Д. М. Домбровська, С. М. Бак

УМОВИ ІСНУВАННЯ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ ОСЦИЛЯТОРІВ, РОЗМІЩЕНИХ НА ДВОВИМІРНІЙ РЕШІТЦІ

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, що описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній решітці. Нехай $q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n,m)– го осцилятора в момент часу t. Припускається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'(q_{n,m}) + q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}, (n,m) \in \mathbb{Z}^2 . \qquad (1)$$

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

В статті [12] вивчались періодичні розв'язки для системи осциляторів розміщених на двовимірних решітках, а в статтях [7] та [8] – біжучі хвилі в таких системах. Зокрема, в [7] розглядалась система із непарною $2\pi-$ періодичною нелінійністю. А в [8] взагалі розглядалися лінійні осцилятори.

В даній статті за допомогою методу критичних точок досліджено питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

Постановка задачі. Розглянемо систему осциляторів з потенціалом:

$$U(r) = -\frac{c_0}{2} r^2 + V(r).$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$\ddot{q}_{n,m} = \Delta q_{n,m} + c_0 q_{n,m} - V'(q_{n,m}), \qquad (2)$$

де

$$(\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$$

– двохвимірний дискретний оператор Лапласа.

Біжуча хвиля має вигляд

$$q_n(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct)$$

і для її профілю $u(s)$, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, отримаємо рівняння

$$c^2 u''(s) = u(s + \cos\varphi) + u(s - \cos\varphi) +$$

$$+u(s + \sin\varphi) + u(s - \sin\varphi) - 4u(s) + c_0 u(s) - V'(u(s)). \quad (3)$$

Відмітимо, що функція неперервного аргументу $u(s)$, $u \in \mathbb{R}$ називається профілем хвилі. Константа $c \neq 0$ представляє собою швидкість хвилі. Цікавими є не тривіальні хвилі з профілем тотожно відмінним від нуля.

У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі достатньо знайти розв'язок рівняння (3) з умовою періодичності

$$u(s + 2k) = u(s),\ s \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Профіль відокремленої хвилі є розв'язком рівняння (3) з крайовою умовою на нескінченності

$$\lim_{s \to \pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \quad (5)$$

Всюди далі під розв'язком рівняння (3) розуміється функція $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (3) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

При значеннях кута φ , який визначає напрям поширення хвилі, а саме при $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ і $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, задача зводиться до одновимірного випадку.

$$c^2 \psi''(s) = \psi(s+1) + \psi(s-1) - 2\psi(s) + \frac{c_0}{2}\psi(s) - \frac{1}{2}V'(\psi(s)).$$

Всюди далі припускається, що потенціал $V(r)$ задовольняє умову:

(h) *функція* $V(r)$ *неперервно диференційовна,* $V(0) = 0$ *і* $V'(r) = o(r)$, *при* $r \to 0$ *та існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu V(r) \le V'(r) r,\ r \neq 0.$$

Зазначимо, що в рівняння (3) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівнянню (3), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$.

З рівняння (3)та умовою (4)пов’язується функціонал

$$J_k(u)=\int_{-k}^{k}\{\frac{c^2}{2}(u'(s))^2-\frac{1}{2}(u(s+\cos\varphi)-u(s))^2-$$

$$-\frac{1}{2}(u(s+\sin\varphi)-u(s))^2+\frac{c_0}{2}u^2(s)-V(u(s))\}ds, \qquad (6)$$

який визначений на просторі

$$E_k=\{u\in H^1_{loc}(\mathbb{R}):u(s+2k)=u(s)\}$$

з нормою

$$\|u\|_k=(\|u\|^2_{L^2(-k,k)}+\|u'\|^2_{L^2(-k,k)})^{\frac{1}{2}}=(\int_{-k}^{k}(u(s)^2+u'(s)^2)ds)^{\frac{1}{2}}.$$

Тобто E_k – соболєвський простір $2k$–періодичних функцій.

З крайовою умовою (5) пов’язаний функціонал

$$J(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{c^2}{2}(u'(s))^2-\frac{1}{2}(u(s+\cos\varphi)-u(s))^2-$$

$$-\frac{1}{2}(u(s+\sin\varphi)-u(s))^2+\frac{c_0}{2}u^2(s)-V(u(s))\}ds, \qquad (7)$$

який визначений на просторі $E=H^1(\mathbb{R})$ зі стандартною соболєвською нормою:

$$\|u\|=(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}=(\int_{-\infty}^{\infty}(u^2(s)+(u'(s))^2)ds)^{\frac{1}{2}}.$$

Допоміжні леми. Для отримання основного результату знадобляться наступні леми:

Лема 1. За *зроблених вище припущень,* J_k *та* J *– функціонали класу* C^1 *на* E_k *та* E *відповідно. Їх похідні виражаються формулами*

$$\langle J_k'(u),h\rangle=\int_{-k}^{k}\{c^2u'(s)h'(s)+(u(s+\cos\varphi)+u(s-\cos\varphi)+$$

$$+u(s+\sin\varphi)+u(s-\sin\varphi)-4u(s))h(s)+c_0u(s)h(s)-V'(u(s))h(s)\}ds \qquad (8)$$

$$\langle J'(u),h\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\{c^2u'(s)h'(s)+(u(s+\cos\varphi)+u(s-\cos\varphi)+$$

$$+u(s+\sin\varphi)+u(s-\sin\varphi)-4u(s))h(s)+c_0u(s)h(s)-V'(u(s))h(s)\}ds\,. \qquad (9)$$

Лема 2. *Критичні точки функціоналів* J_k *і* J ^{o} C^2 *– розв'язками рівняння (3), що задовольняють умови (4) і (5) відповідно.*

Лема 3. *Правильні наступні нерівності*

$$\int_{-k}^{k}|u(s+\cos\varphi)-u(s)|^2\,ds\le\cos^2\varphi\int_{-k}^{k}|u'(s)|^2\,ds,\ u\in E_k,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(s+\cos\varphi)-u(s)|^2\,ds\le\cos^2\varphi\int_{-\infty}^{\infty}|u'(s)|^2\,ds,\ u\in E,$$

$$\int_{-k}^{k}|u(s+\sin\varphi)-u(s)|^2\,ds\le\sin^2\varphi\int_{-k}^{k}|u'(s)|^2\,ds,\ u\in E_k,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(s+\sin\varphi)-u(s)|^2\,ds\le\sin^2\varphi\int_{-\infty}^{\infty}|u'(s)|^2\,ds,\ u\in E.$$

Лема 4. *Нехай виконується умова* (h), $c_0>0$ *і* $c^2>1$. *Тоді існують такі* $\varepsilon_0>0$ *і* $\gamma>0$, *які не залежать від* $k\ge 1$, *що для нетривіальних критичних точок функціоналів* J_k *та* J *правильні нерівності*

$$\varepsilon_0\le\|u\|_k^2\le\gamma J_k(u),$$

$$\varepsilon_0\le\|u\|^2\le\gamma J(u).$$

Існування періодичних біжучих хвиль. За допомогою теореми про гірський перевал встановимо існування нетривіальних біжучих хвиль з періодичним профілем. Для цього, згідно леми 2, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Відмітимо, що $u=0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожньо рівна нулю.

Теорема 1. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c_0>0$. *Тоді для будь-яких* $k\ge 1$ *і* $c^2>1$ *рівняння (3) має розв'язок u, що задовольняє умові (4). Тим самим, існують дві біжучі хвилі з профілем u та швидкостями* $\pm c$. *Більше того, існують такі константи* $\varepsilon>0$ *і* $C>0$, *які не залежать від* k, *що*

$$\varepsilon_0\le\|u\|_k^2\le C,$$

$$\varepsilon_0 \le J_k \le C.$$

Сформулюємо теорему про гірський перевал в потрібному вигляді та перевіримо її умови для функціоналу J_k.

Теорема 2. (Про гірський перевал) *Нехай I – функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, що задовольняє умові Пале–Смейла:*

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $I'(u_n) \to 0$ і $I(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.

Припустимо, що існують такі $e \in H$ і $r > 0$, що $\| e \| > r$ і

$$\beta := \inf_{\|\upsilon\|=r} I(\upsilon) > 0 = I(0) \ge I(e).$$

Тоді існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I, що $I(u) \ge \beta$. При цьому

$$I(u) \le \sup_{\tau \ge 0} I(\tau e).$$

Перевірку умов теореми 2 почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 5. *За умов теореми 1 функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.*

Лема 6. *За умов теореми 1 існує таке $r_0 > 0$, яке не залежить від k, що*

$$\inf_{\|u\|_k = r_0} J_k(u) > 0.$$

Лема 7. *За умов теореми 1 існує таке $\tau_0 > 0$ (незалежне від k), що*

$$J_k(\tau\upsilon_k) = J_1(\tau\upsilon_1) \le 0$$

для всіх $\tau \ge \tau_0$.

Доведення теореми 1. Леми 5-7 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 2, $u - C^2$-розв'язок задачі (3), (4). Оцінки знизу для $\| u \|_k$ і $J_k(u)$ випливають із леми 4. Згідно леми 7,

$$J_k(u) \le \sup_{\tau \ge 0} J_k(\tau\upsilon_k) = \sup_{\tau \ge 0} J_1(\tau\upsilon_1) = C.$$

Оцінка зверху для $\| u \|_k$ випливає тепер із леми 4. □

Існування відокремлених біжучих хвиль. Біжучі хвилі в даному випадку знаходяться як критичні точки функціоналу J. Для останнього виконуються твердження, аналогічні лемам 6 та 7. Таким чином, функціонал J задовольняє частині умов теореми про гірський перевал. Однак, умова Пале–Смейла для цього функціоналу не виконується. Тому критичні точки в даному випадку будуються іншим способом – за допомогою переходу до границі в критичних точках функціоналу J_k при $k \to \infty$.

Теорема 3. *Нехай виконується умова* (h) *і* $c_0 > 0$. *Тоді для будь-якого* $c^2 > 1$ *рівняння (3) має розв'язок* $u \in E$, *(отже, він задовольняє умові (5)). Таким чином, існують дві відокремлені біжучі хвилі з профілем u та швидкостями* $\pm c$.

Література:

1. *Бак С. М.* Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів //Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140–153.
2. Рид *М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 395 с.
3. *Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization //Physica D. – 1997. – 103. – P. 201–250.
4. *Bak S. M.* Peridoc traveling waves in chains of oscillators //Communications in Mathematical Analysis. – 2007. –Volume 3, Number 1. – P. 19–26.
5. *Braun O.M., Kivshar Y.S.* Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model //Physics Repts. – 1998. – 306. – P. 1–108.
6. *Braun O.M., Kivshar Y.S.* The Frenkel-Kontorova model. – Berlin: Springer, 2004. – 427 pp.
7. *Feckan M., Rothos V.* Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions //Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319–341.
8. *Friesecke G., Matthies K.* Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice //Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – Volume 3, №1 (February). – P. 105–114.

9. Ioos G., Kirchgassner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators //Commun. Math. Phys. – 2000. – 211. – P. 439–464.

10. *Lions P.L.* The concentration – compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II //Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire. – 1984. – 1. – P. 223–238.

11. *Pankov A.* Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi – Pasta –Ulam Lattices. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 pp.

12. *Srikanth P.* On periodic motions of two-dimentional lattices //Functional analysis with current applications in science, technology and industry. – 1998. – Volume 377. – P. 118–122.

Анотація. *В даній статті за допомогою методу критичних точок досліджено питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній решітці.*

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, цілочислова решітка, біжучі хвилі, критичні точки, гірський перевал.*