говорять, що φ задовольняє умові Пале–Смейла, якщо виконується наступна умова:

(PS) *Нехай $u^{(m)}$ – така послідовність елементів H, що послідовність $\varphi\left(u^{(m)}\right)$ обмежена і $\varphi'\left(u^{(m)}\right)\to 0$. Тоді $u^{(m)}$ містить збіжну підпослідовність.*

Відмітимо, що при перевірці цієї умови можна, без обмеження загальності, вважати, що числова послідовність $\varphi'\left(u^{(m)}\right)$ збігається.

Сформулюємо тепер теорему про гірський перевал в необхідній нам формі (доведення див. в [62], [72]).

Теорема 3.3.1. *Нехай φ – C^1-функціонал на гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$, що задовольняє умові Пале–Смейла. Припустимо, що існує $e\in H$ і $r>0$ такі, що $\|e\|>r$ і*

$$\beta=\inf_{\|u\|=r}\varphi(u)>\varphi(0)\geq\varphi(e). \tag{3.18}$$

Нехай

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{\tau \in [0,\, 1]} \varphi\big(\gamma(\tau)\big), \tag{3.19}$$

де

$$\Gamma = \Big\{ \gamma \in C\big([0;1];\, H\big) : \gamma(0) = 0,\ \varphi\big(\gamma(1)\big) \le 0 \Big\}. \tag{3.20}$$

Тоді b *– критичне значення функціоналу* φ *і* $b \ge \beta$*.*

Зауваження 3.3.1. *Нехай* $\gamma_0 \in \Gamma$ *– деякий елемент (шлях). З побудови критичного значення* b *маємо*

$$b \le \max_{\tau \in [0,\, 1]} \varphi\big(\gamma_0(\tau)\big).$$

Це дозволяє оцінити критичні значення зверху.

Сформулюємо тепер основний результат.

Теорема 3.3.2. *Нехай виконуються умови* $(i_2)-(iii_2)$ *підрозділу 3.1.1. Тоді для будь-яких* $T > 0$ *і натурального* k *задача (2.1), (3.6) (тобто рівняння (2.7)) має ненульовий* T*-періодичний розв'язок* $q = q^{(T,\,k)}$*. При цьому для будь-якого* $T > 0$ *існують такі константи* $\varepsilon_0 > 0$ *і* $C > 0$*, які не залежать від* k*, що*

$$\varepsilon_0 \le \left\| q^{(T,\,k)} \right\|_{T,k} \le C,$$

$$\varepsilon_0 \le \Phi_k\left(q^{(T,\,k)}\right) \le C.$$

Більше того, існує таке $T_0 > 0$*, яке не залежить від* k*, що* $q^{(T,\,k)}$ *– непостійна функція від* t *при всіх* $T \ge T_0$*.*

Як було зазначено вище, доведення ґрунтується на теоремі 3.3.1. В наступних лемах перевіряються умови цієї теореми для функціоналу Φ_k. Той факт, що Φ_k – функціонал класу C^1 вже встановлено в лемі 3.1.4.

Лема 3.3.1. *При умовах* $(i_2)-(iii_2)$ *функціонал* Φ_k *задовольняє умові Пале–Смейла.*

Доведення. Нехай $u^{(m)} \in X_{T,k}$ така послідовність, що $\Phi_k'\left(u^{(m)}\right) \to 0$ і $\Phi_k\left(u^{(m)}\right) \le C$. Тоді

$$\Phi_k\left(u^{(m)}\right)-\frac{1}{\mu}\left\langle\Phi_k'\left(u^{(m)}\right),\,u^{(m)}\right\rangle=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int\limits_{-T/2}^{T/2}\left\{\left\|\dot{u}^{(m)}(t)\right\|_{l_k^2}^2+\right.$$

$$\left.+\left(A_k u^{(m)}(t),\,u^{(m)}(t)\right)_{l_k^2}\right\}dt-\int\limits_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\left\{V_n\left(u_n^{(m)}(t)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\mu}V_n'\left(u_n^{(m)}(t)\right)u_n^{(m)}(t)\right\}dt\geq\frac{\mu-2}{2\mu}\beta_0\left\|u^{(m)}\right\|_{T,k}^2,$$

де $\beta_0=\min\{1,\,\alpha_0\}$. При достатньо великому m маємо

$$\left|\left\langle\Phi_k'\left(u^{(m)}\right),\,u^{(m)}\right\rangle\right|\leq\mu.$$

Тому

$$\frac{\mu-2}{2\mu}\beta_0\left\|u^{(m)}\right\|_{T,k}^2\leq C+\left\|u^{(m)}\right\|_{T,k}.$$

Остання нерівність не може виконуватися для необмеженої послідовності $u^{(m)}$. Таким чином, доведено, що послідовність $u^{(m)}$ обмежена.

Оскільки простір $X_{T,k}$ гільбертів, а послідовність $u^{(m)}$ обмежена, то, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $u^{(m)}\to u$ слабко в $X_{T,k}$. Оскільки простір l_k^2 скінченновимірний, то вкладення $X_{T,k}\subset C\left(-T/2,T/2;\,l_k^2\right)$ компактне. Тому $u^{(m)}\to u$ сильно в $C\left(-T/2,T/2;\,l_k^2\right)$.

Маємо

$$\left\langle\Phi_k'\left(u^{(m)}\right)-\Phi_k'\left(u^{(l)}\right),\,u^{(m)}-u^{(l)}\right\rangle=\int\limits_{-T/2}^{T/2}\left\{\left\|\dot{u}^{(m)}(t)-\dot{u}^{(l)}(t)\right\|_{l_k^2}^2+\right.$$

$$\left.+\left(A_k u^{(m)}(t)-A_k u^{(l)}(t),\,u^{(m)}(t)-u^{(l)}(t)\right)_{l_k^2}\right\}dt-\int\limits_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\left\{V_n'\left(u_n^{(m)}(t)\right)-\right.$$

$$\left.-V_n'\left(u_n^{(l)}(t)\right)\right\}\left(u_n^{(m)}(t)-u_n^{(l)}(t)\right)dt\geq\beta_0\left\|u^{(m)}-u^{(l)}\right\|_{T,k}^2-$$

$$-\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\left\{V_n'\left(u_n^{(m)}(t)\right)-V_n'\left(u_n^{(l)}(t)\right)\right\}\left(u_n^{(m)}(t)-u_n^{(l)}(t)\right)dt,$$

де $\beta_0=\min(1,\alpha)$. Отже,

$$\beta_0\left\|\dot{u}^{(m)}(t)-\dot{u}^{(l)}(t)\right\|_{T,k}^2\le\left\langle\Phi_k'\left(u^{(m)}\right)-\Phi_k'\left(u^{(l)}\right),\,u^{(m)}-u^{(l)}\right\rangle+$$

$$+\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\left\{V_n'\left(u_n^{(m)}(t)\right)-V_n'\left(u_n^{(l)}(t)\right)\right\}\left(u_n^{(m)}(t)-u_n^{(l)}(t)\right)dt. \qquad (3.21)$$

Оскільки $\Phi_k'\left(u^{(m)}\right)\to 0$ сильно, а $u^{(m)}$ обмежена, то перший член в правій частині (3.21) прямує до нуля при $m,l\to\infty$. Другий член також збігається до нуля, оскільки $u^{(m)}\to u$ сильно в $C\left(-T/2,T/2;l_k^2\right)$. Отже, $\left\|u^{(m)}-u^{(l)}\right\|_{T,k}\to 0$ при $m,l\to\infty$. Таким чином, $u^{(m)}$ – послідовність Коші в $X_{T,k}$. Враховуючи перехід до підпослідовності на початку доведення, отримуємо те, що вимагалося. Лему доведено. □

Лема 3.3.2. *Нехай виконуються умови* $(i_2)-(iii_2)$. *Тоді існують такі* $r_0>0$ *і* $e\in X_T$ *з* $\|e\|_{T,k}>r_0$, *що*

$$\inf_{\|u\|_{T,k}=r_0}\Phi_k(u)>0 \qquad (3.22)$$

і $\Phi_k(e)\le 0$. *Число* r_0 *може бути вибране незалежним від* k.

Доведення. Використовуючи нерівність (3.17). Згідно (iii_2)

$$V_n(r)\le\mu^{-1}\sigma\left(|r|\right)r^2.$$

Маємо

$$\Phi_k(u)=\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\|\dot{u}(t)\|_{l_k^2}^2+\left(A_k u(t),\,u(t)\right)_{l_k^2}\right\}dt-\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}V_n\left(u_n(t)\right)dt\ge$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\left\|\dot{u}(t)\right\|_{l_k^2}^2+\left(A_k u(t),\, u(t)\right)_{l_k^2}\right\}dt-\mu^{-1}\sigma\left(\left\|u\right\|_{T,k}\right)\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\left|u_n(t)\right|^2 dt.$$

Використовуючи (i_2) і той факт, що другий інтеграл в правій частині більший за $\|u\|_{T,k}^2$, отримуємо

$$\Phi_k(q)\geq \frac{\beta_0}{2}\|u\|_{T,k}^2-\mu^{-1}\sigma\left(\|u\|_{T,k}\right)\|u\|_{T,k}^2=$$

$$=\left\{\frac{\beta_0}{2}-\mu^{-1}\sigma\left(\|u\|_{T,k}\right)\right\}\|u\|_{T,k}^2,$$

де $\beta_0=\min(1,\alpha)$. Виберемо r_0 із умови $\sigma(r_0)=\frac{\mu\beta_0}{4}$. Отримаємо

$$\Phi_k(u)\geq \frac{\beta_0}{4}r_0^2,$$

що доводить (3.22).

Для доведення другого твердження зафіксуємо ненульовий елемент $u\in X_{T,k}$. Згідно леми 3.1.1 маємо при $\tau>0$

$$\Phi_k(\tau u)=\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\left\|\tau\dot{u}(t)\right\|_{l_k^2}^2+\left(A_k(\tau u(t)),\, \tau u(t)\right)_{l_k^2}\right\}dt-$$

$$-\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}V_n\left(\tau u_n(t)\right)dt\leq$$

$$\leq \frac{\tau^2}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\left\|\dot{u}(t)\right\|_{l_k^2}^2+\left(A_k u(t),\, u(t)\right)_{l_k^2}\right\}dt-$$

$$-d\tau^{\mu}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\left|u_n(t)\right|^{\mu}dt+Nd_0T.$$

Оскільки $\mu>2$, то при достатньо великому $\tau>0$ маємо $\Phi_k(\tau u)<0$. Таким чином, твердження леми має місце з $e=\tau u$. Лему доведено. □

Доведення теореми 3.3.2. Згідно лем 3.3.1 і 3.3.2, для функціоналу Φ_k виконуються всі умови теореми 3.3.1. Таким чином, існування розв'язку $q \neq 0$ доведено. Залишається перевірити, що при достатньо великих T розв'язок $q = q^{(T,k)}$ не є сталим.

Нехай $q^{(0)}$ – деякий сталий розв'язок. Тоді, згідно леми 3.2.1, для відповідного критичного значення $\Phi_k\left(q^{(0)}\right)$ маємо

$$\Phi_k\left(q^{(0)}\right) \geq \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T, \tag{3.23}$$

де $\delta_0 > 0$ з леми 3.2.1.

Тепер оцінимо $\Phi_k\left(q^{(T,k)}\right) = \Phi_k(q)$ зверху. Нехай $u \in X_T$, $u \neq 0$. Тоді, як показано в доведенні леми 3.3.2, $\Phi_k(\tau u) \leq 0$ при всіх достатньо великих $\tau > 0$. Згідно зауваження 3.3.1, для критичного значення маємо

$$\Phi_k(q) \leq \max_{\tau \geq 0} \Phi_k(\tau u). \tag{3.24}$$

Візьмемо в якості $u(t)$ таку функцію, що $u_n(t) \equiv 0$ при $n \neq 0$, $u_0(t) \geq \sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)$ при $0 \leq t \leq \eta T$ і $u_0(t) = 0$ при $\eta T \leq t \leq T$, де $\eta \in (0,1)$ буде вибрано пізніше. Припускається, що $u_0(t)$ продовжена на всю вісь як T-періодична функція. Тоді використовуючи лему 3.1.1,

$$\Phi_k(\tau u) = \frac{\tau^2}{2}\int_0^{\eta T}\left\{(\dot{u}_0(t))^2 + b_0\left(u_0(t)\right)^2\right\}dt - \int_0^{\eta T} V_0\left(\tau u_0(t)\right)dt \leq$$

$$\leq \frac{\tau^2}{2}\int_0^{\eta T}\left\{\left(\frac{2\pi}{\eta T}\cos\frac{2\pi t}{\eta T}\right)^2 + b_0\left(\sin\frac{2\pi t}{\eta T}\right)^2\right\}dt -$$

$$-d\tau^\mu \int_0^{\eta T}\left|\sin\frac{2\pi t}{\eta T}\right|^\mu dt + d_0\eta T. \tag{3.25}$$

Покладемо

$$A_\mu = \int_0^1 \left|\sin 2\pi t\right|^\mu dt.$$

Відмітимо, що

$$A_2 = \int_0^1 \sin^2 2\pi t \cdot dt = \int_0^1 \cos^2 2\pi t \cdot dt = \frac{1}{2}.$$

Із (3.25) випливає, що

$$\Phi_k(\tau u) \le \frac{\tau^2}{4}\left\{\frac{4\pi^2}{\eta T} + b_0\eta T\right\} - dA_\mu\left(\eta T\right)\tau^\mu + d_0\eta T.$$

Нехай $T_0 = \dfrac{2\pi}{\eta\sqrt{b_0}}$ і $T \ge T_0$. Тоді

$$\frac{4\pi^2}{\eta T} \le b_0\eta T$$

і

$$\Phi_k(\tau u) \le \frac{\tau^2}{2} b_0\left(\eta T\right) - dA_\mu\tau^\mu\left(\eta T\right) + d_0\left(\eta T\right) =$$

$$= \eta\left[\frac{\tau^2}{2} b_0 - dA_\mu\tau^\mu + d_0\right] \cdot T.$$

Нехай

$$m_0 = \max_{\tau \ge 0}\left[\frac{\tau^2 b_0}{2} - dA_\mu\tau^\mu + d_0\right].$$

Тоді, згідно (3.24),

$$\Phi_k(q) \le \eta m_0 T. \tag{3.26}$$

Виберемо тепер η таким, що

$$\eta < \frac{\mu - 2}{2\mu m_0}\alpha_0\delta_0^2.$$

Тоді (3.23) і (3.26) дають

$$\Phi_k(q) \le \eta m_0 T < \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T \le \Phi_k\left(q^{(0)}\right).$$

Звідси слідує, що при $T \geq T_0$ розв'язок $q = q^{(T,k)}$ не може бути сталим. Теорему доведено. □

Зауваження 3.3.2. *Відмітимо, що числа* η, m_0, *так як і* α_0, δ_0, *не залежать від* k *і* T. *Отже, при будь-яких* k *і* $T \geq T_0$ *має місце нерівність*

$$\Phi_k\left(q^{(T,k)}\right) \leq \eta m_0 T < \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T, \tag{3.27}$$

де $\eta < \dfrac{\mu - 2}{2\mu m_0}\alpha_0\delta_0^2$ *довільне. Ця нерівність буде використана в наступному підрозділі.*

3.4. Існування: крайові умови на нескінченності

В даному підрозділі встановлюється існування T-періодичних розв'язків рівняння (2.1) з крайовими умовами (2.2), тобто рівняння (3.1). Розв'язки цієї задачі, за лемою 3.1.5, є критичними точками функціоналу Φ. Для цього функціоналу справедливе твердження, аналогічне лемі 3.3.2. Однак, умова Пале–Смейла не виконується. Ми не будемо це доводити. Відмітимо тільки, що в доведенні леми 3.3.1 використана компактність відповідного вкладення, яка відсутня у випадку функціоналу Φ.

Таким чином, теорема 3.3.1 не може бути застосована до функціоналу Φ і тому розв'язки відповідної задачі будуть побудовані як границя розв'язків $q^{(T,k)}$ при $k \to \infty$. Для цього спочатку встановимо дві прості леми. Перша з них отримана в [61], а друга легко з неї слідує.

Лема 3.4.1. *Нехай $v^{(k)} \in l^2$, причому $\left\| v^{(k)} \right\|_{l^2}$ обмежена і $v^{(k)} \to 0$ в l^∞. Тоді для будь-якого $p > 2$ маємо $v^{(k)} \to 0$ в l^p.*

Доведення. Маємо

$$\left\| v^{(k)} \right\|_{l^p}^p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| v_n^{(k)} \right|^p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| v_n^{(k)} \right|^{p-2} \left| v_n^{(k)} \right|^2 \le$$

$$\le \left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| v_n^{(k)} \right| \right\}^{p-2} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| v_n^{(k)} \right|^2 = \left\| v^{(k)} \right\|_{l^\infty}^{p-2} \left\| v^{(k)} \right\|_{l^2}^2 .$$

Оскільки $p > 2$ і $\left\| v^{(k)} \right\|_{l^\infty} \to 0$, то звідси слідує те, що й вимагалося. Лему доведено. □

Перш ніж сформулювати наступну лему, нагадаємо, що $\left\| \cdot \right\|_{l_k^p}$ на просторі kN-періодичних послідовностей визначається формулою

$$\left\| u \right\|_{l_k^p} = \left\{ \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left| u_n \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} .$$

При кожному фіксованому k і різних p ці норми еквівалентні, але ця еквівалентність не є рівномірною по k.

Лема 3.4.2. *Нехай* $u^{(k)} \in l_k^2$, *причому* $\left\| u^{(k)} \right\|_{l_k^2}$ *обмежена і* $u^{(k)} \to 0$ *в* l^∞. *Тоді для будь-якого* $p > 2$ *маємо* $\left\| u^{(k)} \right\|_{l_k^p} \to 0.$

Доведення. Визначимо послідовність $v^{(k)} \in l^2$ наступним чином: $v_n^{(k)} = u_n^{(k)}$ при $-\left[\frac{kN}{2}\right] \le n \le kN - \left[\frac{kN}{2}\right] - 1$ і $v_n^{(k)} = 0$ в протилежному випадку. Тоді неважко бачити, що

$$\left\| v^{(k)} \right\|_{l^\infty} \le \left\| u^{(k)} \right\|_{l^\infty},$$

$$\left\| v^{(k)} \right\|_{l^p} \le \left\| u^{(k)} \right\|_{l_k^p}.$$

Отже, $\left\| v^{(k)} \right\|_{l^\infty} \to 0$ і $\left\| v^{(k)} \right\|_{l^2}$ обмежено. За лемою 3.4.1,

$$\left\| v^{(k)} \right\|_{l^p} = \left\| u^{(k)} \right\|_{l_k^p} \to 0$$

для будь-якого $p > 2$, тобто лему доведено. □

Сформулюємо тепер основний результат цього підрозділу.

Теорема 3.4.1. *Нехай виконуються умови* $(i_2) - (iii_2)$. *Тоді для будь-якого* $T > 0$ *задача (2.1), (2.2), тобто рівняння (3.1), має ненульовий* T*-періодичний розв'язок. При цьому існує таке* $T_0 > 0$, *що при* $T \ge T_0$ *цей розв'язок не є постійним.*

Доведення. Позначимо через $q^{(k)}(t) = \left\{ q_n^{(k)}(t) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ розв'язок $q^{(T,k)}$, побудований в теоремі 3.3.2. Згідно просторової періодичності, $\left\{ q_{n+mN}^{(k)}(t) \right\}$ – також розв'язок задачі (2.1), (3.6). За теоремою 3.3.2 маємо

$$\varepsilon_0 \le \left\| q^{(k)} \right\|_{T,k} \le C, \tag{3.28}$$

$$\varepsilon_0 \le \Phi_k\left(q^{(k)} \right) \le C, \tag{3.29}$$

де константи $0 < \varepsilon_0 \le C$ не залежать від k. Згідно теореми вкладення, збільшуючи константу C, отримуємо, що

$$\left\| q^{(k)} \right\|_{C\left(-T/2,\, T/2;\, l_k^2\right)} \le C. \tag{3.30}$$

Зокрема, для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$

$$\left\| q_n^{(k)} \right\|_{C(-T/2,\, T/2)} \le C. \tag{3.31}$$

Тепер доведемо наступну властивість розв'язків $q^{(k)}$. Для будь-якого k існує таке $n_k \in \mathbb{Z}$, що

$$\left\| q_{n_k}^{(k)} \right\|_{C(-T/2,\, T/2)} \ge \delta \tag{3.32}$$

з деяким $\delta > 0$, що не залежить від k. Для доведення цього, покладемо

$$u_n^{(k)} = \left\| q_n^{(k)} \right\|_{C(-T/2,\, T/2)}.$$

Тоді для $u^{(k)} = \left(u_n^{(k)} \right)$

$$\left\| u^{(k)} \right\|_{l_k^2}^2 = \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left\| q_n^{(k)} \right\|_{C(-T/2,\, T/2)}^2 \le C_1^2 \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left\| q_n^{(k)} \right\|_{H^1(-T/2,\, T/2)}^2 =$$

$$= C_1^2 \left\| q^{(k)} \right\|_{T,k}^2 \le C_1^2 C^2$$

з деяким $C_1 > 0$, що не залежить від k. Тут використана неперервність вкладення

$$H^1\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \subset C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$$

та нерівність (3.28). Таким чином, $\left\| u^{(k)} \right\|_{l_k^2}$ обмежена. Нерівність (3.32) означає, що

$$u_{n_k}^{(k)} \ge \delta$$

з деяким n_k. Припустимо, що остання нерівність не виконується. Тоді $\left\| u^{(k)} \right\|_{l^\infty} \to 0$. Отже, згідно леми 3.4.2, $\left\| u^{(k)} \right\|_{l_k^p} \to 0$ для будь-якого $p > 2$. Однак,

$$\left\|u^{(k)}\right\|_{l_k^p}^p = \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left\|q_n^{(k)}\right\|_{C(-T/2,\,T/2)}^p.$$

Оскільки вкладення

$$C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right) \subset L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$$

неперервне, то звідси випливає, що

$$\left\|u^{(k)}\right\|_{l_k^p}^p \ge C_2 \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left\|q_n^{(k)}\right\|_{L^p(-T/2,\,T/2)}^p =$$

$$= C_2 \left\|q^{(k)}\right\|_{L^p\left(-T/2,\,T/2;\,l_k^p\right)}^p.$$

Звідси випливає, що

$$\left\|q^{(k)}\right\|_{L^p\left(-T/2,\,T/2;\,l_k^p\right)}^p \to 0 \tag{3.33}$$

при $k \to \infty$.

Зафіксуємо тепер довільне $p > 2$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться така константа $M = M_\varepsilon > 0$, що

$$\left|V_n'(r)\right| \le \varepsilon |r| + M |r|^{p-1}, \quad |r| \le C. \tag{3.34}$$

Справді, згідно умови (ii_2),

$$\left|V_n'(r)\right| \le \varepsilon |r|, \quad |r| \le r_\varepsilon,$$

з деяким $r_\varepsilon > 0$. При $r_\varepsilon \le |r| \le C$ маємо

$$\left|V_n'(r)\right| \le M |r|^{p-1},$$

де

$$M = \max_n \sup_{r_\varepsilon \le |r| \le C} \frac{\left|V_n'(r)\right|}{|r|^{p-1}}.$$

Звідси випливає (3.34).

Оскільки $q^{(k)}$ – критична точка функціоналу Φ_k, то

$$\left\langle \Phi_k'\left(q^{(k)}\right),\, q^{(k)}\right\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \left\|\dot{q}^{(k)}(t)\right\|_{l_k^2}^2 + \left(A_k q^{(k)}(t),\, q^{(k)}(t)\right)_{l_k^2} \right\} dt -$$

$$- \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \int_{-T/2}^{T/2} V_n'\left(q_n^{(k)}(t)\right) dt = 0.$$

Використовуючи (3.34) та (3.31), отримуємо звідси, що

$$\beta_0 \left\|q^{(k)}\right\|_{T,k}^2 \le \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \left\|\dot{q}^{(k)}(t)\right\|_{l_k^2}^2 + \left(A_k q^{(k)}(t),\, q^{(k)}(t)\right)_{l_k^2} \right\} dt =$$

$$= \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \int_{-T/2}^{T/2} V_n'\left(q_n^{(k)}(t)\right) dt \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \int_{-T/2}^{T/2} \left|q_n^{(k)}(t)\right|^2 dt + M \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \int_{-T/2}^{T/2} \left|q_n^{(k)}(t)\right|^p dt =$$

$$= \varepsilon \left\|q^{(k)}\right\|_{L^2\left(-T/2,T/2;\, l_k^2\right)}^2 + M \left\|q^{(k)}\right\|_{L^p\left(-T/2,T/2;\, l_k^p\right)}^p \le$$

$$\le \varepsilon \left\|q^{(k)}\right\|_{T,k}^2 + M \left\|q^{(k)}\right\|_{L^p\left(-T/2,T/2;\, l_k^p\right)}^p .$$

Вибираючи $\varepsilon = \dfrac{\beta_0}{2}$, отримуємо, що

$$\frac{\beta_0}{2} \left\|q^{(k)}\right\|_{T,k}^2 \le M \left\|q^{(k)}\right\|_{L^p\left(-T/2,T/2;\, l_k^p\right)}^p .$$

Згідно (3.33), звідси слідує, що

$$\left\|q^{(k)}\right\|_{T,k} \to 0$$

при $k \to \infty$. Однак, це протирічить першій нерівності в (3.28). Тим самим властивість (3.32) доведена.

Замінюючи, якщо потрібно, $q_n^{(k)}$ на $\left(q_{n+mN}^{(k)}\right)$ з деяким $m \in \mathbb{Z}$, можна вважати, що в (3.32) $0 \le n_k \le N-1$. Однак, таких значень n_k скінченне число.

Тому, переходячи до підпослідовності (по k), можна вважати, що всі n_k співпадають, тобто $n_k = n_0$. Тоді

$$\left\| q_{n_0}^{(k)} \right\|_{C(-T/2,T/2)} \geq \delta > 0. \tag{3.35}$$

Згідно нерівності (3.28) і компактності вкладення

$$H^1\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \subset C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right),$$

переходячи до підпослідовності (по k) можна вважати, що для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$ існує таке $q_n \in H^1(-T/2, T/2)$, що $q_n^{(k)} \to q_n$ слабко в $H^1(-T/2, T/2)$ і сильно в $C(-T/2, T/2)$. Покладемо $q = (q_n)$. Переходячи до границі при $k \to \infty$ в (3.35), отримуємо

$$\left\| q_{n_0} \right\|_{C(-T/2,\, T/2)} \geq \delta_0 > 0,$$

тобто $q \neq 0$. Далі, для будь-якого натурального m і достатньо великого k:

$$\sum_{|n| \leq m} \left\| q_n^{(k)} \right\|_{H^1(-T/2,T/2)}^2 \leq \sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left\| q_n^{(k)} \right\|_{H^1(-T/2,T/2)}^2 = \left\| q^{(k)} \right\| \leq C^2,$$

згідно (3.28). Переходячи до границі при $k \to \infty$ та враховуючи слабку напівнеперервність норми в H^1 знизу, отримуємо

$$\sum_{|n| \leq m} \left\| q_n \right\|_{H^1(-T/2,T/2)}^2 \leq C^2.$$

Тепер перехід до границі при $m \to \infty$ показує, що $\|q\|_T \leq C < \infty$ і $q \in X_T$.

Покажемо тепер, що q – критична точка функціоналу Φ. Для цього перевіримо, що

$$\left\langle \Phi'(q), h \right\rangle = 0 \tag{3.36}$$

для будь-якого $h \in X_T$. Однак, множина таких функцій $h = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, що $h_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, окрім скінченого числа, всюди щільна в X_T. Тому рівність (3.36) достатньо перевірити тільки для таких функцій.

Нехай $h=(h_n)\in X_T$ така, що $h_n=0$ при $|n|\geq m$. Для достатньо великого k коректно визначена така функція $h^{(k)}\in X_{T,k}$, що $h_n^{(k)}=h_n$ при $-\left[\frac{kN}{2}\right]\leq n\leq kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1$. Оскільки $q^{(k)}$ – критична точка Φ_k, то

$$0=\left\langle \Phi_k'\left(q^{(k)}\right),\, h^{(k)}\right\rangle=\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\int_{-T/2}^{T/2}\dot{q}_n^{(k)}(t)\dot{h}_n^{(k)}(t)dt+$$

$$+\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\int_{-T/2}^{T/2}\left(a_nq_{n+1}^{(k)}(t)+a_{n-1}q_{n-1}^{(k)}(t)+b_nq_n^{(k)}(t)\right)h_n^{(k)}(t)dt-$$

$$-\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\int_{-T/2}^{T/2}V_n'\left(q_n^{(k)}(t)\right)h_n^{(k)}(t)dt.$$

Згідно означення $h^{(k)}$, при достатньо великому k сумування в правій частині останньої формули поширюється, фактично, на область $|n|\leq m$ і ми отримуємо

$$\sum_{|n|\leq m}\int_{-T/2}^{T/2}\dot{q}_n^{(k)}(t)\dot{h}_n(t)dt+\sum_{|n|\leq m}\int_{-T/2}^{T/2}(a_nq_{n+1}^{(k)}(t)+a_{n-1}q_{n-1}^{(k)}(t)+$$

$$+b_nq_n^{(k)}(t))h_n(t)dt-\sum_{|n|\leq m}\int_{-T/2}^{T/2}V_n'\left(q_n^{(k)}(t)\right)h_n(t)dt=0.$$

Оскільки $q_n\to q$ слабко в $H^1(-T/2,T/2)$ і сильно в $C(-T/2,T/2)$, то в останній рівності можна перейти до границі при $k\to\infty$. В результаті отримуємо

$$\sum_{|n|\leq m}\int_{-T/2}^{T/2}\dot{q}_n(t)\dot{h}_n(t)dt+\sum_{|n|\leq m}\int_{-T/2}^{T/2}(a_nq_{n+1}(t)+a_{n-1}q_{n-1}(t)+$$

$$+b_nq_n(t))h_n(t)dt-\sum_{|n|\leq m}\int_{-T/2}^{T/2}V_n'\left(q_n(t)\right)h_n(t)dt=0.$$

При зробленому виборі h це і є рівність (3.36). Таким чином, існування ненульового розв'язку доведено.

Залишається перевірити, що q не може бути константою, якщо T достатньо велике. Маємо

$$\Phi_k\left(q^{(k)}\right)=\Phi_k\left(q^{(k)}\right)-\frac{1}{2}\left\langle\Phi_k'\left(q^{(k)}\right),\,h^{(k)}\right\rangle=$$

$$=\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\frac{1}{2}V_n'\left(q_n^{(k)}(t)\right)q_n^{(k)}(t)-V_n\left(q_n^{(k)}(t)\right)\right\}dt.$$

Оскільки, згідно $\left(iii_2\right)$, всі доданки в правій частині невід'ємні, то для довільного фіксованого m і достатньо великого k

$$\Phi_k\left(q^{(k)}\right)\ge\sum_{|n|\le m}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\frac{1}{2}V_n'\left(q_n^{(k)}(t)\right)q_n^{(k)}(t)-V_n\left(q_n^{(k)}(t)\right)\right\}dt.$$

Згідно зауваження 3.3.2, звідси слідує, що

$$\sum_{|n|\le m}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\frac{1}{2}V_n'\left(q_n^{(k)}(t)\right)q_n^{(k)}(t)-V_n\left(q_n^{(k)}(t)\right)\right\}dt\le\eta m_0T<\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2T$$

при достатньо малому η і

$$T\ge T_0=\frac{2\pi}{\eta\sqrt{b_0}}$$

(див. доведення теореми 3.3.2). Оскільки для будь-якого n маємо $q_n^{(k)}\to q_n$ в $C\left(-T/2,T/2\right)$, то переходячи до границі, отримуємо

$$\sum_{|n|\le m}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\frac{1}{2}V_n'\left(q_n(t)\right)q_n(t)-V_n\left(q_n(t)\right)\right\}dt\le\eta m_0T<\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2T.$$

Тепер перейдемо до границі при $m\to\infty$. В результаті отримаємо

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\frac{1}{2}V_n'\left(q_n(t)\right)q_n(t)-V_n\left(q_n(t)\right)\right\}dt\le\eta m_0T<\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2T.$$

Оскільки $\Phi'(q)=0$, то ліва частина цієї нерівності рівна

$$\Phi(q) = \Phi(q) - \frac{1}{2}\langle \Phi'(q), q\rangle.$$

Таким чином,

$$\Phi(q) \le \eta m_0 T < \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0 \delta_0^2 T. \tag{3.37}$$

Згідно леми 3.2.1, для будь-якого ненульового постійного розв'язку відповідне критичне значення не менше правої частини (3.37). Звідси, як і в доведенні теореми 3.3.2, робимо висновок, що розв'язок q не може бути постійним при $T \ge T_0$. Теорему доведено. □

3.5. Метод умовної мінімізації

В цьому підрозділі показано, що для потенціалів спеціального виду T - періодичні розв'язки можуть бути побудовані за допомогою певної процедури умовної мінімізації.

Розглядаються потенціали виду

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2} r^2 + \frac{d_n}{p} |r|^p, \tag{3.38}$$

де $d_n > 0,\ p > 2$. Передбачається, що розглядуваний ланцюг просторово періодичний, тобто існує таке натуральне N, що $a_{n+N} = a_n,\ c_{n+N} = c_n$ і $d_{n+N} = d_n$. Як і раніше покладемо

$$b_n = c_n - a_n - a_{n-1}.$$

Тоді рівняння (2.1) прийме вигляд

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n - d_n |q_n|^{p-2} q_n,\ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{3.39}$$

Природнім конфігураційним простором даної системи, що враховує крайові умови (2.2), є простір l^2 двохсторонніх послідовностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Таким чином, система (2.3) може розглядатися як диференціальне рівняння в l^2 виду (3.1) з обмеженим самоспряженим лінійним оператором A і обмеженим неперервним нелінійним оператором

$$B(q)_n = d_n |q_n|^{p-2} q_n.$$

В подальшому використовуються також простори $l^p, 1 \le p \le \infty$, двохсторонніх послідовностей. Норма в l^p позначається $\|\cdot\|_{l^p}$. Через l_0 позначається простір фінітних послідовностей (рівних нулю всюди, за винятком скінченного числа номерів). Як звичайно, $supp(V) = \{k \in \mathbb{Z} : v_k \ne 0\}$.

Надалі передбачається, що виконується наступна умова додатності.

(P) *Оператор A додатно визначений, тобто існує таке $\alpha_0 > 0$, що*

$$(Aq, q) \ge \alpha_0 \|q\|^2.$$

Оскільки в даному випадку $V_n\left(r\right)=\frac{d_n}{p}\left|r\right|^p$, то неважко переконатись, що функція $V_n(r)$ задовольняє умовам $\left(ii_2\right)$ та $\left(iii_2\right)$.

Таким чином, умови $\left(i_2\right)-\left(iii_2\right)$ підрозділу 3.1 виконуються.

Надалі розв'язки задачі (2.1), (2.2) (або рівняння (3.39)) розуміються в слабкому смислі. А саме, функція $q(t)$ зі значенням в $l^2, t\in\left(a, b\right)$, називається розв'язком, якщо $q\in H^1\left(a, b; l^2\right)$ (тобто $q\in L^2\left(a, b; l^2\right)$) і має слабку похідну $\dot{q}\in L^2\left(a, b; l^2\right)$ та виконується інтегральна тотожність

$$\int_a^b\left[\left(\dot{q}, \dot{v}\right)+\left(Aq, v\right)-\left(B(q), v\right)\right]dt=0 \tag{3.40}$$

для будь-якої функції $v\in C_0^\infty\left(a, b; l^2\right)$, або еквівалентно, для будь-якої $v\in H_0^1\left(a, b; l^2\right)$, тобто $v\in H^1\left(a, b; l^2\right)$ і $v(a)=v(b)=0$. Нагадаємо, що будь-яка функція із $v\in H^1\left(a, b; l^2\right)$ абсолютно неперервна на $\left[a, b\right]$. Функція $q(t)$ є слабким розв'язком на $\mathbb{R}$, якщо вона є слабким розв'язком на будь-якому скінченому інтервалі. Як слідує із леми 3.1.5, слабкі розв'язки є розв'язками в класичному смислі.

Лема 3.1.4 показує, що критичні точки функціоналу Φ в просторі X_T є шуканими розв'язками. У випадку, що розглядається, функціонал Φ має вигляд

$$\Phi(u)=\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\frac{1}{2}\left\|\dot{u}(t)\right\|_{l^2}^2+\frac{1}{2}\left(Au(t), u(t)\right)-\frac{1}{p}\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_n\left|u_n(t)\right|^p\right\}dt. \tag{3.41}$$

Функціонал Φ неперервно диференційований за Фреше і

$$\left\langle\Phi'(u), v\right\rangle=\int_{-T/2}^{T/2}\left[\left(\dot{u}, \dot{v}\right)+\left(Au, v\right)-\left(B(u), v\right)\right]dt, \tag{3.42}$$

для будь-якого $v\in X_T$.

Тут ми використаємо інший підхід, що ґрунтується на наступній задачі мінімізації з обмеженнями. Розглянемо наступні два функціонали на X_T :

$$\Psi(u)=\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\|\dot{u}\|_{l^2}^2+\left(Au,\,u\right)\right]dt,$$

$$S(u)=\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}(\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_n\left|u_n(t)\right|^p)dt.$$

Відмітимо, що

$$\Phi(u)=\Psi(u)-S(u).$$

Для будь-якого $\theta>0$ розглянемо задачу мінімізації

$$I_\theta=\inf\left\{\Psi(v):v\in X_T,\,S(v)=\theta\right\}. \tag{3.43}$$

Далі буде показано, що ця задача має розв'язки для будь-якого $\theta>0$.

Припустимо, що для деякого $\theta>0$ задача (3.43) має розв'язок і нехай $u\in X_T$ – точка мінімуму. Оскільки функціонали Ψ та S неперервно диференційовні, то існує таке $\lambda\in\mathbb{R}$ (множник Лагранжа), що

$$\int_{-T/2}^{T/2}\left[\left(\dot{u},\,\dot{v}\right)+\left(Au,\,v\right)\right]dt=\lambda\int_{-T/2}^{T/2}(\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_n\left|u_n(t)\right|^{p-2}u_n(t)v_n(t))dt \tag{3.44}$$

для будь-якого $v\in X_T$. Підстановка $v=u$ показує, що $\lambda>0$, оскільки в цьому випадку обидва інтеграли в (3.44) додатні. Більше того, при $v=u$ ліва частина в (3.44) рівна $2I_\theta$, а інтеграл в правій частині рівний $p\theta$. Тому

$$\lambda=\frac{2I_\theta}{p\theta}. \tag{3.45}$$

Покладемо $q=\lambda^{\frac{1}{p-2}}u$. Тоді рівняння (3.44) зразу ж показує, що q – розв'язок задачі (2.1), (2.2). Звідси слідує

Теорема 3.5.1. *Нехай u – розв'язок задачі (3.43). Тоді $q=\lambda^{\frac{1}{p-2}}u$ є T-періодичним розв'язком задачі (2.1), (2.2) з потенціалом (3.38).*

Перейдемо до дослідження задачі (3.43).

Відмітимо спочатку, що $\Psi(sv)=s^2\Psi(v)$ та $S(sv)=s^pS(v)$ для будь-якого $s>0$. Звідси зразу ж випливає

Лема 3.5.1. *Задачі (3.43) при різних θ еквівалентні. При цьому*

$$I_\theta=\theta^{2/p}I_1. \tag{3.46}$$

Для подальшого нам знадобиться наступний дискретний варіант принципу концентрованої компактності (див. [61], а також [48] в неперервному випадку).

Лема 3.5.2. *Нехай $v^{(m)}=\left\{v_n^{(m)}\right\}$ така послідовність невід'ємних елементів в l^1, що $\left\|v^{(m)}\right\|_{l^1}=\theta>0$. Тоді існує така підпослідовність (як і раніше позначається $v^{(m)}$), що виконується одна із наступних трьох можливостей:*

(a_2) *(жорсткість) існує таке $n_m\in\mathbb{Z}$, що для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $r>0$, що*

$$\sum_{|n-n_m|\le r}v_n^{(m)}\ge\theta-\varepsilon;$$

(b_2) *(розпливання)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|v^{(m)}\right\|_{l^\infty}=0;$

(c_2) *(дихотомія) знайдеться $\alpha\in(0,\theta)$ з наступною властивістю:*

для будь-якого $\varepsilon>0$ існують такі невід'ємні послідовності $v^{(m,1)},v^{(m,2)}\in l_0$, що

$$\left\|v^{(m)}-\left(v^{(m,1)}+v^{(m,2)}\right)\right\|\le\varepsilon,$$

$$\left|\left\|v^{(m,1)}\right\|_{l^1}-\alpha\right|\le\varepsilon,$$

$$\left|\left\|v^{(m,2)}\right\|_{l^1}-(\theta-\alpha)\right|\le\varepsilon$$

для всіх достатньо великих m, і $dist\left[supp\left(v^{(m,1)}\right),supp\left(v^{(m,2)}\right)\right]\to\infty$ при $m\to\infty$.

Теорема 3.5.2. *В зроблених припущеннях для будь-якого $T>0$ задача (3.43) має розв'язок $u\in X_T$. Більше того, існує таке $T_0>0$, що $u\ne const$ при $T\ge T_0$.*

Доведення. Розглянемо довільну мінімізуючу послідовність $w^{(m)}$ задачі (3.43), $w^{(m)} \in X_T$, $S(w^{(m)}) = \theta$ і $\Psi(w^{(m)}) \to I_\theta$. Можна при цьому вважати, що $\Psi(w^{(m)}) \le 2I_\theta$. Згідно умови (P)

$$\Psi(u) \ge \frac{\beta_0}{2}\|u\|_T^2,$$

де $\beta_0 = \min\{1, \alpha_0\}$. Тому існує така константа $C > 0$, яка залежить тільки від константи α_0 із умови (P), що

$$\left\|w^{(m)}\right\|_T^2 \le CI_\theta. \tag{3.47}$$

Нехай $w^{(m)} = w^{(m)}(t) = \left\{w_n^{(m)}(t)\right\}$. Покладемо

$$v_n^{(m)} = \frac{1}{p}\int_{-T/2}^{T/2} d_n\left|w_n^{(m)}(t)\right|^p dt,$$

$$v^{(m)} = \left\{v_n^{(m)}\right\}.$$

Оскільки $H^1(-T/2, T/2)$ неперервно вкладений в $L^p(-T/2, T/2)$ (з константою, що не залежить від T), то із нерівності (3.47) випливає, що

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(v_n^{(m)}\right)^{2/p} \le C\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\|w_n^{(m)}\right\|_{L^p(-T/2,T/2)}^2 \le C\left\|w^{(m)}\right\|_T^2 \le CI_\theta. \tag{3.48}$$

Крім того,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n^{(m)} = \left\|v^{(m)}\right\|_{l^1} = \theta > 0. \tag{3.49}$$

До послідовності $v^{(m)}$ застосуємо лему 3.5.2. Після переходу до підпослідовності, для $v^{(m)}$ має виконуватися одне із тверджень $(a_2)-(c_2)$.

Твердження (b_2) не може виконуватися. Дійсно, якщо $\left\|v^{(m)}\right\|_{l^\infty} \to 0$, при $n \to \infty$, то із (3.48) слідує, що

$$\left\|v^{(m)}\right\|_{l^1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[v_n^{(m)}\right]^{1-2/p}\left[v_n^{(m)}\right]^{2/p} \le \sup_n\left[v_n^{(m)}\right]^{1-2/p}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[v_n^{(m)}\right]^{2/p} \le$$

$$\le \left[\left\|v^{(m)}\right\|_{l^\infty}\right]^{1-2/p} CI_\theta.$$

Таким чином, $\left\| v^{(m)} \right\|_{l^1} \to 0$, що протирічить (3.49).

Припустимо, що виконується умова (c_2). Визначимо $w^{(m,1)}, w^{(m,2)} \in X_T$ наступним чином. Нехай $u_n^{(m,i)} = w_n^{(m)}$ при $n \in supp\left(v^{(m,i)}\right)$ і $u_n^{(m,i)} = 0$ в протилежному випадку ($i = 1, 2$). Неважко бачити, що

$$S\left(u^{(m,i)}\right) = \sum_{n \in supp\left(v^{(m,i)}\right)} v_n^{(m)}$$

і, отже,

$$\lim_{m\to\infty} S\left(u^{(m,1)}\right) = \alpha, \quad \lim_{m\to\infty} S\left(u^{(m,2)}\right) = \theta - \alpha.$$

Покладемо

$$s_1^{(m)} = \left(\frac{\alpha}{S\left(u^{(m,1)}\right)} \right)^{1/p}, \quad s_2^{(m)} = \left(\frac{\theta - \alpha}{S\left(u^{(m,2)}\right)} \right)^{1/p}$$

і $w^{(m,i)} = s_i^{(m)} u^{(m,i)}$. Тоді із (c_2) випливає, що

$$\lim_{m\to\infty} \left\| w^{(m)} - \left(w^{(m,1)} + w^{(m,2)}\right) \right\|_T = 0.$$

Із останнього співвідношення випливає, що

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \Psi(w^{(m)}) - \Psi\left(w^{(m,1)} + w^{(m,2)}\right) \right\|_T = 0. \tag{3.50}$$

Оскільки носії $w^{(m,1)}$ і $w^{(m,2)}$ не перетинаються, то

$$\Psi\left(w^{(m,1)} + w^{(m,2)}\right) = \Psi\left(w^{(m,1)}\right) + \Psi\left(w^{(m,2)}\right) \ge I_\alpha + I_{\theta-\alpha}.$$

З іншої сторони, із (3.50) випливає, що

$$\lim_{m\to\infty} \Psi\left(w^{(m,1)} + w^{(m,2)}\right) = I_\theta.$$

Таким чином,

$$I_\theta \ge I_\alpha + I_{\theta-\alpha}.$$

Однак, $I_\theta = \theta^{2/p} I_1$ ($p > 2$) – строго увігнута функція, $\theta > 0$. Тому

$$I_\theta < I_\alpha + I_{\theta-\alpha}.$$

Отримане протиріччя показує, що твердження (c_2) не може мати місця.

Таким чином, для розглядуваної послідовності $v^{(m)}$ має місце (a_2) (жорсткість). Відмітимо, що згідно умов періодичності, $\Psi(\{u_{n+N}(t)\}) = \Psi(\{u_n(t)\})$ і $S(\{u_{n+N}(t)\}) = S(\{u_n(t)\})$. Тому, замінюючи $\{w_n^{(m)}(t)\}$ на $\{w_{n+b_m N}^{(m)}(t)\}$ з деяким $b_m \in \mathbb{Z}$, можна вважати, що в (a_2) $n_m = 0$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $r > 0$, що

$$\sum_{|n|>r} v_n^{(m)} \le \varepsilon.$$

Оскільки $d_n > 0$ – періодична послідовність, то остання нерівність означає, що для будь-якого ε знайдеться таке $C > 0$, що

$$\sum_{|n|>r} \int_{-T/2}^{T/2} \left| w_n^{(m)}(t) \right|^p dt \le C\varepsilon. \tag{3.51}$$

Згідно (3.47), послідовність $w^{(m)}$ обмежена в X_T. Переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $w^{(m)} \to u = \{u_n\}$ слабко в X_T. Оскільки X_T неперервно вкладений в $L^p(-T/2, T/2; l^p)$, то $w^{(m)} \to u$ слабко і в останньому просторі. Крім того, $H^1(-T/2, T/2)$ компактно вкладений в $L^p(-T/2, T/2)$. Тому, переходячи до підпослідовності, із використанням діагонального процесу, можна вважати, що $w_n^{(m)} \to u_n$ сильно в $L^p(-T/2, T/2)$ для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$. Крім того, із рівності $S(w^{(m)}) = \theta$ випливає, що $w^{(m)}$ обмежена послідовність в $L^p(-T/2, T/2; l^p)$. Разом зі збіжністю $w_n^{(m)} \to u_n$ і (3.51) це дає сильну збіжність $w^{(m)} \to u$ в $L^p(-T/2, T/2; l^p)$. Разом з неперервністю S на $L^p(-T/2, T/2; l^p)$ це показує, що $S(u) = \theta$. Оскільки Ψ – неперервний квадратичний додатно визначений функціонал, то він слабко напівнеперервний знизу. Звідси випливає, що

$$I_\theta \le \Psi(u) \le \lim_{m\to\infty} \Psi(w^{(m)}) = I_\theta.$$

Отже, $\Psi(u)=I_\theta$ і u – розв'язок задачі (3.43).

Доведемо останнє твердження теореми. Припустимо, що $u=\{u_n\}$ – сталий розв'язок задачі (3.43). Тоді

$$0<\theta=S(u)=\frac{1}{p}\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_n\left|u_n\right|^p T.$$

Звідси $\theta\le C\|u\|_{l^p}^p T$ або $\|u\|_{l^p}\ge C_0\theta/T^{1/p}$. Тоді

$$\Psi(u)=\frac{1}{2}\left(Au,u\right)T\ge\frac{\alpha_0}{2}\|u\|_{l^2}^2 T\ge\frac{\alpha_0\left(C_0\theta\right)^2}{2}T^{1-2/p}. \tag{3.52}$$

З іншої сторони, нехай $v=\{v_n\}$ таке, що $v_n\equiv 0$ при $n\ne 0$, $v_0(t)=\lambda\sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)$ при $0\le t\le\eta T$, $v_0(t)=0$ при $\eta T<t<T$ і v_0 продовжена на всю вісь як T-періодична функція ($0<\eta<1$). Константу λ виберемо із умови $S(v)=\theta$. Маємо

$$S(v)=\alpha_0\int_0^T\left|\lambda\sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)\right|^p dt=\alpha_0\left(\eta T\right)\lambda^p A_p,$$

де $A_p=\int_0^1\left|\sin 2\pi t\right|^p dt$. Звідси

$$\lambda=\left(\alpha_0\eta T A_p\right)^{-1/p}.$$

Далі

$$2\Psi(v)=\lambda^2\int_0^{\eta T}\left[\left(\frac{2\pi}{\eta T}\cos^2\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)\right)^2+b_0\sin^2\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)\right]dt=$$

$$=\lambda^2 A_2\left(\frac{4\pi^2}{\eta T}+b_0\eta T\right)=A_2\left(d_0A_p\eta T\right)^{-2/p}\left(\frac{4\pi^2}{\eta T}+b_0\eta T\right)=$$

$$=A_2\left(d_0A_p\right)^{-2/p}\left(\eta T\right)^{1-2/p}\left(4\pi^2\left(\eta T\right)^{-2}+b_0\right).$$

Відмітимо, що згідно умови (P), $b_0\ge\alpha_0>0$. Виберемо $\eta\in(0,1)$ таким чином, що

$$A_2 b_0 \left(d_0 A_p\right)^{-2/p} \eta^{1-2/p} < \alpha_0 \left(C_0 \theta\right)^2 .$$

Пряме обчислення з урахуванням (3.52) показує, що при достатньо великих T: $\Psi(v) < \Psi(u)$. Отже, u не може бути розв’язком задачі (3.43). Теорему доведено. □

Відмітимо, що аналог теореми 3.5.2 має місце також у випадку просторово періодичних крайових умов. Доведення в цьому випадку простіше. На просторі $X_{T,k}$ розглянемо функціонали

$$\Psi_k(u) = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \|\dot{u}\|_{l_k^2}^2 + \left(A_k u, u\right) \right\} dt,$$

$$S_k(u) = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} d_n \left|u_n(t)\right| \right) dt.$$

Тоді

$$\Phi_k(u) = \Psi_k(u) - S_k(u).$$

Для $\theta > 0$ розглянемо задачу мінімізації (аналог (3.43)).

$$I_{k,\theta} = \inf\left\{\Psi_k(v) : v \in X_{T,k},\, S_k(v) = \theta\right\}. \qquad (3.53)$$

Як і вище,

$$I_{k,\theta} = \theta^{2/p} I_{1,k}.$$

Більше того, якщо $u \in X_{T,k}$ – розв’язок (3.53), то функція $q^{(k)} = \lambda_k^{\frac{1}{p-2}} u$, де

$$\lambda_k = \frac{2 I_{k,\theta}}{p\theta},$$

є T-періодичним розв’язком рівняння (3.39) з крайовими умовами

$$q_{n+kN} = q_n.$$

Теорема 3.5.3. *В зроблених припущеннях для будь-яких натурального* k *і* $T > 0$ *задача (3.53) має розв’язок. Більше того, існує таке* $T_0 > 0$*, яке не залежить від* k*, що при* $T \ge T_0$ *цей розв’язок несталий.*

Доведення. Нехай $w^{(m)} \in X_{T,k}$ – мінімізуюча послідовність задачі (3.53). Як і в доведенні теореми 3.5.2, отримуємо, що $w^{(m)}$ обмежена в просторі $X_{T,k}$. Переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $w^{(m)} \to u$ слабко в $X_{T,k}$ для деякого $u \in X_{T,k}$.

Згідно компактності вкладення

$$X_{T,k} \subset C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}; l_k^2\right),$$

$u^{(m)} \to u$ сильно в останньому просторі. Звідси слідує, що

$$S_k(u) = \lim_{m\to\infty} S_k\left(w^{(m)}\right) = \theta.$$

Оскільки функціонал Ψ_k слабко напівнеперервний знизу на $X_{T,k}$, то

$$I_{k,\theta} \le \Psi_k(u) \le \lim_{m\to\infty} \Psi_k\left(u^{(m)}\right) = I_{k,\theta}.$$

Таким чином, u – розв’язок задачі (3.53) і теорему доведено. □

Використовуючи теорему 3.5.3, можна дати інше доведення теореми 3.5.2, що ґрунтується на граничному переході при $n \to \infty$. Це доведення не простіше поданого вище і тому не наводиться.

3.6. Приклад

Розглянемо рівняння

$$\ddot{q}_n = a\Delta q_n + cq_n - V'(q_n), \tag{3.54}$$

з крайовими умовами на нескінченності

$$\lim_{n\to\pm\infty} q_n = 0. \tag{3.55}$$

Тут $a \neq 0$, Δ – одновимірний дискретний оператор Лапласа

$$\Delta q_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n,$$

потенціал $V(r)$ задовольняє умові (iii_2) підрозділу 3.1. Наприклад, в якості V можна взяти функцію

$$V(r) = \frac{1}{p} d\left|r\right|^p$$

з $d > 0$ і $p > 2$. Тоді

$$V'(r) = d\left|r\right|^{p-2} r.$$

Для оператора Δ маємо ([69])

$$-4\|q\|^2 \leq \left(\Delta q,\, q\right) \leq 0.$$

Отже, для оператора $A = a\Delta + c$ отримуємо

$$\left(Aq,\, q\right) \geq (-4a + c)\|q\|^2$$

при $a > 0$ та

$$\left(Aq,\, q\right) \geq c\|q\|^2$$

при $a < 0$. Таким чином, оператор A додатно визначений, якщо або

$$0 < a < \frac{c}{4}, \tag{3.56}$$

або

$$a < 0,\ c > 0. \tag{3.57}$$

В обох випадках теорема 3.4.1 показує, що для будь-якого достатньо великого $T > 0$ існує несталий T-періодичний розв'язок рівняння (3.54), що задовольняє крайовим умовам (3.55).

Задача такого типу з $a > 0$ розглядалась в [49]. При певних умовах на V (які виконуються, якщо виконується умова (iii_2)), показано, що для достатньо малих $a > 0$ задача (3.54), (3.55) має несталий T-періодичний розв'язок для *деяких* значень $T > 0$. Наведений вище результат є значно більш точним. По-перше, умова (3.56) дає конкретну умову малості параметру a. По-друге, отримано розв'язки для всіх достатньо великих значень періоду T. Крім того, теорема 3.4.1 відноситься до набагато більш загального рівняння, ніж в [49], оскільки коефіцієнти рівняння (2.1) та потенціал можуть залежати від n періодично.

Висновки до розділу 3

Третій розділ дисертації присвячений періодичним за часом розв'язкам для нескінченних ланцюгів нелінійних осциляторів. Він складається з шести підрозділів. В першому підрозділі наводиться варіаційне формулювання задачі для скінченного та нескінченного ланцюгів. Основними умовами в даному розділі є просторова періодичність ланцюга осциляторів з періодом N та додатність оператора лінійної взаємодії осциляторів. Розглядаються деякі функціонали Φ_k та Φ, критичні точки яких є T-періодичними розв'язками відповідних задач.

Другий підрозділ містить деякі допоміжні відомості про стаціонарні розв'язки, тобто про розв'язки, що не залежать від часу.

В третьому підрозділі доводиться існування T-періодичних розв'язків, що задовольняють умову просторової періодичності (випадок функціоналу Φ_k). Для цього використано теорему про гірський перевал, важливою умовою в якій є так звана умова Пале-Смейла, яку задовольняє функціонал

Φ_k. Дана задача використовується як допоміжна для отримання періодичних розв'язків вихідної задачі (випадок функціоналу Φ).

В четвертому підрозділі отримано результати про існування T-періодичних розв'язків для достатньо великих T. Зауважимо, що функціонал Φ не задовольняє умову Пале–Смейла, тому теорему про гірський перевал використати не можна. В даному випадку розв'язки шукаються як границя критичних точок функціоналу Φ_k. Цей метод відомий як метод періодичних апроксимацій. У випадку степеневої потенціальної функції для отримання періодичних розв'язків використано метод умовної мінімізації (п'ятий підрозділ).

В останньому підрозділі встановлені вище результати застосовуються до рівняння

$$\ddot{q} = a\Delta q_n + cq_n - d\left|q_n\right|^{p-2} q_n.$$

Отримані результати значно узагальнюють відомі результати для просторово однорідних ланцюгів. Більше того, навіть в останньому випадку результати дисертації є більш сильними.

Результати даного розділу опубліковано в роботах [3], [4], [9].

РОЗДІЛ 4
БІЖУЧІ ХВИЛІ В ЛАНЦЮГАХ ОСЦИЛЯТОРІВ

4.1. Формулювання задачі про біжучі хвилі

В даному розділі вивчаються біжучі хвилі в однорідних за просторовою змінною $n \in \mathbb{Z}$ ланцюгах. В цьому випадку в рівняннях руху (2.1)

$$a_n \equiv a,$$

$$U_n(r) = U(r) = -\frac{c_0}{2} r^2 + V(r)$$

і рівняння набуде вигляду

$$\ddot{q}_n = a\Delta_d q_n + c_0 q_n - V'(q_n), \tag{4.1}$$

де

$$\left(\Delta_d q\right)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n,$$

Δ_d – одновимірний дискретний оператор Лапласа.

Біжучою хвилею називається розв’язок виду

$$q_n(t) = u(n - ct), \tag{4.2}$$

де $u(s)$ – функція неперервного аргументу $s \in \mathbb{R}$. Функція $u(s)$ називається профілем хвилі. Константа $c \neq 0$ представляє собою швидкість хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля переміщається вправо, а якщо $c < 0$, то вліво. Інтерес представляють нетривіальні хвилі з профілем u тотожно не рівним нулю.

В даному розділі розглядаються біжучі хвилі двох типів: періодичні та відокремлені. Для періодичної хвилі профіль $u(s)$ є періодичною функцією від $s \in \mathbb{R}$. Надалі період позначається через $2k$, $k > 0$ – дійсне число. Профіль відокремленої хвилі перетворюється в нуль на нескінченності. Відмітимо, що для періодичного профілю $u(s)$ сам розв’язок $q_n(t)$, заданий формулою (4.2), є $\dfrac{2k}{c}$-періодичною функцією від t. Однак, за індексом $n \in \mathbb{Z}$ розв’язок $q_n(t)$ є лише майже періодичною функцією. Періодичність по n виникає тільки у випадку раціонального k.

Підстановка розв’язку виду (4.2) в рівняння (4.1) дає для профілю $u(s)$ рівняння

$$c^2 u''(s) = a\big(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)\big) + c_0 u(s) - V'\big(u(s)\big). \qquad (4.3)$$

Це диференціальне рівняння зі зміщенням як назад, так і вперед. Однак, як буде видно далі, воно має варіаційну структуру.

У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі достатньо знайти розв’язок рівняння (4.3) з умовою періодичності

$$u(s+2k) = u(s), \quad s \in \mathbb{R}. \qquad (4.4)$$

Профіль відокремленої хвилі є розв’язком рівняння (4.3) з крайовою умовою на нескінченності

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \qquad (4.5)$$

В обох випадках розв’язок може бути знайденим варіаційним методом, за допомогою теореми про гірський перевал. Всюди далі під розв’язком рівняння (4.3) розуміється функція $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (4.3) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Також всюди далі припускається, що потенціал задовольняє умови (ii_2), (iii_2) з підрозділу 3.1, які в нашому випадку приймають вигляд:

(h) *функція* $V(r)$ *неперервно диференційовна,* $V(0) = V'(0) = 0$ *і* $V'(r) = o(r)$, *при* $r \to 0$, *та існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu V(r) \le V'(r) r, \quad r \ne 0.$$

Відмітимо, що в рівнянні (4.3) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси слідує, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівнянню (4.3), то існують дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$. Одна з них рухається вправо, інша – вліво.

4.2. Варіаційне формулювання задачі

З рівнянням (4.3), в залежності від крайових умов (4.4) або (4.5), пов'язуються два функціонали J_k та J відповідно. Ці функціонали визначені на просторах E_k та E, де

$$E_k = \left\{ u \in H^1_{loc}\left(\mathbb{R}\right) : u(s+2k) = u(s) \right\},$$

$$E = H^1\left(\mathbb{R}\right).$$

Норми на цих просторах задаються рівностями

$$\|u\|_k = \left(\|u\|^2_{L^2(-k,k)} + \|u'\|^2_{L^2(-k,k)} \right)^{1/2} = \left(\int_{-k}^{k} \left(\left(u(s)\right)^2 + \left(u'(s)\right)^2 \right) ds \right)^{1/2},$$

$$\|u\| = \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(u(s)\right)^2 + \left(u'(s)\right)^2 \right) ds \right)^{1/2}$$

відповідно.

Відмітимо, що граничні умови (4.4) і (4.5) включено в означення просторів E_k і E відповідно. Це очевидно у випадку простору E_k, який можна розглядати як замкнутий підпростір в $H^1\left(-k,k\right)$. У випадку E, теорема вкладення показує, що $E \subset C\left(\mathbb{R}\right)$ і для будь-якого $u \in E$ маємо $\lim\limits_{s\to\infty} u(s) = 0$ ([16]).

Функціонали J_k та J на просторах E_k та E визначаються формулами

$$J_k(u) = \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}\left(u'(s)\right)^2 - \frac{a}{2}\left(u(s+1)-u(s)\right)^2 + \frac{c_0}{2}\left(u(s)\right)^2 - V\left(u(s)\right) \right\} ds \quad (4.6)$$

і

$$J(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{c^2}{2}\left(u'(s)\right)^2 - \frac{a}{2}\left(u(s+1)-u(s)\right)^2 + \frac{c_0}{2}\left(u(s)\right)^2 - V\left(u(s)\right) \right\} ds. \quad (4.7)$$

Лема 4.2.1. *В зроблених припущеннях J_k та J – функціонали класу C^1 на E_k та E відповідно. Їх похідні виражаються формулами*

$$\left\langle J_k'(u),\, h\right\rangle = \int\limits_{-k}^{k} \left\{c^2 u'(s)h'(s) + a(u(s+1) + \right.$$

$$\left. + u(s-1) - 2u(s))h(s) + c_0 u(s)h(s) - V'\big(u(s)\big)h(s)\right\} ds \qquad (4.8)$$

і

$$\left\langle J'(u),\, h\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{c^2 u'(s)h'(s) + a(u(s+1) + \right.$$

$$\left. + u(s-1) - 2u(s))h(s) + c_0 u(s)h(s) - V'\big(u(s)\big)h(s)\right\} ds \qquad (4.9)$$

для $u,\, h \in E_k$ *та* $u,\, h \in E$ *відповідно.*

Доведення. Функціонал J_k має вигляд

$$J_k(u) = c^2 Q_k^{(1)}(u) - aQ_k^{(2)}(u) + c_0 Q_k^{(3)} - \Psi_k(u),$$

де

$$Q_k^{(1)}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} \big(u'(s)\big)^2\, ds = \frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2(-k,k)},$$

$$Q_k^{(2)}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} \big(u(s+1) - u(s)\big)^2\, ds,$$

$$Q_k^{(3)}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} \big(u(s)\big)^2\, ds = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(-k,k)},$$

$$\Psi_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} V\big(u(s)\big) ds.$$

Легко бачити, що $Q_k^{(i)},\, i = 1,\, 2,\, 3$ – неперервні квадратичні функціонали на просторі E_k і, відповідно, належать класу C^1. При цьому для похідних маємо

$$\left\langle Q_k^{(1)\prime}(u),\, h\right\rangle = \int\limits_{-k}^{k} u'(s)h'(s)ds,$$

$$\left\langle Q_k^{(2)\prime}(u),\, h\right\rangle = \int\limits_{-k}^{k} (u(s+1) - u(s))(h(s+1) - h(s))ds,$$

$$\left\langle Q_k^{(3)\prime}(u),\, h\right\rangle = \int_{-k}^{k} u(s)h(s)ds.$$

Далі,

$$\left\langle Q_k^{(2)\prime}(u),\, h\right\rangle = \int_{-k}^{k} u(s+1)h(s+1)ds + \int_{-k}^{k} u(s)h(s)ds -$$

$$-\int_{-k}^{k} u(s)h(s+1)ds - \int_{-k}^{k} u(s+1)h(s)ds =$$

$$= 2\int_{-k}^{k} u(s)h(s)ds - \int_{-k}^{k} u(s+1)h(s)ds - \int_{-k}^{k} u(s-1)h(s)ds.$$

Тут остання рівність отримується за допомогою $2k$-періодичності і заміни $\tau = s+1$ в першому та третьому інтегралах.

Знайдемо тепер похідну Гато функціоналу Ψ_k. Нехай $u,\, h \in E_k$. Згідно формули Лагранжа для будь-якого $s \in [-k,\, k]$ існує таке $\theta = \theta(s)$, що

$$\frac{1}{\lambda}\left(\Psi_k(u+\lambda h) - \Psi_k(u)\right) = \int_{-k}^{k} V'\left(u(s) + \lambda\theta h(s)\right)h(s)ds =$$

$$= \int_{-k}^{k} V'\left(u(s)\right)h(s)ds + \int_{-k}^{k} \left\{V'\left(u(s)+\lambda\theta h(s)\right) - V'\left(u(s)\right)\right\}h(s)ds.$$

Покажемо, що тут останній інтеграл прямує до нуля при $\lambda \to 0$. Згідно теореми вкладення, $u,\, h \in C\left([-k,\, k]\right)$, причому існує таке $R > 0$, що при $|\lambda| \le 1$ маємо

$$\|u\|_{C([-k,\, k])} \le R$$

і

$$\|u + \lambda\theta h\|_{C([-k,\, k])} \le R.$$

Оскільки функція $V'(r)$ неперервна і, отже, рівномірно неперервна на $[-R,\, R]$, а $\lambda\theta h \to 0$ рівномірно на $[-k,\, k]$, то

$$V'\left(u(s) + \lambda\theta h(s)\right) - V'\left(u(s)\right) \to 0$$

рівномірно на $[-k,\, k]$. Звідси випливає, що

$$\int_{-k}^{k}\left\{V'\big(u(s)+\lambda\theta h(s)\big)-V'\big(u(s)\big)\right\}ds\to 0$$

при $\lambda\to 0$. Таким чином,

$$\left\langle \Psi'_k(u),\, h\right\rangle=\int_{-k}^{k}V'\big(u(s)\big)h(s)ds.$$

Доведемо тепер, що $\Psi'_k(u)$ неперервно залежить від $u\in E_k$. Нехай $u_n\to u$ в E_k. Достатньо показати, що

$$\varepsilon_n=\sup_{h\in E_k,\ \|h\|_k\le 1}\left|\left\langle \Psi'_k(u)-\Psi'_k(u_n),\, h\right\rangle\right|\to 0.$$

Маємо,

$$\left|\left\langle \Psi'_k(u)-\Psi'_k(u_n),\, h\right\rangle\right|\le\int_{-k}^{k}\left|V'\big(u(s)\big)-V'\big(u_n(s)\big)\right|\cdot\left|h(s)\right|ds\le$$

$$\le\left\{\int_{-k}^{k}\left|V'\big(u(s)\big)-V'\big(u_n(s)\big)\right|^2ds\right\}^{1/2}\left\{\int_{-k}^{k}\left|h(s)\right|^2ds\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\int_{-k}^{k}\left|V'\big(u(s)\big)-V'\big(u_n(s)\big)\right|^2ds\right\}^{1/2}\|h\|_{L^2(-k,\,k)}\le$$

$$\le\left\{\int_{-k}^{k}\left|V'\big(u(s)\big)-V'\big(u_n(s)\big)\right|^2ds\right\}^{1/2}\|h\|_k\le\left\{\int_{-k}^{k}\left|V'\big(u(s)\big)-V'\big(u_n(s)\big)\right|^2ds\right\}^{1/2}.$$

Отже,

$$\varepsilon_n\le\left\{\int_{-k}^{k}\left|V'\big(u(s)\big)-V'\big(u_n(s)\big)\right|^2ds\right\}^{1/2}. \tag{4.10}$$

За теоремою вкладення, $u_n\to u$ в $C\big([-k,\,k]\big)$. Крім того, для деякого $R>0,\ |u(s)|\le R$ і $|u_n(s)|\le R$ при всіх $s\in[-k,\,k]$. Оскільки $V'(r)$ рівномірно неперервна на $[-R,\,R]$, то

$$\left|V'\big(u(s)\big)-V'\big(u_n(s)\big)\right|\to 0$$

рівномірно на відрізку $[-k, k]$. Звідси випливає, що інтеграл в правій частині (4.10) прямує до нуля і, отже, $\varepsilon_n \to 0$. Із попереднього негайно слідує твердження леми для функціоналу J_k.

Розглянемо тепер функціонал J. Його квадратичні члени вивчаються аналогічно до попереднього. Залишається дослідити функціонал

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} V\big(u(s)\big)ds.$$

Нехай $u, h \in E$. Як і вище, формула Лагранжа дає (з деяким $\theta = \theta(s, n) \in (0, 1)$)

$$\frac{1}{\lambda_n}\big(\Psi(u + \lambda_n h) - \Psi(u)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} V'\big(u(s) + \lambda_n \theta h(s)\big)h(s)ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} V'\big(u(s)\big)h(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} \big\{V'\big(u(s) + \lambda_n \theta h(s)\big) - V'\big(u(s)\big)\big\}h(s)ds$$

і потрібно довести, що останній інтеграл в правій частині прямує до нуля при $\lambda_n \to 0$. Запишемо його у вигляді

$$I = \int_{-N}^{N} \big\{V'\big(u(s) + \lambda_n \theta h(s)\big) - V'\big(u(s)\big)\big\}h(s)ds +$$

$$+ \int_{|s|>N} V'\big(u(s) + \lambda_n \theta h(s)\big)h(s)ds -$$

$$- \int_{|s|>N} V'\big(u(s)\big)h(s)ds = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оскільки $\lambda_n \to 0$ і $\theta \in (0, 1)$, то існує така константа $R > 0$, що

$$|u(s)| \le R$$

і

$$|u(s) + \lambda_n \theta h(s)| \le R$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$. Згідно умови (h), існує таке $C > 0$, що

$$|V'(r)| \le C|r|$$

при $|r| \le R$. Тому

$$|I_2| \le \int\limits_{|s|>N} |u(s) + \lambda_n \theta h(s)| \cdot |h(s)| ds \le$$

$$\le C \left\{ \int\limits_{|s|>N} |u(s) + \lambda_n \theta h(s)|^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{|s|>N} |h(s)|^2 ds \right\}^{1/2} \le$$

$$\le C \|h\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\{ \int\limits_{|s|>N} |u(s) + \lambda_n \theta h(s)|^2 ds \right\}^{1/2} \le$$

$$\le C_1 \left\{ \int\limits_{|s|>N} |u(s) + \lambda_n \theta h(s)|^2 ds \right\}^{1/2},$$

де $C_1 = C \cdot \|h\|$. Отже,

$$|I_2| \le C_1 \left\{ \int\limits_{|s|>N} |u(s) + \lambda_n \theta h(s)|^2 ds \right\}^{1/2}. \qquad (4.11)$$

Аналогічно

$$|I_3| \le C_1 \left\{ \int\limits_{|s|>N} |u(s)|^2 ds \right\}^{1/2}. \qquad (4.12)$$

Нехай тепер $\varepsilon > 0$. Оскільки $u \in E \subset L^2(\mathbb{R})$, то існує таке $N > 0$, що

$$\int\limits_{|s|>N} |u(s)|^2 ds \le \varepsilon^2. \qquad (4.13)$$

Крім того, оскільки $\lambda_n \to 0$ і $\theta \in (0,1)$, то $\lambda_n \theta h \to 0$ в $L^2(\mathbb{R})$ (але, взагалі кажучи, θh не належить E). Тому множина функцій $\{u + \lambda_n \theta h\}$ відносно компактна в $L^2(\mathbb{R})$. Звідси слідує, що існує таке $N > 0$, що виконується як нерівність (4.13), так і нерівність

$$\int\limits_{|s|>N} |u(s) + \lambda_n \theta h(s)|^2 ds \le \varepsilon^2 \qquad (4.14)$$

для всіх n. Зафіксувавши таке $N>0$, можна, як і в першій частині доведення, показати, що

$$|I_1| \le \varepsilon$$

для всіх достатньо великих n. Таким чином, похідна Гато $\Psi'(u)$ існує і задається формулою

$$\left\langle \Psi'(u), h \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V'\big(u(s)\big) h(s) ds$$

для будь-якого $h \in E$.

Залишається перевірити неперервність $\Psi'(u)$. Нехай $u_n \to u$ в E. Потрібно показати, що

$$\varepsilon_n = \sup_{h\in E,\ \|h\|\le 1} \left| \left\langle \Psi'(u) - \Psi'(u_n), h \right\rangle \right| \to 0.$$

Маємо, як і у випадку Ψ_k,

$$\left| \left\langle \Psi'(u) - \Psi'(u_n), h \right\rangle \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| V'\big(u(s)\big) - V'\big(u_n(s)\big) \right| \cdot |h(s)| ds \le$$

$$\le \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| V'\big(u(s)\big) - V'\big(u_n(s)\big) \right|^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |h(s)|^2 ds \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| V'\big(u(s)\big) - V'\big(u_n(s)\big) \right|^2 ds \right\}^{1/2} = I^{1/2}$$

і достатньо довести, що $I \to 0$. Інтеграл I представляється у вигляді

$$I = \int_{-N}^{N} \left| V'\big(u(s)\big) - V'\big(u_n(s)\big) \right|^2 ds +$$

$$+ \int_{|s|>N} \left| V'\big(u(s)\big) - V'\big(u_n(s)\big) \right|^2 = I_1 + I_2.$$

Далі, згідно нерівності трикутника,

$$I_2^{1/2} \le \left\{ \int_{|s|>N} \left| V'\big(u(s)\big) \right|^2 \right\}^{1/2} +$$

$$+\left\{ \int\limits_{|s|>N} \left|V'\left(u_n(s)\right)\right|^2 \right\}^{1/2} = I_3^{1/2} + I_4^{1/2}.$$

Як і при доведенні існування Ψ', для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вибрати таке $N > 0$, що $I_3 \le \varepsilon$ і $I_4 \le \varepsilon$. Тоді $I_2 \le 4\varepsilon$. Далі, зафіксувавши таке N, отримуємо, що $I_1 \le \varepsilon$ для всіх достатньо великих n. Таким чином, для всіх достатньо великих n маємо

$$I \le 5\varepsilon,$$

і, отже, $I \to 0$ при $n \to \infty$. Лему доведено. □

Лема 4.2.2. *Критичні точки функціоналів J_k і J є C^2-розв'язками рівняння (4.3), що задовольняють умови (4.4) і (4.5) відповідно.*

Доведення. Розглянемо випадок функціоналу J (інший випадок аналогічний). Оскільки будь-який елемент $u \in E$ задовольняє умови (4.5), то достатньо тільки перевірити, що критичні точки J є C^2-розв'язками (4.3).

Нехай $u \in E$ – критична точка функціоналу J. Тоді $\left\langle J'(u), h \right\rangle = 0$ для будь-якого $h \in E$. Виберемо тут $h = \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ довільно і використаємо формулу (4.9). Маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ c^2 u'(s)\varphi'(s) + a\left(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)\right)\varphi(s) + \right.$$

$$\left. + c_0 u(s)\varphi(s) - V'\left(u(s)\right)\varphi(s) \right\} ds = 0.$$

Це означає, що u задовольняє рівняння (4.3) в смислі узагальнених функцій. Але тоді, також в смислі узагальнених функцій

$$c^2 u''(s) = V'\left(u(s) - c_0 u(s) - a\left(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)\right)\right). \qquad (4.15)$$

Згідно теореми вкладення, $u \in C(\mathbb{R})$. Отже, права частина (4.15) – неперервна функція. Звідси робимо висновок, що u – неперервна функція і, отже, $u \in C^2$ – розв'язок рівняння (4.3) в звичайному смислі. Лему доведено. □

4.3. Попередні леми

Лема 4.3.1. *Мають місце наступні нерівності*

$$\int_{-k}^{k} |u(s+1)-u(s)|^2\,ds \le \int_{-k}^{k} |u'(s)|^2\,ds, \;\; u \in E_k, \tag{4.16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(s+1)-u(s)|^2\,ds \le \int_{-\infty}^{\infty} |u'(s)|^2\,ds, \;\; u \in E. \tag{4.17}$$

Доведення. Згідно представлення

$$u(s+1)-u(s) = \int_{s}^{s+1} u'(\tau)d\tau$$

та нерівності Шварца отримуємо

$$|u(s+1)-u(s)|^2 = \left|\int_{s}^{s+1} u'(\tau)d\tau\right|^2 \le \left\{\int_{s}^{s+1} |u'(\tau)|d\tau\right\}^2 \le$$

$$\le \int_{s}^{s+1} |u'(\tau)|^2\,d\tau.$$

Інтегрування приводить до нерівності

$$\int_{-k}^{k} |u(s+1)-u(s)|^2\,ds \le \int_{-k}^{k}\int_{s}^{s+1} |u'(\tau)|^2\,d\tau ds = \iint_{D} |u'(\tau)|^2\,d\tau ds,$$

де

$$D = \{(s,\tau): -k \le s \le k,\; s \le \tau \le s+1\}.$$

Використовуючи періодичність $u'(\tau)$, неважко бачити, що подвійний інтеграл в правій частині співпадає з інтегралом

$$\iint_{D_1} |u'(\tau)|^2\,d\tau ds,$$

де

$$D_1 = \{(s,\tau):\; -k \le \tau \le k,\;\; \tau-1 \le s \le \tau\}.$$

Переходячи в останньому інтегралі до повторного, отримуємо

$$\int_{-k}^{k} |u(s+1)-u(s)|^2\,ds \le \int_{-k}^{k}\int_{\tau-1}^{\tau} |u'(\tau)|^2\,ds d\tau = \int_{-k}^{k} |u'(\tau)|^2\,d\tau$$

і нерівність (4.16) доведено.

Нерівність (4.17) доводиться аналогічно і, навіть, дещо простіше. Лему доведено. □

Лема 4.3.2. *Нехай виконується умова* (h), $c_0 > 0$ *і* $c^2 > \max\{0, a\}$. *Тоді існують такі* $\varepsilon > 0$ *і* $\gamma > 0$, *що не залежать від* $k \geq 1$, *що для нетривіальних критичних точок функціоналів* J_k *та* J *мають місце нерівності*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq \gamma J_k(u), \tag{4.18}$$

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|^2 \leq \gamma J(u). \tag{4.19}$$

Доведення. Нехай $u \in E_k$ – критична точка функціоналу J_k. Тоді $J_k'(u) = 0$ і

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u), u\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int_{-k}^{k}\left\{c^2|u'(s)|^2 - a|u(s+1) - u(s)|^2 + c_0|u(s)|^2\right\}ds -$$

$$-\int_{-k}^{k}\left\{V\big(u(s)\big) - \frac{1}{\mu}V'\big(u(s)\big)u(s)\right\}ds \geq$$

$$\geq \frac{\mu-2}{2\mu}\left\{c^2\int_{-k}^{k}|u'(s)|^2\,ds - a\int_{-k}^{k}|u(s+1) - u(s)|^2\,ds + c_0\int_{-k}^{k}|u(s)|^2\,ds\right\}.$$

Якщо $a \leq 0$, то другий інтеграл в правій частині можна відкинути зі збереженням нерівності. Якщо ж $a > 0$, то використаємо лему 4.3.1. В результаті отримуємо, що

$$J_k(u) \geq \frac{\mu-2}{2\mu}\left\{\alpha_0\int_{-k}^{k}|u'(s)|^2\,ds + c_0\int_{-k}^{k}|u(s)|^2\,ds\right\},$$

де $\alpha_0 = c^2$ при $a \leq 0$ та $\alpha_0 = c^2 - a$ при $a > 0$. Тоді

$$J_k(u) \geq \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\left\{\int_{-k}^{k}|u'(s)|^2\,ds + \int_{-k}^{k}|u(s)|^2\,ds\right\} = \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\|u\|_k^2,$$

де $\alpha_1 = \min\{\alpha_0, c_0\}$. Звідси випливає друга нерівність (4.18).

Доведемо першу із нерівностей (4.18). Для критичної точки $u \in E_k$ маємо $\langle J_k'(u), u \rangle = 0$, тобто

$$\int_{-k}^{k} \left\{ c^2 |u'(s)|^2 - a|u(s+1) - u(s)|^2 + c_0 |u(s)|^2 \right\} ds = \int_{-k}^{k} V'(u(s)) ds.$$

Звідси, як і вище, маємо

$$\alpha_1 \|u\|_k^2 \le \int_{-k}^{k} V'(u(s)) u(s) ds. \tag{4.20}$$

Згідно леми 3.1.2,

$$V'(r) r \le \sigma(|r|) r^2,$$

де $\sigma(r)$ – монотонно зростаюча неперервна функція від $r \ge 0$ і $\sigma(0) = 0$. Тоді із (4.20) випливає, що

$$\alpha_1 \|u\|_k^2 \le \sigma\left(\|u\|_{C([-k,\, k])} \right) \int_{-k}^{k} |u(s)|^2 ds.$$

За теоремою вкладення

$$\|u\|_{C([-k,\, k])} \le C \cdot \|u\|_k,$$

з константою C, що не залежить від k. Отже,

$$\alpha_1 \|u\|_k^2 \le \sigma\left(C \cdot \|u\|_k \right) \|u\|_k^2.$$

Оскільки $u \ne 0$, то

$$\sigma\left(C \cdot \|u\|_k \right) \ge \alpha_1,$$

звідки випливає перша нерівність (4.18) з

$$\varepsilon_0^{1/2} = C^{-1} \cdot \sigma^{-1}(\alpha_1).$$

Нерівність (4.19) доводиться аналогічно, з тими ж константами ε_0 та γ.

Лему доведено. □

4.4. Існування періодичних біжучих хвиль

В даному підрозділі за допомогою теореми про гірський перевал (теорема 3.3.1) встановлено існування нетривіальних біжучих хвиль, з періодичним профілем. Для цього, згідно леми 4.2.2, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Відмітимо, що $u=0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожно рівна нулю.

Теорема 4.4.1. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c_0>0$. *Тоді для будь-яких* $k\ge 1$ *і* $c^2>\max\{0,\ a\}$ *рівняння (4.3) має розв'язок* u, *що задовольняє умові (4.4). Тим самим, існують дві біжучі хвилі з профілем* u *та швидкостями* $\pm c$. *Більше того, існують такі константи* $\varepsilon_0>0$ *і* $C>0$, *які не залежать від* k, *що*

$$\varepsilon_0\le\|u\|_k^2\le C, \tag{4.21}$$

$$\varepsilon_0\le J_k\le C. \tag{4.22}$$

Почнемо з перевірки умов теореми про гірський перевал для функціоналу J_k, яку буде виконано у вигляді наступних лем. Почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 4.4.1. *В умовах теореми 4.4.1 функціонал* J_k *задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Нехай $u_m\in E_k$ така послідовність, що $J_k'(u_m)\to 0$ і $J_k(u_m)\le C$. Тоді, як на початку доведення леми 4.3.2,

$$J_k(u_m)-\frac{1}{\mu}\langle J_k'(u_m),\,u_m\rangle=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{-k}^{k}\Big\{c^2\left(u_m'(s)\right)^2-a\left|u_m(s+1)-u_m(s)\right|^2+$$

$$+c_0\left(u_m(s)\right)^2ds\Big\}-\int_{-k}^{k}\left\{V\left(u_m(s)\right)-\frac{1}{\mu}V'\left(u_m(s)\right)u_m(s)\right\}ds\ge$$

$$\geq \frac{\mu-2}{2\mu}\left\{c^2\int_{-k}^{k}\left(u'_m(s)\right)^2 ds - a\int_{-k}^{k}\left|u_m(s+1)-u_m(s)\right|^2 ds + c_0\int_{-k}^{k}\left(u_m(s)\right)^2 ds\right\}.$$

Як і в доведенні леми 4.3.2, права частина цієї нерівності оцінюється знизу величиною

$$\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\left\|u_m\right\|_k^2.$$

З іншої сторони, її ліва частина не перевищує

$$C+\frac{1}{\mu}C_1\left\|u_m\right\|_k.$$

Звідси

$$\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\left\|u_m\right\|_k^2 \leq C+\frac{1}{\mu}C_1\left\|u_m\right\|_k,$$

що показує обмеженість послідовності u_m в просторі E_k.

Оскільки простір E_k гільбертів, то можна вважати, що $u_m \to u$ слабко в E_k. Згідно компактності вкладення $E_k \subset C\left(\left[-k,\, k\right]\right)$ остання збіжність є сильною в $C\left(\left[-k,\, k\right]\right)$.

Покладемо для стислості $u_{m,l} = u_m - u_l$. Маємо, згідно леми 4.2.1,

$$\left\langle J'_k\left(u_m\right) - J'_k\left(u_l\right),\, u_{m,l}\right\rangle =$$

$$= \int_{-k}^{k}\left\{c^2\left(u'_{m,l}(s)\right)^2 - a\left(u_{m,l}(s+1)-u_{m,l}(s)\right)^2 + c_0\left(u_{m,l}(s)\right)^2\right\}ds -$$

$$-\int_{-k}^{k}\left\{V'\left(u_m(s)\right) - V'\left(u_l(s)\right)\right\}u_{m,l}(s)ds.$$

Звідси, за допомогою того ж прийому, що і в доведенні леми 4.3.2, отримуємо

$$\left\langle J'_k\left(u_m\right) - J'_k\left(u_l\right),\, u_{m,l}\right\rangle \geq \alpha_1\left\|u_{m,l}\right\|_k^2 - \int_{-k}^{k}\left\{V'\left(u_m(s)\right) - V'\left(u_l(s)\right)\right\}u_{m,l}(s)ds,$$

або

$$\alpha_1 \left\| u_{m,l} \right\|_k^2 \le \left\langle J_k'(u_m) - J_k'(u_l),\, u_{m,l} \right\rangle + \int_{-k}^{k} \left\{ V'(u_m(s)) - V'(u_l(s)) \right\} u_{m,l}(s)ds. \quad (4.23)$$

Оскільки $u_{m,l} \to 0$ слабко в E_k, а $J_k'(u_m) \to 0$ сильно в спряженому просторі E_k^*, при $m, l \to \infty$, то перший член в правій частині (4.23) прямує до нуля. Крім того, $u_m \to u$ в $C([-k, k])$. Звідси слідує, що підінтегральний вираз в (4.23) прямує до нуля рівномірно на $[-k, k]$ при $m, l \to \infty$. Отже, інтегральний член в (4.23) також прямує до нуля. Звідки випливає, що u_m – послідовність Коші в E_k і, отже, $u_m \to u$ сильно в E_k. Лему доведено. □

Лема 4.4.2. *В умовах теореми 3.4.1 існує таке* $r_0 > 0$, *яке не залежить від* k, *що*

$$\inf_{\|u\|_k = r_0} J_k(u) > 0.$$

Доведення. Згідно леми 3.1.2 та умови (h)

$$V(r) \le \mu^{-1} \sigma(|r|) r^2.$$

Звідси маємо

$$J_k(u) = \frac{1}{2} \int_{-k}^{k} \left\{ c^2 (u'(s))^2 - a|u(s+1) - u(s)|^2 + c_0 u^2(s) \right\} ds -$$

$$-\int_{-k}^{k} V(u(s)) ds \ge \frac{\alpha_1}{2} \|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu} \int_{-k}^{k} \sigma(u(s)) u^2(s) ds \ge$$

$$\ge \frac{\alpha_1}{2} \|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu} \sigma\left(\|u\|_{C([-k,\, k])} \right) \|u\|_{L^2(-k,\, k)}^2 \ge$$

$$\ge \frac{\alpha_1}{2} \|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu} \sigma\left(\|u\|_{C([-k,\, k])} \right) \|u\|_k^2.$$

Згідно теореми вкладення,

$$\|u\|_{C([-k,\, k])} \le C \|u\|_k.$$

Тому

$$J_k(u) \geq \left\{ \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{\mu}\sigma\left(C\|u\|_k\right) \right\} \|u\|_k^2 .$$

Виберемо $r_0 > 0$ таким, що

$$\frac{1}{\mu}\sigma\left(Cr_0\right) = \frac{\alpha_1}{4}.$$

Це очевидно, можливо, згідно властивостей функції $\sigma(r)$. Тоді при $\|u\|_k = r_0$ маємо

$$J_k(u) \geq \frac{\alpha_1 r_0^2}{4},$$

що і доводить лему. □

Зафіксуємо довільну нескінченно диференційовну функцію $\varphi \neq 0$ на $\mathbb{R}$ з носієм в інтервалі $[0, 1]$. Нехай тепер v_k – така $2k$-періодична функція, що $v_k\,|_{[-k,\,k]} = \varphi\,|_{[-k,\,k]}$. Очевидно, що $v_k \in E_k$.

Лема 4.4.3. *В умовах теореми 4.4.1 існує таке* $\tau_0 > 0$ *(незалежне від* k *), що*

$$J_k\left(\tau v_k\right) = J_1\left(\tau v_1\right) \leq 0$$

для всіх $\tau \geq \tau_0$.

Доведення. За означенням v_k маємо при $k \geq 1$

$$J_k(\tau v_k) = \frac{1}{2}\int_{-k}^{k} \left\{ c^2\tau^2\left(\varphi'(s)\right)^2 - a\tau^2\left|\varphi(s+1)-\varphi(s)\right|^2 + c_0\tau^2\varphi^2(s) \right\} ds -$$

$$-\int_{-k}^{k} V\left(\tau\varphi(s)\right) ds =$$

$$= \frac{\tau^2}{2}\int_{-1}^{1} \left\{ c^2\left(\varphi'(s)\right)^2 - a\left|\varphi(s+1)-\varphi(s)\right|^2 + c_0\varphi^2(s) \right\} ds - \int_{0}^{1} V\left(\tau\varphi(s)\right) ds.$$

Згідно леми 3.1.1,

$$V\left(\tau\varphi(s)\right) \geq d\tau^{\mu}\left|\varphi(s)\right|^{\mu} - d_0.$$

Тому

$$J_k\left(\tau v_k\right) = J_1\left(\tau v_1\right) \leq \gamma_1\tau^2 - d\gamma_2\tau^{\mu} - d_0,$$

де

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c^2\left(\varphi'(s)\right)^2 - a\left|\varphi(s+1)-\varphi(s)\right|^2 + c_0\varphi^2(s)\right\}ds > 0,$$

$$\gamma_2 = \int_{-1}^{1}\left|\varphi(s)\right|^{\mu} ds = \int_{0}^{1}\left|\varphi(s)\right|^{\mu} ds > 0.$$

Оскільки $\mu > 2$, то звідси слідує твердження леми. Лему доведено. □

Доведення теореми 3.4.1. Леми 4.4.1 – 4.4.3 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 4.2.2, u – C^2-розв'язок задачі (4.3), (4.4). Оцінки знизу для $\|u\|_k$ і $J_k(u)$ випливають із леми 4.3.2. Згідно зауваження 3.3.1 і леми 4.4.3,

$$J_k(u) \le \sup_{\tau \ge 0} J_k\left(\tau v_k\right) = \sup_{\tau \ge 0} J_1\left(\tau v_1\right) = C.$$

Оцінка зверху для $\|u\|_k$ випливає тепер із леми 4.3.2. Теорему доведено. □

4.5. Існування відокремлених біжучих хвиль

В цьому підрозділі доводиться існування відокремлених біжучих хвиль з тими ж припущеннями, з якими встановлено існування періодичних хвиль. Біжучі хвилі в даному випадку знаходяться як критичні точки функціоналу J. Для останнього виконуються твердження, аналогічні лемам 4.4.2 та 4.4.3. Таким чином, функціонал J задовольняє частині умов теореми про гірський перевал. Однак умова Пале–Смейла для цього функціоналу не виконується. Тому критичні точки в даному випадку будуються іншим способом – за допомогою переходу до границі в критичних точках функціоналу J_k при $k \to \infty$.

Теорема 4.5.1. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c_0 > 0$. *Тоді для будь-якого* $c^2 > \max\{0, a\}$ *рівняння (4.3) має розв'язок* $u \in E$, *(отже, він задовольняє умові (4.5)). Таким чином, існують дві відокремлені біжучі хвилі з профілем* u *та швидкостями* $\pm c$.

Для доведення теореми знадобляться деякі попередні результати. Перший з них добре відомий ([48]).

Лема 4.5.1. *Нехай* v_n *– обмежена послідовність в* $E = H^1(\mathbb{R})$. *Якщо для деякого* $r > 0$

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \int_{y-r}^{y+r} |v_n(s)|^2 \, ds \to 0, \tag{4.24}$$

то $v_n \to 0$ *в* $L^p(\mathbb{R})$ *для будь-якого* $p > 2$.

Далі знадобиться наступна модифікація цього результату.

Лема 4.5.2. *Нехай* $u_n \in R_{k_n}$, *де* $k_n \to \infty$, *і* $\|u_n\|_{k_n}$ *обмежено. Якщо для деякого* $r > 0$

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \int_{y-r}^{y+r} |u_n(s)|^2 \, ds \to 0, \tag{4.25}$$

то $\|u_n\|_{L^p(-k_n,\,k_n)} \to 0$ *для будь-якого* $p > 2$.

Доведення. Це твердження зводиться до попереднього наступним чином. Позначимо через χ таку неперервну функцію на $\mathbb{R}$, що $\chi_n(s)=1$ при $|s|\le k_n$, $\chi_n(s)=0$ при $|s|\ge k_n+1$ і $\chi_n(s)$ лінійна на інтервалі $[-k_n-1,-k_n]$ і $[k_n,k_n+1]$. Очевидно, χ диференційовна всюди, крім точок $s=\pm k_n,\pm(k_n+1)$, і $|\chi_n'(s)|\le 1$.

Покладемо $v_n(s)=\chi_n(s)u_n(s)$. Тоді $v_n\in H^1(\mathbb{R})$ і маємо носій в інтервалі $[-k_n-1,k_n+1]$.

Маємо також

$$\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi_n(s)u_n(s)|^2\,ds\le\int_{-k_n-1}^{k_n+1}|u_n(s)|^2\,ds\le$$

$$\le\int_{-2k_n}^{2k_n}|u_n(s)|^2\,ds\le 2\|u_n\|^2_{L^2(-2k_n,\,2k_n)}.$$

Крім того, згідно формули Лейбніца,

$$\|v_n'\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|\chi_n u_n'+\chi_n' u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\le\|\chi_n u_n'\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|\chi_n' u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\le$$

$$\le\left\{\int_{-k_n-1}^{k_n+1}|u_n'(s)|^2\,ds\right\}^{1/2}+\left\{\int_{-k_n-1}^{k_n+1}|u_n(s)|^2\,ds\right\}^{1/2}\le$$

$$\le\left\{\int_{-2k_n}^{2k_n}|u_n'(s)|^2\,ds\right\}^{1/2}+\left\{\int_{-2k_n}^{2k_n}|u_n(s)|^2\,ds\right\}^{1/2}=$$

$$=\sqrt{2}\left\{\|u_n'\|_{L^2(-2k_n,\,2k_n)}+\|u_n\|_{L^2(-2k_n,\,2k_n)}\right\},$$

де k_n – достатньо велике.

Звідси слідує, що послідовність

$$\|v_n\|^2_{H^1(\mathbb{R})}=\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\|v_n'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

обмежена.

Очевидно, також, що із співвідношення (4.25) для u_n випливає співвідношення (4.24) для v_n. Таким чином, згідно леми 4.5.1, $\|v_n\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$. Однак,

$$\|v_n\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int_{-k_n-1}^{k_n+1} |\chi_n(s)u_n(s)|^p \, ds \ge \int_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^p \, ds = \|u_n\|^p_{L^p(-k_n,\, k_n)}$$

і лему доведено. □

Доведення теореми 4.5.1. Виберемо довільну послідовність $k_n \to \infty$ і позначимо через $u_n \in E_{k_n}$ розв'язок рівняння (4.3) з умовою (4.4) при $k = k_n$, побудований в теоремі 4.4.1.

Переходячи до підпослідовності, можна вважати, що існують такі $\delta > 0,\ r > 0$ і послідовність $y_n \in \mathbb{R}$, що

$$\int_{y_n-r}^{y_n+r} |u_n(s)|^2 \, ds \ge \delta. \tag{4.26}$$

Дійсно, нехай це не так. Тоді для будь-якого $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{y-r}^{y+r} |u_n(s)|^2 \, ds = 0.$$

Крім того, згідно нерівності (4.21), послідовність $\|u_n\|_{k_n}$ обмежена. Звідси, згідно леми 4.5.2, слідує, що

$$\|u_n\|_{L^p(-k_n,\, k_n)} \to 0. \tag{4.27}$$

Далі, $J'_k(u_n) = 0$ і, отже, $\langle J'_k(u_n),\, u_n \rangle = 0$, тобто

$$\int_{-k_n}^{k_n} \left\{ c^2 \left(u'_n(s)\right)^2 - a|u_n(s+1) - u_n(s)|^2 + c_0 u_n^2(s) \right\} ds = \int_{-k_n}^{k_n} V'\left(u_n(s)\right) u_n(s) ds.$$

Звідси

$$\alpha_1 \|u_n\|^2_{k_n} \le \int_{-k_n}^{k_n} V'\left(u_n(s)\right) u_n(s) ds. \tag{4.28}$$

В силу теореми вкладення, функції $u_n(s)$ неперервні і рівномірно по n обмежені, тобто існує таке $R>0$, що $|u_n(s)|\le R$. Фіксуємо довільне $p>2$. Згідно умови (h), для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $C=C_\varepsilon$, що при $|r|\le R$

$$|V'(r)|\le \varepsilon|r|+C|r|^{p-1}.$$

Тоді нерівність (4.28) дає

$$\alpha_1\|u_n\|_{k_n}^2 \le \varepsilon\int_{-k_n}^{k_n}|u_n(s)|^2\,ds+C\int_{-k_n}^{k_n}|u_n(s)|^p\,ds=$$

$$=\varepsilon\|u_n\|_{L^2(-k_n,\,k_n)}^2+C\|u_n\|_{L^p(-k_n,\,k_n)}^p\le$$

$$\le\varepsilon\|u_n\|_{k_n}^2+C\|u_n\|_{L^p(-k_n,\,k_n)}^p.$$

Вибираючи тут $\varepsilon=\dfrac{\alpha_1}{2}$, отримуємо

$$\frac{\alpha_1}{2}\|u_n\|_{k_n}^2\le C\|u_n\|_{L^p(-k_n,\,k_n)}^p.$$

Тоді, згідно (4.27), $\|u_n\|_{k_n}\to 0$, що протирічить першій нерівності в (4.21). Таким чином, (4.26) доведено.

Рівняння (4.3) інваріантне відносно зсувів. Тому, якщо $u(s)$ – його розв’язок, то $u(s+y)$ також розв’язок для будь-якого $y\in\mathbb{R}$. Отже, замінюючи $u_n(s)$ на $u_n(s+y)$, можна вважати, що (4.26) виконується з $y_n=0$.

Оскільки $\|u_n\|_{k_n}$ обмежено, то, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $u_n\to u$ слабко в $H^1_{loc}(\mathbb{R})$, тобто слабко в $H^1(a,b)$ для будь-якого скінченого інтервалу (a,b). Згідно теореми вкладення, $u_n\to u$ рівномірно на будь-якому скінченому інтервалі. Тому в нерівності (4.26) (з $y_n=0$) можна перейти до границі та отримати, що

$$\int_{-r}^{r}|u(s)|^2\,ds\ge\delta.$$

Це показує, що $u\ne 0$.

Покажемо, що $u \in E$. Виберемо довільно $b > 0$. При достатньо великих n маємо

$$\int_{-b}^{b} \left\{ \left| u_n'(s) \right|^2 + \left| u_n(s) \right|^2 \right\} ds \le \int_{-k_n}^{k_n} \left\{ \left| u_n'(s) \right|^2 + \left| u_n(s) \right|^2 \right\} ds \le C,$$

в силу обмеженості $\| u_n \|_{k_n}$. Оскільки $u_n \to u$ слабко в $H^1(-b, b)$, то

$$\int_{-b}^{b} \left\{ \left| u_n'(s) \right|^2 + \left| u_n(s) \right|^2 \right\} ds \le \liminf_{n \to \infty} \int_{-b}^{b} \left\{ \left| u_n'(s) \right|^2 + \left| u_n(s) \right|^2 \right\} ds \le C.$$

Оскільки b довільне, то звідси слідує, що

$$\| u \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left| u'(s) \right|^2 + \left| u(s) \right|^2 \right\} ds \le C < \infty,$$

тобто $u \in E$.

Залишається перевірити, що u – розв'язок рівняння (4.3). Нехай $\varphi(s)$ – довільна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм, що міститься в інтервалі $(-b, b)$. При достатньо великому n інтервал $(-k_n - 1, k_n + 1)$ містить $(-b, b)$ і, отже, коректно визначена функція $\varphi_n \in E_{k_n}$, яка співпадає з φ на $(-k_n, k_n)$. Оскільки u_n – критична точка функціоналу J_k, то

$$0 = \left\langle J_{k_n}'(u_n), \varphi_n \right\rangle = \int_{-k_n}^{k_n} \{ c^2 u_n'(s) \varphi_n'(s) - a \big(u_n(s+1) + u_n(s-1) -$$

$$-2u_n(s) \big) \varphi_n(s) + c_0 u_n(s) \varphi_n(s) \} ds - \int_{-k_n}^{k_n} V'\big(u_n(s) \big) \varphi_n(s) ds =$$

$$= \int_{-b}^{b} \{ c^2 u_n'(s) \varphi'(s) - a \big(u_n(s+1) + u_n(s-1) - 2u_n(s) \big) \varphi(s) +$$

$$+ c_0 u_n(s) \varphi(s) \} ds - \int_{-b}^{b} V'\big(u_n(s) \big) \varphi(s) ds.$$

В першому інтегралі правої частини цієї рівності можна перейти до границі при $n \to \infty$, оскільки $u_n \to u$ слабко в $H^1(-b, b)$. Згідно теореми вкладення,

$u_n \to u$ рівномірно на $[-b, b]$. Тому і в другому інтегралі можна перейти до границі. Отже,

$$0 = \int_{-b}^{b} \Big\{ c^2 u'(s)\varphi'(s) - a\big(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)\big)\varphi(s) +$$

$$+ c_0 u(s)\varphi(s) \Big\} ds - \int_{-b}^{b} V'\big(u(s)\big)\varphi(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ c^2 u'(s)\varphi'(s) -$$

$$- a\big(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)\big)\varphi(s) + c_0 u(s)\varphi(s) - V'\big(u(s)\big)\varphi(s) \Big\} ds =$$

$$= \big\langle J'(u), \varphi \big\rangle.$$

Оскільки φ – довільна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм і множина таких функцій щільна в E, то $J'(u) = 0$. Тому, u – критична точка функціоналу J і, отже, розв'язок задачі, що розглядається. Теорему доведено. □

4.6. Експоненціальне спадання профілю відокремленої хвилі

В цьому підрозділі вивчається поведінка розв'язків задачі (4.3), (4.5) на нескінченності і при відповідних припущеннях доводиться експоненціальна оцінка для розв'язку. Рівняння (4.3) запишемо у вигляді

$$Lu = f(u), \tag{4.29}$$

де

$$Lu(t) = -c^2 u''(t) + a\big(u(t+1) + u(t-1) - 2u(t)\big) + c_0 u(t) \tag{4.30}$$

і $f(r) = V'(r)$. Відносно функції $f(r)$ зробимо наступне, більш слабше, ніж (h), припущення.

(h') *$f(r)$ неперервна на $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(r) = o(r)$ при $r \to 0$ і $f(r) \neq 0$ при $r \neq 0$.*

Розглядаються розв'язки, що лежать в просторі $E = H^1(\mathbb{R})$.

Нехай $u \in E$ – такий розв'язок. Покладемо

$$g(t) = \frac{f\big(u(t)\big)}{u(t)}$$

(якщо $u(t) = 0$, то $g(t) = 0$ за означенням). Із умови (h') слідує, що

$$\lim_{t \to \pm\infty} g(t) = 0.$$

Рівняння (4.29) приймає вигляд

$$Lu(t) = g(t) \cdot u(t). \tag{4.31}$$

До рівняння (4.31) застосуємо перетворення Фур'є

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} u(t)\,dt.$$

Отримуємо

$$\sigma(\xi)\hat{u}(\xi) = \widehat{g \cdot u}(\xi), \tag{4.32}$$

де

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4a\sin^2\frac{\xi}{2} + c_0. \tag{4.33}$$

Зазначимо, що функція $\sigma(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, продовжується до цілої функції

$$\sigma(\zeta) = c^2\zeta^2 - 4a\sin^2\frac{\zeta}{2} + c_0,\ \ \zeta \in \mathbb{C}.$$

Лема 4.6.1. *Нехай* $c^2 > \max\{a, 0\}$ *і* $c_0 > 0$. *Тоді існує таке* $\beta_0 > 0$, *що функція* $\sigma(\zeta)$ *не має нулів в смужці* $|\mathrm{Im}\,\zeta| < \beta_0$.

Доведення. Перш за все зазначимо, що $\sigma(\xi) > 0$ при всіх $\xi \in \mathbb{R}$ і, отже, σ не перетворюється в нуль на дійсній прямій. Дійсно, якщо $a < 0$, то, очевидно, маємо

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4a\sin^2\frac{\xi}{2} + c_0 \ge c^2\xi^2 + c_0 \ge c_0 > 0.$$

Якщо ж $a > 0$, то скористаємося нерівністю

$$|\sin x| \le |x|.$$

Маємо

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4a\sin^2\frac{\xi}{2} + c_0 \ge c^2\xi^2 - a\xi^2 + c_0 \ge (c^2 - a)\xi^2 + c_0 \ge c_0 > 0.$$

Нехай тепер $A > 0$ – довільне додатне число. Нехай $|\mathrm{Im}\,\zeta| < A$. Записавши ζ в виді $\zeta = \xi + i\tau$, маємо $|\tau| < A$ і

$$\left|\sin\frac{\zeta}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{\frac{i\zeta}{2}} - e^{-\frac{i\zeta}{2}}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{\frac{i\xi}{2}}e^{-\frac{\tau}{2}} - e^{-\frac{i\xi}{2}}e^{\frac{\tau}{2}}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left|e^{-\frac{\tau}{2}} + e^{\frac{\tau}{2}}\right| \le e^{\frac{A}{2}}.$$

Отже,

$$4\left|a\sin^2\frac{\zeta}{2}\right| \le 4|a|e^{A}.$$

Тоді

$$|\sigma(\xi + i\tau)| \ge c^2|\xi + i\tau|^2 - 4|a|e^{A} - c_0.$$

Тому, якщо $|\xi|$ достатньо велике і $|\tau| < A$, то $|\sigma(\xi + i\tau)| > 0$ і, отже, $\sigma(\xi) \neq 0$ для таких $\zeta = \xi + i\tau$. Таким чином, існує таке $B > 0$, що при $|\tau| < A, |\xi| \geq B$ функція $\sigma(\zeta)$ не перетворюється в нуль. Крім того, в прямокутнику $|\tau| < A, |\xi| < B$ аналітична функція $\sigma(\zeta)$ може мати не більше, ніж скінченне число нулів. Звідси негайно випливає існування такого $\beta_0 > 0$, що в смужці $|\tau| < \beta_0$ немає нулів функції $\sigma(\zeta)$. Лему доведено. □

Далі знадобиться наступне твердження

Лема 4.6.2. *Нехай* $f(t)$ *і* $g(t)$ *обмежені невід'ємні функції на* $\mathbb{R}$, *причому* $\lim\limits_{t\to\pm\infty} g(t) = 0$. *Нехай також*

$$f(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t-s|} g(s) f(s) ds,$$

з $\beta > 0$. *Тоді для всіх* $\alpha \in (0, \beta)$ *існує така константа* $C = C_\alpha$, *що*

$$f(t) \leq Ce^{-\alpha|t|}.$$

Доведення. Розглянемо випадок для $t > 0$ (випадок $t < 0$ отримується з попереднього заміною t на $-t$).

Для будь-якого натурального n покладемо

$$L_n = \int_{-\infty}^{n} e^{-\beta(n-s)} g(s) f(s) ds,$$

$$F_n = \sup_{t\geq n} f(t), \;\; G_n = \sup_{t\geq n} g(t).$$

Тоді для $t \geq n$ маємо

$$f(t) \leq \int_{-\infty}^{n} e^{-\beta(t-s)} g(s) f(s) ds + \int_{n}^{+\infty} e^{-\beta|t-s|} g(s) f(s) ds \leq$$

$$\leq L_n + F_n G_n \int_{n}^{+\infty} e^{-\beta|t-s|} ds \leq L_n + F_n G_n \int_{n}^{+\infty} e^{-\beta|s-t|} ds.$$

Розглянемо інтеграл $\int\limits_{n}^{+\infty} e^{-\beta|s-t|}ds$, зробивши заміну $y = s - t$, отримаємо

$$\int\limits_{n}^{+\infty} e^{-\beta|t-s|}ds = \int\limits_{n-t}^{+\infty} e^{-\beta|y|}dy \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|y|}dy = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\beta|y|}dy = \frac{2}{\beta}.$$

Отже,

$$f(t) \le L_n + \frac{2}{\beta}F_n G_n.$$

Звідси негайно слідує, що

$$F_n \le L_n + \frac{2}{\beta}F_n G_n. \qquad (4.34)$$

Далі оцінимо L_{n+1}:

$$L_{n+1} = e^{-\beta}\int\limits_{-\infty}^{n} e^{-\beta(n-s)}g(s)f(s)ds + \int\limits_{n}^{n+1} e^{-\beta(n+1-s)}g(s)f(s)ds \le$$

$$\le e^{-\beta}L_n + F_n G_n \int\limits_{n}^{n+1} e^{-\beta(n+1-s)}ds \le e^{-\beta}L_n + F_n G_n. \qquad (4.35)$$

Оскільки згідно припущення $G_n \to 0$ при $n \to +\infty$, то існує таке ціле $M > 0$, що для $n \ge M$ маємо

$$2G_n \le \min\left\{\frac{\beta}{2},\, e^{-\alpha} - e^{-\beta}\right\}. \qquad (4.36)$$

Тепер, підставляючи останню оцінку в (4.34), отримуємо

$$F_n \le L_n + \frac{1}{2}F_n.$$

Отже,

$$F_n \le 2L_n.$$

Це разом з нерівностями (4.35) і (4.36) дає нам

$$L_{n+1} \le L_n\left(e^{-\beta} + 2G_n\right) \le L_n e^{-\alpha}.$$

З останньої нерівності випливає, що

$$L_n \le e^{-\alpha n}e^{\alpha M}L_M = Ke^{-\alpha n},$$

де $n \geq M$. Тому

$$F_n \leq 2Ke^{-\alpha n}.$$

Далі для $t \in [n, n+1]$ з $n \geq M$ маємо

$$f(t) \leq F_n \leq 2Ke^{-\alpha n} = 2Ke^{\alpha(t-n)}e^{-\alpha t} \leq \left(2Ke^{\alpha}\right)e^{-\alpha t},$$

що й треба було довести. Лему доведено. □

Наступне твердження є основним твердженням даного підрозділу.

Теорема 4.6.1. *Нехай виконується умова* (h'), $c^2 > \max\{a, 0\}$ *і* $c_0 > 0$. *Якщо* $u \in E$ *– розв'язок рівняння (4.3), то для будь-якого* $\beta \in (0, \beta_0)$, *де* β_0 *із леми 4.6.1, існує таке* $C_\beta > 0$, *що*

$$|u(t)| \leq C_\beta e^{-\beta|t|}. \tag{4.37}$$

Доведення. З рівняння (4.32) отримуємо

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sigma(\xi)}\widehat{g \cdot u}(\xi).$$

Нехай

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} \cdot \frac{1}{\sigma(\xi)}d\xi.$$

Тоді

$$u(t) = \left[K * \left(g \cdot u\right)\right](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)g(s)u(s)ds, \tag{4.38}$$

де $*$ – згортка функцій.

Оскільки, згідно леми 4.6.1, функція $\dfrac{1}{\sigma(\zeta)}$ аналітична в смужці $|\mathrm{Im}\,\zeta| < \beta_0$, то, згідно теореми Пелі–Вінера (див. [21], теорема IX.14), для $K(t)$ має місце оцінка

$$|K(t)| \leq C_\beta e^{-\beta|t|}$$

для будь-якого $\beta \in (0, \beta_0)$. Із (4.38) отримуємо

$$|u(t)| \le C_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t-s|} |g(s)| \cdot |u(s)| ds.$$

Тепер, згідно леми 4.6.2, отримуємо те, що вимагалося. Теорему доведено. □

Оскільки умова (h) сильніша, ніж (h'), то із теореми 4.6.1 випливає

Наслідок 4.6.1. *В умовах теореми 4.6.1 (з умовою (h) замість (h')) для розв'язку и має місце експоненціальна оцінка (4.37) для будь-якого* $\beta \in (0, \beta_0)$.

4.7. Приклад

Розглянемо рівняння (4.1) з потенціалом

$$V(r) = \frac{1}{p} d|r|^p,$$

тобто рівняння

$$\ddot{q}_n = a\Delta q_n + c_0 q_n - d|q_n|^{p-2} q_n, \tag{4.39}$$

де $c_0 > 0,$ а Δ – одновимірний дискретний оператор Лапласа

$$\Delta q_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n.$$

Підстановка розв'язку виду

$$q_n(t) = u(n - ct)$$

дає для профілю $u(s)$ рівняння

$$c^2 u''(s) = a\big(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)\big) + c_0 u(s) - d|u(s)|^{p-2} u(s). \tag{4.40}$$

Як зазначалось вище, потенціал $V(r)$ задовольняє умовам (ii_2) та (iii_2) підрозділу 3.1, тобто він задовольняє умові (h) підрозділу 4.1. Тоді за теоремою 4.4.1 для будь-яких $k \geq 1$ і $c^2 > \max\{0,\ a\}$ рівняння (4.40) має $2k$-періодичний розв'язок u, тобто існують дві $2k$-періодичні біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$. Більше того, існують такі константи $\varepsilon_0 > 0$ і $C > 0$, які не залежать від k, що

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C.$$

А за теоремою 4.5.1 для будь-якого $c^2 > \max\{0, a\}$ рівняння (4.40) має розв'язок $u \in E$, тобто існують дві відокремлені біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c.$

Більше того, оскільки $f(r) = V'(r) = d|r|^{p-2} r$ задовольняє умові (h') підрозділу 4.6, то за теоремою 4.6.1 для $c^2 > \max\{0,\ a\}$ розв'язок $u \in E$ має оцінку (4.37).

Висновки до розділу 4

Четвертий розділ дисертації присвячений питанню існування біжучих хвиль в однорідних за просторовою змінною ланцюгах. Він складається з семи підрозділів. Розглядаються біжучі хвилі двох типів: періодичні та відокремлені. Профіль періодичної біжучої хвилі є періодичною функцією з періодом $2k$, а профіль відокремленої хвилі перетворюється в нуль на нескінченності. В перших двох підрозділах розглядається формулювання задачі про біжучі хвилі та варіаційне формулювання задачі. В залежності від типу біжучої хвилі, розглядаються функціонали J_k та J. Показано, що критичні точки цих функціоналів є розв’язками відповідних задач.

В третьому підрозділі розглянуто допоміжні леми.

В четвертому та п’ятому підрозділах встановлено існування нетривіальних періодичних та відокремлених біжучих хвиль. Тут також, як і в попередньому розділі, використано теорему про гірський перевал для періодичних біжучих хвиль та метод періодичних апроксимацій для відокремлених біжучих хвиль. Доведено також, що профіль відокремленої біжучої хвилі експоненціально спадає на нескінченності (шостий підрозділ).

В останньому підрозділі встановлені вище результати застосовуються до рівняння

$$\ddot{q} = a\Delta q_n + cq_n - d\left|q_n\right|^{p-2} q_n.$$

Головні результати даного розділу опубліковано в роботах [7], [10].

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена побудові класів існування та єдиності розв'язків гамільтонових систем, що описують нескінченні ланцюги лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

У дисертації отримано такі результати:

1) умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів;

2) умови існування періодичних за часом розв'язків для рівнянь, що описують динаміку системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів та досліджено методи їх побудови;

3) умови існування біжучих хвиль в ланцюгах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

Отримані в дисертації результати є поширенням вже відомих для подібних систем. Для обгрунтування результатів в даній роботі розвинуто варіаційний метод відшукання періодичних розв'язків таких систем, метод умовної мінімізації та метод періодичних апроксимацій.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосованими в теорії звичайних диференціальних рівнянь та в нелінійній фізиці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматулина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.

[2] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.

[3] *Бак С.Н., Панков А.А.* О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов //Доповіді НАН України. – 2004. – №9. – С.13-16.

[4] *Бак С.Н.* Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов //Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – №3. – Т.11. – С. 263-273.

[5] *Бак С.Н., Панков А.А.* О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов //Український математичний журнал. – 2006. – №6. – Т.58. – С.723-729.

[6] *Бак С.М.* Задача Коші для ланцюга нелінійних осциляторів //Актуальні проблеми виробничих та інформаційних технологій, економіки і фундаментальних наук: Збірник наукових праць. – Випуск 2. – Вінниця, 2005. – С.59-61.

[7] *Бак С.М.* Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів //VIII всеукраїнська науково-практична конференція "Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість". Матеріали конференції. – Київ, 2005. – С.92-95.

[8] *Бак С.М.* Про глобальні розв'язки для нескінченної системи нелінійних осциляторів //Міжнародна конференція "Математичний аналіз і суміжні питання". Тези доповідей. – Львів, 2005 . – С. 5.

[9] *Бак С.М.* Про періодичні розв'язки нескінченної системи нелінійних осциляторів //Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. – Київ, 2006. – С. 311.

[10] *Бак С.М.* Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів //Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140-153.

[11] *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. – К.: Вища школа, 1990. – 600 с.

[12] *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Мир, 1977. – 232 с.

[13] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

[14] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962. – 896 с.

[15] *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 735 с.

[16] *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.

[17] *Мышкис А.Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом //Успехи мат. наук, 1972. – С. 173 – 202.

[18] *Нижник И.Л.* Устойчивая численная разностная схема для нелинейного уравнения Клейна-Гордона // Український математичний журнал. – 1997. – №6. – Т.49 – С. 857 – 859.

[19] *Обен Ж.П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1988. – 510 с.

[20] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 357 с.

[21] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 395 с.

[22] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1982. – Т. 3. – 443 с.

[23] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1982. – Т. 4. – 428 с.

[24] *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

[25] *Тода М.* Теория нелинейных решеток. – М.: Мир, 1984. – 262 с.

[26] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

[27] *Хейл Дж.* Теорія функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

[28] *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

[29] *Arioli G., Gazzola F.* Periodic motion of an infinite lattice of particles with nearest neighbor interaction // Nonlin. Anal. – 1996. – 26, №6. – P.1103 – 1114.

[30] *Arioli G., Gazzola F.* Existence and nummerical approximation of periodic motions of an infinite lattice of particles //Z. Angew. Math. Phys. – 1995. – 46. – P. 898 – 912.

[31] *Arioli G., Gazzola F., Terracini S.* Multibump periodic motion of an infinite lattice of particles // Math. Z. – 1996. – 223. – P.627 – 642.

[32] *Arioli G., Chabrowski J.* Periodic motions of a dynamical systems consisting of an infinite lattice of particles // Dyn. Syst. Appl. – 1997. – 6 – P.387 – 395.

[33] *Arioli G., Szulkin A.* Periodic motions of an infinite lattice of particles: the strongly indefinite case // Ann. Sci. Appl. – 1997. – 22 – P.97 – 119.

[34] *Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: Existence,linear stability and quantization // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201 – 250.

[35] *Aubry S.* Discrete breathers in anharmonic models with acoustic phonons //Ann. Inst. H. Poincare, Phys. theorique. – 1998. – v.68. – P. 381 – 420.

[36] *Braun O.M., Kivshar Y.S.* Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model //Physics Repts. – 1998. – 306. – P. 1 – 108.

[37] *Braun O.M., Kivshar Y.S.* The Frenkel–Kontorova model. – Berlin: Springer, 2004. – 427 p.

[38] *Chernoff P.R. and Marsden J.E.* Properties of infinite dimensional Hamiltonian systems, Lecture Notes Math. – Berlin: Springer, 1974. – 425. – 160 p.

[39] *Chow S.N.* Lattice dynamical systems. Lect. Notes Math., v.1822. – Berlin: Springer. – 2003. – P.1 – 102.

[40] *Ekeland I.* Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics. – Berlin: Springer, 1990. – 247 p.

[41] *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of nonliniear problems //Appl. Math. – 1974. – 15. – 156 p.

[42] *Friesecke G., Wattis J.* Existence theorem for solitary waves on lattices //Commun. Math. Phys. – 1994. – 161. – P. 391 – 418.

[43] *Henning D., Tsironis G.* Wave transmission in nonliniear lattices //Physics Repts. – 1999. – 309. – P. 333 – 432.

[44] *Iooss G.* Traveling waves in the Fermi-Pasta-Ulam lattice //Nonlin. – 2000. – 13. – P. 471 – 494.

[45] *Iooss G., Kirschgässner K.* Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators //Commun. Math. Phys. – 2000. – 211. – P. 439 – 464.

[46] *James G.* Existence of breathers on FPU lattices // C.R. Acad. Sci. Paris. – 2001. – 332. – P. 581 – 586.

[47] *Kevrekides P.G., Rasmussen K.O., Bishop A.R.* The discrete nonliniear Shrödinger equation: a survey of recent results //Intern. J. Modern Phys., B. – 2001. – v.15. – P. 2833 – 2900.

[48] *Lions P.L.* The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II //Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire. – 1984. – 1. – P. 223 – 238.

[49] *MacKay R.S., Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible a Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators //Nonlinearity. – 1994. – P.1623 – 1643.

[50] *Marsden J., Ratiu T.S.* Introduction to Mechanics and symmetry. – New York: Springer, 1989. – 567 p.

[51] *Mawhin J., Willem M.* Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. – New York: Springer. – 1989. – 326 p.

[52] *Nizhnik L.P., Hasler M., Nizhnik I.L.* Stable stationary solutions in reaction-diffusion systems consisting of a 1-d array of bystable cells, Int. J. Of Bifurcation and Chaos. – Vol. 12. – 2002. – №2. – P. 261 – 279.

[53] *Pankov A.* Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation //Nonlinearity. – 19. – 2006. – P. 27 – 40.

[54] *Pankov A.* Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach, Discr. Cont. Dyn. Syst., A. – в друці.

[55] *Pankov A.* Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 p.

[56] *Pankov A., Pflüger K.* On a semilinear Schrödinger equation with periodic potential // Nonlin. Anal. – 1998. – 33, №6. – P. 593 – 609.

[57] *Pankov A., Pflüger K.* Periodic and solitary traveling wave solutions for the generalized Kadomtsev-Petviashvili equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 1999. – 22. – P. 733 – 752.

[58] *Pankov A.* Periodic Nonlinear Schrödinger Equation with an Application to Photonic Crystals //Milan J. Math., accepted (preprint version available at arXiv, math.AP/0404450). – 2004.

[59] *Pankov A., Pflüger K.* On ground traveling waves for the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations // Math. Phys., Anal., Geom. – 2000. – 3. – P. 593 – 609.

[60] *Pankov A., Pflüger K.* Traveling waves in lattice dynamical systems // Math. Meth. Appl. Sci. – 2000. – 23. – P.1223 – 1235.

[61] *Pankov A., Zakharchenko N.* On some discrete variational problems //Acta Appl. Math. – 2001. – 65. – P. 295 – 303.

[62] *Rabinowitz P.* Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. – Providence, R. I.: American Math. Soc. – 1986. – 100 p.

[63] *Sattinger D.* On global solutions non linear hyperbolic equations //Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – 30. – P. 148 – 172.

[64] *Smets D.* Traveling waves for an infinite lattice: multibump type solutions //Topol. Meth. Nonlin. Anal. – 1998. – 12. – P. 79 – 90.

[65] *Smets D., Willem M.* Solitary waves with prescribed speed on infinite lattices //J. Funct. Anal. – 1997. – 149. – P. 266 – 275.

[66] *Smoller J.* Shock waves and reaction-diffusion equations. – Berlin: Springer, 1983. – 581 p.

[67] *Struwe M.* Variational Methods. – 3rd Ed. – Berlin: Springer. – 1997. – 245 p.

[68] *Tarallo M., Terracini S.* On the existence of periodic and solitary travelling waves in some nonlinear lattices //Dynam. Syst. Appl. – 1995. – 4. – P. 429 – 458.

[69] *Teschl G.* Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices //Amer. Math. Soc., Providence, R.I. – 2000. – 251 p.

[70] *Volpert A.I., Volpert V.A.* Travelling Wave Solutions of Parabolic Systems // Amer. Math. Soc., Providence, R.I. – 1994. – 455 p.

[71] *Weinstein M.* Excitation threshold for nonliniear localized modes on lattices //Nonlinearity. – 1999. – v.12. – P.673 – 691.

[72] *Willem M.* Minimax theorems. – Boston, Birkhäuser. – 1996. – 162 p.