

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ГЕТЕРОКЛІНІЧНІ БІЖУЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНОМУ РІВНЯННІ СИНУС-ГОРДОН З НЕЛІНІЙНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ НА ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ

Розглядається дискретне рівняння синус-Гордон, яка описує динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = U'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + \\ + U'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n,m-1}) - K \sin(q_{n,m}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (1)$$

де $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m) -го осцилятора в момент часу t , $K > 0$. Систему (1) можна розглядати як двовимірну версію моделі Френкеля-Конторової ([4]).

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. В статтях [1; 2; 3] вивчалися періодичні та гетероклінічні біжучі хвилі для таких систем. Ці результати поширюють результати, одержані в статтях [5; 6] для таких систем на одновимірній ґратці.

Зазначимо, що біжуча хвиля у цьому випадку має вигляд $q_{n,m}(t) = u(n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct)$ і для її профілю $u(s)$, де $s = n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$c^2 u''(s) = U'(u(s + \cos \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \cos \varphi)) + \\ + U'(u(s + \sin \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \sin \varphi)) - K \sin(u(s)). \quad (2)$$

Профіль гетероклінічної хвилі задовольняє умови

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = -\pi \quad \text{та} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = \pi. \quad (3)$$

Важливу роль відіграють величини

$$c_1^2 := 2 \sup_{|r| < 6\pi} \left| \frac{U(r)}{r^2} \right|,$$

$$\delta := \frac{4c_1^2}{c^2 - c_1^2 + c\sqrt{c^2 - c_1^2}}.$$

Припускається, що потенціал $U(r)$ задовольняє умови:

(i) $U \in C^1(\mathbb{R})$, $U(0) = 0$ та $U(r) \geq 0$ для всіх $r \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} U(r) = +\infty$.

(iii) Існує скінченна границя $\lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{U(r)}{r^2} \right|$.

(iv) Швидкість хвилі c задовольняє нерівність $c^2 > c_1^2$.

За допомогою варіаційного методу і принципу концентрованої компактності одержано наступний результат.

Теорема ([3]). *Нехай виконуються умови (i)–(iv) і c таке достатньо велике, що $\delta < \pi$. Тоді рівняння (2) має розв'язок u , який задовольняє крайові умови (3).*

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні синус-Гордона на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2013. Вип. 9. С. 5-10.
2. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль в системі осциляторів на двовимірній ґратці // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2014. Т. 57. С. 45-52.
3. Bak S. M. The existence of heteroclinic travelling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2018. Vol. 14, №1.
4. Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel-Kontorova Model. Concepts, Methods and Applications. Texts and Monographs in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 472 p.
5. Kreiner C.-F., Zimmer J. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine-Gordon equation with linear interaction // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2009. Vol. 25. P. 915-931.
6. Kreiner C.-F., Zimmer J. Travelling wave solutions for the lattice sine-Gordon equation with nonlinear interaction // Nonlinear Anal. 2009. Vol. 70. P. 3146-3158.