Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.97

Бак С.М.

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ЗА ЧАСОМ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ

Бак С.М. *Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній гратці* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 175–196.

Розглядається система диференціальних рівнянь, яка описує динаміку нескінченної системи осциляторів на двовимірній гратці. Отримано результат про існування періодичних за часом розв'язків. За допомогою теореми про гірський перевал отримані достатні умови існування таких розв'язків.

Вступ

У цій статті вивчаються рівняння, що описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на плоскій цілочисловій гратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n,m)-го осцилятора в момент часу t. Припускається, що кожен осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m})$$
$$+b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}), \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{1}$$

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Якщо $a_{n-1,m} = a_{n,m} = b_{n,m-1} = b_{n,m} \equiv 1$, то лінійна частина правої частини рівняння дорівнює $(\triangle q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$ — двовимірний дискретний оператор Лапласа.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що задовольняють крайову умову на нескінченності:

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0. \tag{2}$$

Ця умова означає, що осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35Q55, 35Q51, 39A12.
Ключові слова і фрази: система осциляторів, періодичні розв'язки, теорема про гірський перевал.

© Бак С.М., 2012

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [11], [13], [14]. В статтях [1], [5], [15] та [16] вивчались біжучі хвилі в системах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних гратках, а в статтях [2] і [3] — питання коректності задачі Коші для таких систем.

У цій статті отримано умови існування періодичних за часом розв'язків нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній гратці. Дана робота узагальнює результати, отримані в [6], на випадок двовимірної гратки.

1 Постановка задачі та основні припущення

Розглянемо систему осциляторів з потенціалом:

$$U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r),$$

і покладемо

$$c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}.$$

Тоді рівняння (1) набуде вигляду

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1}+$$
$$+c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{3}$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння розглядаємо як диференціально-операторне

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{4}$$

де A — оператор лінійної взаємодії осциляторів, який визначається рівністю

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}$$

(такі оператори вивчались в [7]), а нелінійний оператор B —

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}), \tag{5}$$

в просторі $l_2 = l_2(\mathbb{Z}^2)$ дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)}, q^{(2)}\right) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} q^{(1)}_{n,m}q^{(2)}_{n,m}.$$

Скалярний добуток і норму в l_2 позначатимемо відповідно $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$.

Далі нам також знадобиться простір l^∞ — банахів простір обмежених послідовностей з нормою

$$\|q\|_{l^\infty} = \sup_{n,m\in\mathbb{Z}} |q_{n,m}|.$$

Зауважимо, що рівняння (3) у просторі l_2 можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p,q), \\ \dot{q} = H'_p(p,q) \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2}\big(\|p\|^2 - (Aq, q)\big) + \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}),$$

де $p = \dot{q}$.

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значеннями в l_2.

Всюди далі припускається, що

(*i*) *коефіцієнти* $a_{n,m}, b_{n,m}$ *і* $c_{n,m}$ *є* N*-періодичними, тобто* $a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m}$, $b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}$, $c_{n+N,m} = c_{n,m+N} = c_{n,m}$, *і* A *— додатно визначений в* l_2, *тобто існує таке* $\alpha_0 > 0$, *що*

$$(Aq, q) \geq \alpha_0 \|q\|^2, \quad q \in l_2;$$

(*ii*) *для будь-яких* $n, m \in \mathbb{Z}$ *функція* $V_{n,m}(r)$ *— неперервно диференційовна,* $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$ *та* $V'_{n,m}(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$, *і виконується умова* N*-періодичності* $V_{n+N,m}(r) = V_{n,m+N}(r) = V_{n,m}(r)$;

(*iii*) *існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu V_{n,m}(r) \leq V'_{n,m}(r) r, \quad r \neq 0.$$

З умови (*i*) випливає, що оператор A є обмеженим самоспряженим в l_2.

Лема 1.1. *Нехай* $V_{n,m}$ *задовольняє умови* (*ii*) *та* (*iii*). *Тоді існують такі константи* $d > 0$ *та* $d_0 \geq 0$, *які не залежать від* n *і* m, *що*

$$V_{n,m}(r) \geq d|r|^\mu - d_0. \tag{6}$$

Доведення. Зафіксуємо $r_0 > 0$. Оскільки

$$V'_{n,m}(r) \geq \mu \frac{V_{n,m}(r)}{r},$$

то згідно стандартних результатів про диференціальні нерівності [10], $V_{n,m}(r) \geq y(r)$ при $r \geq r_0$, де $y(r)$ — розв'язок диференціального рівняння

$$y'(r) = \frac{\mu}{r} y(r)$$

з початковою умовою $y(r_0) = V_{n,m}(r_0)$. Останній можна знайти в явному вигляді

$$y(r) = \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu} r^\mu.$$

Отже,

$$V_{n,m}(r) \geq \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu} r^\mu, \quad r \geq r_0.$$

Тоді для всіх $r \geq 0$

$$V_{n,m}(r) \geq V_{n,m}(r_0)\left(\frac{r^\mu}{r_0^\mu} - 1\right) = \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu} r^\mu - V_{n,m}(r_0).$$

Аналогічно, для $r \leq 0$

$$V_{n,m}(r) \geq \frac{V_{n,m}(-r_0)}{r_0^\mu}|r^\mu| - V_{n,m}(r_0).$$

Звідси отримуємо (6) з

$$d = \inf_{n,m} \min\left[\frac{V_{n,m}(-r_0)}{r_0^\mu}, \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu}\right],$$

$$d_0 = \sup_{n,m} \max\left[V_{n,m}(r_0), V_{n,m}(-r_0)\right].$$

□

Лема 1.2. *Нехай виконуються умови (ii) та (iii). Тоді існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma(r), r \geq 0$, що*

$$\sigma(0) = 0, \lim_{r\to+\infty} \sigma(r) = +\infty$$

і

$$V'_{n,m}(r)r \leq \sigma(|r|)r^2. \tag{7}$$

Доведення. Покладемо

$$\sigma(r) = \max_{n,m} \sup_{|s|\leq r}\left|\frac{V'_{n,m}(s)}{s}\right|.$$

Нерівність (7), неперервність та мононтонність $\sigma(r)$, а також рівність $\sigma(0) = 0$ очевидні. Із умови (iii) та леми 1.1 випливає, що

$$\sigma(r) \geq const \cdot r^{\mu-2}$$

при достатньо великих r. Оскільки $\mu > 2$, то $\sigma(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ і тому лему доведено. □

Відповідно до умови просторової періодичності системи, природньо розглядати такі періодичні по n і m крайові умови. Нехай $k > 0$ — ціле. Розглянемо рівняння (1) з крайовою умовою

$$q_{n+kN,m} = q_{n,m+kN} = q_{n,m}. \tag{8}$$

Ця задача використовується, як допоміжна, при вивченні періодичних розв'язків задачі (1), (2). Запишемо цю задачу у вигляді диференціально-операторного рівняння. Позначимо через l_2^k простір kN-періодичних послідовностей. Це скінченновимірний простір розмірності $kN \times kN$.

В просторі l_2^k введемо норму

$$\|q\|_k = \left(\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} |q_{n,m}|^2\right)^{1/2}$$

та скалярний добуток

$$(p, q)_k = \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} p_{n,m} q_{n,m},$$

де $[\frac{kN}{2}]$ — ціла частина $\frac{kN}{2}$.

Оператор A діє також і в просторі l_2^k. Цей оператор будемо позначати A_k. Формула (5) показує, що оператор B також діє в l_2^k. Позначимо його через B_k. Тоді задача (1), (8) запишеться у вигляді

$$\ddot{q} = A_k q - B_k(q). \tag{9}$$

Лема 1.3. *Нехай виконується умова* (i). *Тоді*

$$(A_k q, q) \geq \alpha_0 \|q\|_k^2, \quad q \in l_2^k.$$

Доведення. Оскільки A_k — самоспряжений скінченновимірний оператор, то достатньо показати, що для будь-якого його власного значення λ маємо $\lambda \geq \alpha_0$. Якщо λ — власне значення A_k з власним вектором $q \in l_2^k$, то q є узагальненим власним вектором оператора A (див. [8], [19]). Отже, λ — точка спектру оператора A. Оскільки спектр A лежить у множині $[\alpha_0, +\infty)$, отримуємо те, що вимагалося. □

Надалі нам знадобляться деякі простори соболєвського типу. Нехай $T > 0$. Позначимо через X_T підпростір T-періодичних функцій із $H^1_{loc}(\mathbb{R}; l_2)$. Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(q, p)_T = \int_{-T/2}^{T/2} [(\dot{q}(t), \dot{p}(t)) + (q(t), p(t))] dt.$$

Відповідна норма в X_T позначається через $\|\cdot\|_T$.

Більш явно, простір X_T складається із послідовностей $q = \{q_{n,m}(t)\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ таких функцій $q_{n,m} \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, що $q_{n,m}(t+T) = q_{n,m}(t)$ і

$$\|q\|_T^2 = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \|q_{n,m}\|^2_{H^1(-T/2,T/2)} < \infty,$$

де

$$\|u\|^2_{H^1(a;b)} = \int_a^b [|\dot{u}(t)|^2 + |u(t)|^2] dt.$$

Згідно теорем про вкладення (див., напр., [8], [9]), X_T неперервно вкладений в простір $C_T(\mathbb{R}; l_2)$ неперервних T-періодичних функцій зі значеннями в l_2.

Аналогічно, $X_{T,k}$ позначає підпростір $H^1_{loc}(\mathbb{R}, l_2^k)$, що складається із T-періодичних функцій, зі скалярним добутком

$$(q, p)_{T,k} = \int_{-T/2}^{T/2} [(\dot{q}(t), \dot{p}(t))_k + (q(t), p(t))_k] dt$$

і відповідною нормою $\|\cdot\|_{T,k}$. Його елементи — послідовності $q = \{q_{n,m}(t)\}$ таких функцій $q_{n,m} \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, що $q_{n,m}(t+T) = q_n(t)$ і $q_{n+kN,m}(t) = q_{n,m+kN}(t) = q_{n,m}(t)$. Як і вище, $X_{T,k} \subset C_T(\mathbb{R}, l_2^k)$.

Перейдемо безпосередньо до варіаційних постановок для рівнянь (4) та (9). Першому з них відповідає функціонал

$$\Phi(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 + \frac{1}{2}(Aq(t), q(t)) - \sum_{n,m\in\ Z} V_{n,m}(q_{n,m}(t))\right] dt \tag{10}$$

на просторі X_T. Функціонал, що відповідає рівнянню (9), має вигляд

$$\Phi_k(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|_k^2 + \frac{1}{2}(A_k q(t), q(t))_k - \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} V_{n,m}(q_{n,m}(t))\right] dt \tag{11}$$

та визначений на просторі $X_{T,k}$. Ці функціонали коректно визначені на відповідних просторах. Дійсно, їх квадратичні члени скінченні відповідно до означень просторів X_T та $X_{T,k}$. Неквадратичні члени також скінченні, оскільки, згідно теорем вкладення, $q(t)$ — неперервна функція на $[-T/2, T/2]$ зі значеннями в l_2 або l_2^k відповідно, а згідно (ii),

$$|V_{n,m}(r)| \le C|r|^2$$

на будь-якому скінченному інтервалі зміни r.

Для формулювання наступного результату нагадаємо, що $\langle f, u\rangle$ позначає значення лінійного функціоналу f на елементі u.

Лема 1.4. *Нехай виконуються умови (i) та (ii). Тоді функціонали Φ і Φ_k належать класу C^1, а їх похідні задаються формулами*

$$\langle \Phi'(q), h\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \left[(\dot{q}(t), \dot{h}(t)) + (Aq(t), h(t)) - \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)\right] dt \tag{12}$$

$$\langle \Phi_k'(q), h\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \left[(\dot{q}(t), \dot{h}(t))_k + (A_k q(t), h(t))_k - \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)\right] dt, \tag{13}$$

для $h \in X_T$ та $h \in X_{T,k}$ відповідно.

Доведення. Розглянемо функціонал Φ. Нехай $q \in X_T$, $h \in X_T$ та $|\lambda| \le 1$. Тоді

$$\Phi(q+\lambda h) = \int_{-T/2}^{T/2} [\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 + \lambda(\dot{q}(t), \dot{h}(t)) + \frac{1}{2}\lambda^2\|\dot{h}(t)\|^2$$

$$+\frac{1}{2}(Aq(t) + \lambda Ah(t), q(t) + \lambda h(t)) - \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}(t) + \lambda h_{n,m}(t))dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} [\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 + \lambda(\dot{q}(t), \dot{h}(t)) + \frac{1}{2}\lambda^2\|\dot{h}(t)\|^2 + \frac{1}{2}(Aq(t), q(t))$$

$$+\lambda(Aq(t), h(t)) + \frac{1}{2}\lambda^2(Ah(t), h(t)) - \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}(t) + \lambda h_{n,m}(t))]dt.$$

Оскільки

$$\Phi(q+\lambda h)-\Phi(q)=\int_{-T/2}^{T/2}[\lambda(\dot q(t),\dot h(t))+\frac{1}{2}\lambda^2\|\dot h(t)\|^2+\lambda(Aq(t),h(t))$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^2(Ah(t),h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}(V_{n,m}(q_{n,m}(t)+\lambda h_{n,m}(t))-V_{n,m}(q_{n,m}(t)))]dt,$$

то

$$\langle\Phi'(q),h\rangle=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\Phi(q+\lambda h)-\Phi(q)}{\lambda}=\int_{-T/2}^{T/2}[(\dot q(t),\dot h(t))+(Aq(t),h(t))-$$

$$-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\lim_{\lambda\to 0}\frac{V_{n,m}(q_{n,m}(t)+\lambda h_{n,m}(t))-V_{n,m}(q_{n,m}(t))}{\lambda h_{n,m}(t)}h_{n,m}(t)]dt$$

$$=\int_{-T/2}^{T/2}[(\dot q(t),\dot h(t))+(Aq(t),h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)]dt.$$

Неважко переконатися, що похідна $\Phi'(q)$, задана формулою (12), неперервна по $q\in X_T$. Випадок Φ_k аналогічний. □

Наступне твердження зводить знаходження T-періодичних розв'язків рівнянь (4) та (9) до пошуку критичних точок відповідних функціоналів.

Лема 1.5. *Нехай виконуються умови* (i)–(iii)*. Тоді критичні точки функціоналів* Φ *та* Φ_k *є* T*-періодичними розв'язками рівнянь (4) та (9) відповідно.*

Доведення. Розглянемо тільки випадок функціоналу Φ. Другий випадок аналогічний.

Якщо $q\in X_T$ — критична точка функціоналу Φ, то за лемою 1.4

$$\langle\Phi'(q),h\rangle=\int_{-T/2}^{T/2}\left[(\dot q(t),\dot h(t))+(Aq(t),h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)\right]dt=0$$

для будь-якого $h\in X_T$. Або, інтегруючи частинами перший доданок, маємо

$$\int_{-T/2}^{T/2}\left[(-\ddot q(t),\dot h(t))+(Aq(t),h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)\right]dt=0$$

для будь-якого $h\in X_T$. Це означає, що q — слабкий розв'язок рівняння (4).

Отже,

$$\ddot q=Aq-B(q)$$

в сенсі узагальнених функцій. Однак за теоремою вкладення $q\in C(\mathbb{R},l_2)$. Отже, $Aq\in C(\mathbb{R},l_2)$ і, згідно умови (ii), $B(q)\in C(\mathbb{R},l_2)$. Таким чином, $\ddot q\in C(\mathbb{R},l_2)$ і значить, q — двічі неперервно диференційовна функція зі значеннями в l_2. Оскільки за означенням простору X_T q є T-періодичною функцією, то q — T-періодичний розв'язок рівняння (4). □

Далі нам знадобиться наступна проста лема, яка дає нерівність між нормами критичних точок і відповідними критичними значеннями для функціоналів Φ_k і Φ.

Лема 1.6. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді існують такі константи* $\varepsilon_0 > 0$ *і* $c > 0$, *які не залежать від* k, *що для будь-якої критичної точки функціоналів* Φ *або* Φ_k

$$\varepsilon_0 \le \|q\|^2 \le c\Phi(q)$$

або

$$\varepsilon_0 \le \|q\|_k^2 \le c\Phi_k(q)$$

відповідно.

Доведення. Розглянемо випадок функціоналу Φ. Випадок Φ_k аналогічний. Нехай $q \in l_2$ — критична точка Φ. Тоді $\Phi'(q) = 0$ і

$$\begin{aligned}\Phi(q) &= \Phi(q) - \frac{1}{\mu}\langle \Phi'(q), q\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot q(t)\|^2 + (Aq(t), q(t))\}dt \\ &- \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}(V_{n,m}(q_{n,m}(t)) - \frac{1}{\mu}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))q_{n,m}(t))dt.\end{aligned}$$

Згідно умов (i) та (iii),

$$\begin{aligned}\Phi(q) &\ge \frac{\mu-2}{2\mu}\int_{-T/2}^{T/2}(\|\dot q(t)\|^2 + \alpha_0\|q(t)\|^2)dt \\ &\ge \frac{\mu-2}{2\mu}\beta_0\|q\|_T^2,\end{aligned}$$

де $\beta_0 = \min(1, \alpha_0)$. Звідси випливає те, що вимагалося в другій нерівності.

Далі, оскільки $\langle \Phi'(q), q\rangle = 0$, то

$$\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot q(t)\|^2 + (Aq(t), q(t))\}dt = \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))q_{n,m}(t)dt.$$

А тому

$$\beta_0\|q\|_T^2 \le \int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot q(t)\|^2 + (Aq(t), q(t))\}dt = \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))q_{n,m}(t)dt.$$

Використовуючи лему 1.2, отримуємо

$$\beta_0\|q\|_T^2 \le \sigma(\|q\|_{C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^\infty)})\cdot\|q\|_T^2.$$

Оскільки $q \ne 0$, то звідси випливає, що

$$\beta_0 \le \sigma(\|q\|_{C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^\infty)}).$$

Згідно теореми вкладення,

$$\beta_0 \le \sigma(\|q\|_{C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^2)}) \le \sigma(C\cdot\|q\|_T)$$

з деяким $C > 0$.

Тепер достатньо покласти

$$\varepsilon_0^{1/2} = C^{-1} \cdot \sigma^{-1}(\beta_0),$$

і лему доведено. □

При доведенні основної теореми нам знадобиться одна проста властивість стаціонарних розв'язків. Зауважимо, що будь-який стаціонарний, що не залежить від t, розв'язок систем, які розглядалися вище, є T-періодичним для будь-якого $T > 0$. Стаціонарні розв'язки задовольняють рівняння

$$Aq = B(q) \tag{14}$$

або

$$A_k q = B_k(q) \tag{15}$$

в залежності від граничних умов. Зауважимо, що обмеження функціоналів Φ та Φ_k на простори сталих функцій мають вигляд $T \cdot \varphi(q)$ і $T \cdot \varphi_k(q)$, де

$$\varphi(q) = \frac{1}{2}(Aq, q) - \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}), \quad q \in l_2,$$

$$\varphi_k(q) = \frac{1}{2}(A_k q, q)_k - \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} V_{n,m}(q_{n,m}), \quad q \in l_2^k.$$

Отже, сталі розв'язки рівнянь (14) і (15) є критичними точками функціоналів φ та φ_k відповідно. Причому, при виконанні умов (i)–(iii) $q \equiv 0$ є тривіальним стаціонарним розв'язком.

Лема 1.7. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді існує така константа $\delta_0 > 0$, яка не залежить від k, що для будь-якого ненульового розв'язку $q \in l_2^k$ (відповідно $q \in l_2$) рівняння (15) (відповідно (14))*

$$\|q\|_k \geq \delta_0$$

(відповідно

$$\|q\| \geq \delta_0).$$

Крім того,

$$\varphi_k(q) \geq \frac{\mu - 2}{2\mu} \alpha_0 \delta_0^2,$$

$$\varphi(q) \geq \frac{\mu - 2}{2\mu} \alpha_0 \delta_0^2$$

відповідно.

Доведення. Розглянемо випадок рівняння (15). Помноживши його скалярно на q, маємо

$$(A_k q, q)_k = (B_k(q), q)_k.$$

Згідно умови (i), отримуємо

$$\alpha_0 \|q\|_k^2 \le (B_k(q), q)_k = \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} V'_{n,m}(q_{n,m}) q_{n,m}. \tag{16}$$

За лемою 1.2

$$V'_n(r) r \le \sigma(|r|) r^2, \tag{17}$$

де функція $\sigma(r), r \ge 0$, неперервна, монотонно зростає, $\sigma(0) = 0$ і $\sigma(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$.

Із нерівності (16) отримуємо, що

$$\alpha_0 \|q\|_k^2 \le \sigma(\|q\|_k) \|q\|_k^2.$$

Оскільки $q \ne 0$, то

$$\sigma(\|q\|_k) \ge \alpha_0 > 0,$$

отже,

$$\|q\|_k \ge \beta_0 = \sigma^{-1}(\alpha_0) > 0.$$

Доведемо другу частину леми. Оскільки q — критична точка φ_k, то $\varphi'_k(q) = 0$. Отже,

$$\varphi_k(q) = \varphi_k(q) - \frac{1}{\mu} \langle \varphi'_k(q), q \rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) (A_k q, q)_k - \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \left(V_{n,m}(q_{n,m}) - \frac{1}{\mu} V'_{n,m}(q_{n,m}) q_{n,m} \right).$$

Згідно умов (i) та (iii),

$$\varphi_k(q) \ge \frac{\mu - 2}{2\mu} \cdot \alpha_0 \|q\|_k^2 \ge \frac{\mu - 2}{2\mu} \cdot \alpha_0 \beta_0^2,$$

тобто лему доведено. □

2 Основні результати

Доведемо спочатку існування T-періодичних розв'язків рівняння (9). Ця задача має незалежний інтерес, однак результат про існування її розв'язків буде використано для доведення існування T-періодичних розв'язків рівняння (4).

Для побудови шуканих розв'язків, згідно леми 1.5, достатньо знайти нетривіальні критичні точки функціоналу Φ_k в просторі $X_{T,k}$. З цією метою буде використана теорема про гірський перевал.

Наведемо спочатку деякі попередні відомості. Нехай φ — C^1-функціонал на гільбертовому просторі H. Говорять, що φ задовольняє умову Пале–Смейла, якщо виконується наступна умова:

(PS) Нехай $u^{(m)}$ — така послідовність елементів H, що послідовність $\varphi(u^{(m)})$ обмежена і $\varphi'(u^{(m)}) \to 0$. Тоді $u^{(m)}$ містить збіжну підпослідовність.

Зауважимо, що при перевірці цієї умови можна без обмеження загальності вважати, що числова послідовність $\varphi'(u^{(m)})$ збігається.

Сформулюємо тепер теорему про гірський перевал в необхідній нам формі (доведення див. в [18], [20]).

Теорема (Про гірський перевал)**.** *Нехай φ — C^1-функціонал на гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$, що задовольняє умову Пале–Смейла. Припустимо, що існує $e \in H$ і $r > 0$ такі, що $\|e\| > r$ і*

$$\beta = \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e). \tag{18}$$

Нехай

$$b = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{\tau\in[0,1]} \varphi(\gamma(\tau)), \tag{19}$$

де

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0;1];H) : \gamma(0) = 0, \varphi(\gamma(1)) \leq 0\}. \tag{20}$$

Тоді b — критичне значення функціоналу φ і $b \geq \beta$.

Зауваження 2.1. *Нехай $\gamma_0 \in \Gamma$ — деякий елемент (шлях). З побудови критичного значення b маємо*

$$b \leq \max_{\tau\in[0,1]} \varphi(\gamma_0(\tau)).$$

Це дозволяє оцінити критичні значення зверху.

В наступних лемах перевіряються умови цієї теореми для функціоналу Φ_k. Той факт, що Φ_k — функціонал класу C^1, вже встановлено в лемі 1.4.

Лема 2.1. *При виконанні умов (i)–(iii) функціонал Φ_k задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доведення. Нехай $u^{(p)} \in X_{T,k}$ — така послідовність, що $\Phi_k'(u^{(p)}) \to 0$ і $\Phi_k(u^{(p)}) \leq C$. Тоді

$$\Phi_k(u^{(p)}) - \frac{1}{\mu}\langle \Phi_k'(u^{(p)}), u^{(p)}\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int_{-T/2}^{T/2} \{\|\dot{u}^{(p)}(t)\|_k^2$$

$$+(A_k u^{(p)}(t), u^{(p)}(t))_k\}dt - \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \{V_{n,m}(u_{n,m}^{(p)}(t))$$

$$-\frac{1}{\mu} V_{n,m}'(u_{n,m}^{(p)}(t))u_{n,m}^{(p)}(t)\}dt \geq \frac{\mu-2}{2\mu}\beta_0 \|u^{(p)}\|_{T,k}^2,$$

де $\beta_0 = \min(1, \alpha_0)$. При достатньо великому p маємо

$$|\langle \Phi_k'(u^{(p)}), u^{(p)}\rangle| \leq \mu.$$

Тому

$$\frac{\mu-2}{2\mu}\beta_0\|u^{(p)}\|_k^2 \leq C + \|u^{(p)}\|_{T,k}.$$

Остання нерівність не може виконуватися для необмеженої послідовності $u^{(p)}$. Таким чином, вже доведено, що послідовність $u^{(p)}$ — обмежена.

Оскільки простір $X_{T,k}$ — гільбертів, а послідовність $u^{(p)}$ — обмежена, то, переходячи до підпослідовності, вважаємо, що $u^{(p)} \to u$ слабко в $X_{T,k}$. Оскільки простір l_2^k — скінченновимірний, то вкладення $X_{T,k} \subset C(-T/2, T/2; l_2^k)$ — компактне. Тому $u^{(p)} \to u$ сильно в $C(-T/2, T/2; l_2^k)$.

Маємо

$$\langle \Phi_k'(u^{(p)}) - \Phi_k'(u^{(l)}), u^{(p)} - u^{(l)}\rangle = \int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot{u}^{(p)}(t) - \dot{u}^{(l)}(t)\|_k^2$$

$$+(A_k u^{(p)}(t) - A_k u^{(l)}(t), u^{(p)}(t) - u^{(l)}(t))_k\}dt - \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\{V_{n,m}'(u_{n,m}^{(p)}(t))$$

$$-V_{n,m}'(u_{n,m}^{(l)}(t)\}(u_{n,m}^{(p)}(t) - u_{n,m}^{(l)}(t))dt \geq \beta_0\|u^{(p)} - u^{(l)}\|_{T,k}^2$$

$$-\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\{V_n'(u_{n,m}^{(p)}(t)) - V_{n,m}'(u_{n,m}^{(l)}(t))\}(u_{n,m}^{(p)}(t) - u_{n,m}^{(l)}(t))dt,$$

де $\beta_0 = \min(1, \alpha_0)$. Отже,

$$\beta_0\|u^{(p)} - u^{(l)}\|_{T,k}^2 \leq \langle \Phi_k'(u^{(p)}) - \Phi_k'(u^{(l)}), u^{(p)} - u^{(l)}\rangle$$

$$+\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\{V_{n,m}'(u_{n,m}^{(p)}(t)) - V_{n,m}'(u_{n,m}^{(l)}(t)\}(u_{n,m}^{(p)}(t) - u_{n,m}^{(l)}(t))dt. \qquad (21)$$

Оскільки $\Phi_k'(u^{(p)}) \to 0$ сильно, а $u^{(p)}$ — обмежена, то перший член в правій частині (21) прямує до нуля при $p, l \to \infty$. Другий член також збігається до нуля, оскільки $u^{(p)} \to u$ сильно в $C(-T/2, T/2; l_2^k)$. Отже, $\|u^{(p)} - u^{(l)}\|_{T,k} \to 0$ при $p, l \to \infty$. Таким чином, $u^{(p)}$ — послідовність Коші в $X_{T,k}$. Враховуючи перехід до підпослідовності на початку доведення, отримуємо те, що вимагалося. □

Лема 2.2. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді існують такі $r_0 > 0$ і $e \in X_T$ з $\|e\|_k > r_0$, що*

$$\inf_{\|u\|_{T,k}=r_0}\Phi_k(u) > 0 \qquad (22)$$

і $\Phi_k(e) \leq 0$. Число r_0 може бути вибране таким, що не залежить від k.

Доведення. Використаємо нерівність (17). Згідно (iii),

$$V_{n,m}(r) \leq \mu^{-1}\sigma(|r|)r^2.$$

Маємо

$$\Phi_k(u) = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot{u}(t)\|_k^2 + (A_k u(t), u(t))_k\}dt - \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} V_{n,m}(u_{n,m}(t))dt$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot{u}(t)\|_k^2 + (A_k u(t), u(t))_k\}dt - \mu^{-1}\sigma(\|u\|_k)\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}|u_{n,m}(t)|^2 dt.$$

Використовуючи (i) і той факт, що другий інтеграл в правій частині більший за $\|u\|_{T,k}^2$, отримуємо

$$\Phi_k(u) \geq \frac{\beta_0}{2}\|u\|_{T,k}^2 - \mu^{-1}\sigma(\|u\|_{T,k})\|u\|_{T,k}^2$$
$$= \{\frac{\beta_0}{2} - \mu^{-1}\sigma(\|u\|_k)\}\|u\|_{T,k}^2,$$

де $\beta_0 = \min(1, \alpha_0)$. Виберемо r_0 із умови $\sigma(r_0) = \mu\beta_0/4$. Отримаємо

$$\Phi_k(u) \geq \frac{\beta_0}{4}r_0^2,$$

що доводить (22).

Для доведення другого твердження зафіксуємо ненульовий елемент $u \in X_{T,k}$. Згідно леми 1.1, маємо при $\tau > 0$

$$\Phi_k(\tau u) = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\tau\dot{u}(t)\|_k^2 + (A_k(\tau u(t)), \tau u(t))_k\}dt$$
$$- \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} V_{n,m}(\tau u_n(t))dt$$
$$\leq \frac{\tau^2}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot{u}(t)\|_k^2 + (A_k u(t), u(t))_k\}dt$$
$$-d\tau^\mu\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}|u_{n,m}(t)|^\mu dt + Nd_0T.$$

Оскільки $\mu > 2$, то при достатньо великому $\tau > 0$ маємо $\Phi_k(\tau u) < 0$. Таким чином, твердження леми виконується з $e = \tau u$. □

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді для будь-яких $T > 0$ і натурального k рівняння (9) має ненульовий T-періодичний розв'язок $q = q^{(T,k)}$. При цьому для будь-якого $T > 0$ існують такі константи $\varepsilon_0 > 0$ і $C > 0$, які не залежать від k, що*

$$\varepsilon_0 \leq \|q^{(T,k)}\| \leq C,$$

$$\varepsilon_0 \leq \Phi_k(q^{(T,k)}) \leq C.$$

Більше того, існує таке $T_0 > 0$, яке не залежить від k, що $q^{(T,k)}$ не є сталою функцією і залежить від t при всіх $T \geq T_0$.

Доведення. Згідно лем 2.1 і 2.2, для функціоналу Φ_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал. Таким чином, існування розв'язку $q \neq 0$ доведено. Залишається перевірити, що при достатньо великих T розв'язок $q = q^{(T,k)}$ не є сталим.

Нехай $q^{(0)}$ — деякий сталий розв'язок. Тоді, згідно леми 1.7, для відповідного критичного значення $\Phi_k(q^{(0)})$ маємо

$$\Phi_k(q^{(0)}) \geq \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 \cdot T, \tag{23}$$

де $\delta_0 > 0$ з леми 1.7.

Тепер оцінимо $\Phi_k(q^{(T,k)}) = \Phi_k(q)$ зверху. Нехай $u \in X_T, u \neq 0$. Тоді, як показано в доведенні леми 2.2, $\Phi_k(\tau u) \leq 0$ при всіх достатньо великих $\tau > 0$. Згідно зауваження 2.1, для критичного значення маємо

$$\Phi_k(q) \leq \max_{\tau \geq 0} \Phi_k(\tau u). \tag{24}$$

Візьмемо в якості $u(t)$ таку функцію, що $u_{n,m}(t) \equiv 0$ при $(n,m) \neq (0,0)$, $u_{0,0}(t) = \sin(2\pi t/\eta T)$ при $0 \leq t \leq \eta T$ і $u_{0,0}(t) = 0$ при $\eta T \leq t \leq T$, де $\eta \in (0,1)$ буде вибрано пізніше. Припускається, що $u_{0,0}(t)$ продовжена на всю вісь як T-періодична функція. Тоді, використовуючи лему 1.1, одержуємо

$$\Phi_k(\tau u) = \frac{\tau^2}{2}\int_0^{\eta T}\{|\dot{u}_{0,0}(t)|^2 + c_{0,0}|u_{0,0}(t)|^2\}dt - \int_0^{\eta T} V_{0,0}(\tau u_{0,0}(t))dt$$

$$\leq \frac{\tau^2}{2}\int_0^{\eta T}\{|\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi t}{\eta T}|^2 + c_{0,0}|\sin\frac{2\pi t}{\eta T}|^2\}dt - d\tau^\mu\int_0^{\eta T}|\sin\frac{2\pi t}{\eta T}|^\mu dt + d_0\eta T. \tag{25}$$

Покладемо

$$A_\mu = \int_0^1 |\sin 2\pi t|^\mu dt.$$

Зауважимо, що

$$A_2 = \int_0^1 \sin^2 2\pi t \cdot dt = \int_0^1 \cos^2 2\pi t \cdot dt = \frac{1}{2}.$$

Із (25) випливає, що

$$\Phi_k(\tau u) \leq \frac{\tau^2}{4}\{\frac{4\pi^2}{\eta T} + c_{0,0}\eta T\} - dA_\mu(\eta T)\tau^\mu + d_0\eta T.$$

Нехай $T_0 = \frac{2\pi}{\eta\sqrt{c_{0,0}}}$ і $T \geq T_0$. Тоді

$$\frac{4\pi^2}{\eta T} \leq c_{0,0}\eta T$$

і

$$\Phi_k(\tau u) \leq \frac{\tau^2}{2}c_{0,0}(\eta T) - dA_\mu\tau^\mu(\eta T) + d_0(\eta T)$$

$$= \eta[\frac{\tau^2}{2}c_{0,0} - dA_\mu\tau^\mu + d_0] \cdot T.$$

Нехай

$$m_0 = \max_{\tau \geq 0} [\frac{\tau^2 c_{0,0}}{2} - dA_\mu \tau^\mu + d_0].$$

Тоді, згідно (24),

$$\Phi_k(q) \leq \eta m_0 T. \tag{26}$$

Виберемо тепер η таким, що

$$\eta < \frac{\mu - 2}{2\mu m_0} \alpha_0 \delta_0^2.$$

Тоді з (23) і (26) випливає наступне

$$\Phi_k(q) \leq \eta m_0 T < \frac{\mu - 2}{2\mu} \alpha_0 \delta_0^2 T \leq \Phi_k(q^{(0)}).$$

Звідси слідує, що при $T \geq T_0$ розв'язок $q = q^{(T,k)}$ не може бути сталим. □

Зауваження 2.2. *Зауважимо, що числа η, m_0, так як і α_0, δ_0, не залежать від k і T. Отже, при будь-яких k і $T \geq T_0$ справджується нерівність*

$$\Phi_k(q^{(T,k)}) \leq \eta m_0 T < \frac{\mu - 2}{2\mu} \alpha_0 \delta_0^2 T, \tag{27}$$

де $\eta < \frac{\mu-2}{2\mu m_0} \alpha_0 \delta_0^2$ — довільне.

Тепер встановимо основний результат статті — існування T-періодичних розв'язків рівняння (4). Розв'язки цього рівняння, за лемою 1.5, є критичними точками функціоналу Φ. Для цього функціоналу справедливим буде твердження аналогічне лемі 2.2. Однак, умова Пале-Смейла не виконується. Ми не будемо це доводити. Зауважимо тільки, що в доведенні леми 2.1 використана компактність відповідного вкладення, яка відсутня у випадку функціоналу Φ.

Таким чином, теорема про гірський перевал не може бути застосована до функціоналу Φ, і тому розв'язки відповідної задачі будуть побудовані як границя розв'язків $q^{(T,k)}$ при $k \to \infty$. Для цього спочатку встановимо дві прості леми. Перша з них отримана в [17], а друга легко з неї слідує.

Лема 2.3. *Нехай $v^{(k)} \in l_2$, причому $\|v^{(k)}\|$ — обмежена і $v^{(k)} \to 0$ в l^∞. Тоді для будь-якого $p > 2 : v^{(k)} \to 0$ в l_p, де l_p — банахів простір всіх p–сумовних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ з нормою*

$$\|q\|_{l_p} = \left[\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} |q_{n,m}|^p \right]^{1/p}.$$

Доведення. Маємо

$$\|v^{(k)}\|_{l_p}^p = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} |v_{n,m}^{(k)}|^p = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} |v_{n,m}^{(k)}|^{p-2} |v_{n,m}^{(k)}|^2$$

$$\leq \{ \sup_{n,m \in \mathbb{Z}} |v_{n,m}^{(k)}| \}^{p-2} \cdot \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} |v_{n,m}^{(k)}|^2 = \|v^{(k)}\|_{l^\infty}^p \|v^{(k)}\|^2.$$

Оскільки $p > 2$ і $\|v^{(k)}\|_{l^\infty} \to 0$, звідси слідує те, що й вимагалося. □

Перш ніж сформулювати наступну лему, нагадаємо, що $\|\cdot\|_{l_p^k}$ на просторі kN-періодичних послідовностей визначається формулою

$$\|u\|_{l_p^k} = \left[\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} |u_{n,m}|^p\right]^{1/p}.$$

При кожному фіксованому k і різних p ці норми еквівалентні, але ця еквівалентність не є рівномірною по k.

Лема 2.4. *Нехай $u^{(k)} \in l_2^k$, причому $\|u^{(k)}\|_k$ — обмежена і $u^{(k)} \to 0$ в l^∞. Тоді для будь-якого $p > 2$ маємо $\|u^{(k)}\|_{l_p^k} \to 0$.*

Доведення. Визначимо послідовність $v^{(k)} \in l_2$ наступним чином: $v_{n,m}^{(k)} = u_{n,m}^{(k)}$ при $-[\frac{kN}{2}] \le n,m \le kN - [\frac{kN}{2}] - 1$ і $v_{n,m}^{(k)} = 0$ в протилежному випадку. Тоді неважко бачити, що

$$\|v^{(k)}\|_{l^\infty} \le \|u^{(k)}\|_{l^\infty},$$

$$\|v^{(k)}\|_{l_p} = \|u^{(k)}\|_{l_p^k}.$$

Отже, $\|v^{(k)}\|_{l^\infty} \to 0$ і $\|v^{(k)}\| = \|u^{(k)}\|_k$ — обмежена. За лемою 2.3

$$\|v^{(k)}\|_{l_p} = \|u^{(k)}\|_{l_p^k} \to 0$$

для будь-якого $p > 2$, тобто лему доведено. □

Сформулюємо тепер основний результат цієї статті.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді для будь-якого $T > 0$ задача (1), (2), тобто рівняння (4), має ненульовий T-періодичний розв'язок. При цьому існує таке $T_0 > 0$, що при $T \ge T_0$ цей розв'язок не є сталим.*

Доведення. Позначимо через $q^{(k)}(t) = \{q_{n,m}^{(k)}(t)\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ розв'язок $q^{(T,k)}$, побудований в теоремі 1. Згідно просторової періодичності, $\{q_{n+kN,m}^{(k)}(t)\}$ і $\{q_{n,m+kN}^{(k)}(t)\}$ — також розв'язки задачі (1), (8). За теоремою 1 маємо

$$\varepsilon_0 \le \|q^{(k)}\|_{T,k} \le C, \tag{28}$$

$$\varepsilon_0 \le \Phi_k(q^{(k)}) \le C, \tag{29}$$

де константи $0 < \varepsilon_0 \le C$ не залежать від k. Згідно теореми вкладення, збільшуючи константу C, отримуємо, що

$$\|q^{(k)}\|_{C(-T/2,T/2;l_2^k)} \le C. \tag{30}$$

Зокрема, для будь-яких $n,m \in \mathbb{Z}$

$$\|q_{n,m}^{(k)}\|_{C(-T/2,T/2)} \le C. \tag{31}$$

Тепер доведемо наступну властивість розв'язків $q^{(k)}$. Для будь-якого k існує таке $n_k \in \mathbb{Z}$, що

$$\|q^{(k)}_{n_k,m_k}\|_{C(-T/2,T/2)} \geq \delta \tag{32}$$

з деяким $\delta > 0$, що не залежить від k. Для доведення цього, покладемо

$$u^{(k)}_{n,m} = \|q^{(k)}_{n,m}\|_{C(-T/2,T/2)}.$$

Тоді для $u^{(k)} = \{u^{(k)}_{n,m}\}$

$$\|u^{(k)}\|^2_{l^k_2} = \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \|q^{(k)}_{n,m}\|^2_{C(-T/2,T/2)} \leq C_1^2 \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \|q^{(k)}_{n,m}\|^2_{H^1(-T/2,T/2)}$$

$$= C_1^2 \|q^{(k)}\|^2_{T,k} \leq C_1^2 C^2$$

з деяким $C_1 > 0$, що не залежить від k. Тут використана неперервність вкладення

$$H^1\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \subset C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$$

та нерівність (28). Таким чином, $\|u^{(k)}\|_k$ — обмежена. Нерівність (32) означає, що

$$u^{(k)}_{n_k,m_k} \geq \delta$$

з деякими n_k і m_k. Припустимо, що остання нерівність не виконується. Тоді $\|u^{(k)}\|_{l^\infty} \to 0$. Отже, згідно леми 2.4, $\|u^{(k)}\|_{l^k_p} \to 0$ для будь-якого $p > 2$. Однак,

$$\|u^{(k)}\|^p_{l^k_p} = \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \|q^{(k)}_{n,m}\|^p_{C(-T/2,T/2)}.$$

Оскільки вкладення

$$C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \subset L^p\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$$

неперевне, то звідси випливає, що

$$\|u^{(k)}\|^p_{l^k_p} \geq C_2 \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \|q^{(k)}_{n,m}\|^p_{L^p(-T/2,T/2)}$$

$$= C_2 \|q^{(k)}\|^p_{L^p(-T/2,T/2;l^k_p)}.$$

Таким чином,

$$\|q^{(k)}\|_{L^p(-T/2,T/2;l^k_p)} \to 0 \tag{33}$$

при $k \to \infty$.

Зафіксуємо тепер довільне $p > 2$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться така константа $M = M_\varepsilon > 0$, що

$$|V'_{n,m}(r)| \leq \varepsilon|r| + M|r|^{p-1}, \quad |r| \leq C. \tag{34}$$

Справді, згідно умови (ii),

$$|V'_{n,m}(r)| \leq \varepsilon|r|, \quad |r| \leq r_\varepsilon,$$

з деяким $r_\varepsilon > 0$. При $r_\varepsilon \leq |r| \leq C$ маємо

$$|V'_{n,m}(r)| \leq M|r|^{p-1},$$

де

$$M = \max_{n,m} \sup_{r_\varepsilon \leq |r| \leq C} \frac{|V'_{n,m}(r)|}{|r|^{p-1}}.$$

Звідси випливає (34).

Оскільки $q^{(k)}$ — критична точка функціоналу Φ_k, то

$$\langle \Phi'_k(q^{(k)}), q^{(k)} \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \{\|\dot{q}^{(k)}(t)\|_k^2 + (A_k q^{(k)}(t), q^{(k)}(t))_k\} dt$$

$$- \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t)) dt = 0.$$

Використовуючи (34) та (31), отримуємо, що

$$\beta_0 \|q^{(k)}\|_{T,k}^2 \leq \int_{-T/2}^{T/2} \{\|\dot{q}^{(k)}(t)\|_k^2 + (A_k q^{(k)}(t), q^{(k)}(t))_k\} dt$$

$$= \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t)) dt$$

$$\leq \varepsilon \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} |q^{(k)}_{n,m}(t)|^2 dt + M \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} |q^{(k)}_{n,m}(t)|^p dt$$

$$= \varepsilon \|q^{(k)}\|^2_{L^2(-T/2,T/2;l_2^k)} + M\|q^{(k)}\|^p_{L^p(-T/2,T/2;l_p^k)}$$

$$\leq \varepsilon \|q\|_{T,k}^2 + M\|q^{(k)}\|^p_{L^p(-T/2,T/2;l_p^k)}.$$

Вибираючи $\varepsilon = \frac{\beta_0}{2}$, одержуємо наступне

$$\frac{\beta_0}{2} \|q^{(k)}\|_{T,k}^2 \leq M\|q^{(k)}\|^p_{L^p(-T/2,T/2;l_p^k)}.$$

Згідно (33), звідси слідує, що

$$\|q^{(k)}\|_{T,k} \to 0$$

при $k \to \infty$. Однак, це суперечить першій нерівності в (28). Тим самим властивість (32) доведена.

Замінюючи, якщо потрібно, $q^{(k)}_{n,m}$ на $(q^{(k)}_{n+aN,m+bN})$ з деякими $a, b \in \mathbb{Z}$, можемо вважати, що в (32) $0 \le n_k, m_k \le N-1$. Однак, таких значень n_k і m_k скінченне число. Тому, переходячи до підпослідовності (по k), можемо вважати, що всі n_k і m_k співпадають, тобто $n_k = n_0$ і $m_k = m_0$. Тоді

$$\|q^{(k)}_{n_0,m_0}\|_{C(-T/2,T/2)} \ge \delta > 0. \tag{35}$$

Згідно нерівності (28) і компактності вкладення

$$H^1\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \subset C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right),$$

переходячи до підпослідовності (по k), можемо вважати, що для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}$ існує таке $q_{n,m} \in H^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, що $q^{(k)}_{n,m} \to q_{n,m}$ слабко в $H^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ і сильно в $C(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$. Покладемо $q = (q_{n,m})$. Переходячи до границі в (35), отримуємо

$$\|q_{n_0,m_0}\|_{C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})} \ge \delta_0 > 0,$$

тобто $q \ne 0$. Далі, для будь-якого натурального l і достатньо великого k :

$$\sum_{|n|,|m|\le l} \|q^{(k)}_{n,m}\|^2_{H^1(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})} \le \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \|q^{(k)}_{n,m}\|^2_{H^1(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})} = \|q^{(k)}\| \le C^2,$$

згідно (28). Переходячи до границі при $k \to \infty$ та враховуючи слабку напівнеперервність норми в H^1 знизу, отримуємо

$$\sum_{|n|,|m|\le l} \|q_n\|^2_{H^1(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})} \le C^2.$$

Тепер перехід до границі при $m \to \infty$ показує, що $\|q\|_T \le C < \infty$ і $q \in X_T$.

Покажемо тепер, що q — критична точка функціоналу Φ. Для цього перевіримо, що

$$\langle \Phi'(q), h\rangle = 0 \tag{36}$$

для будь-якого $h \in X_T$. Однак, множина таких функцій $h = \{h_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$, що $h_{n,m} = 0$ для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$, окрім скінченного числа, — всюди щільна в X_T. Тому рівність (36) достатньо перевірити тільки для таких функцій.

Нехай $h = (h_{n,m}) \in X_T$ така, що $h_{n,m} = 0$ при $|n|, |m| \ge l$. Для достатньо великого k коректно визначена така функція $h^{(k)} \in X_{T,k}$, що $h^{(k)}_{n,m} = h_{n,m}$ при $-[\frac{kN}{2}] \le n, m \le kN - [\frac{kN}{2}] - 1$. Оскільки $q^{(k)}$ — критична точка Φ_k, то

$$0 = \langle \Phi'_k(q^{(k)}), h^{(k)}\rangle = \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{q}^{(k)}_{n,m}(t)\dot{h}^{(k)}_{n,m}(t)dt$$

$$+ \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} (a_{n-1,m}q^{(k)}_{n-1,m}(t) + a_{n,m}q^{(k)}_{n+1,m}(t) + b_{n,m-1}q^{(k)}_{n,m-1}(t) + b_{n,m}q^{(k)}_{n,m+1}(t)$$

$$+c_{n,m}q^{(k)}_{n,m}(t))h^{(k)}_{n,m}(t)dt-\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\int_{-T/2}^{T/2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))h^{(k)}_{n,m}(t)dt.$$

Згідно означення $h^{(k)}$, при достатньо великому k сумування в правій частині останньої формули поширюється, фактично, на область $|n|,|m|\le l$, і ми отримуємо

$$\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}\dot q^{(k)}_{n,m}(t)\dot h^{(k)}_{n,m}(t)dt+\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}(a_{n-1,m}q^{(k)}_{n-1,m}(t)+a_{n,m}q^{(k)}_{n+1,m}(t)$$

$$+b_{n,m-1}q^{(k)}_{n,m-1}(t)+b_{n,m}q^{(k)}_{n,m+1}(t)+c_{n,m}q^{(k)}_{n,m}(t))h_{n,m}(t)dt$$

$$-\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))h_{n,m}(t)dt=0.$$

Оскільки $q_n\to q$ слабко в $H^1(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ і сильно в $C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$, то в останній рівності можна перейти до границі при $k\to\infty$. В результаті отримуємо

$$\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}\dot q_{n,m}\dot h_{n,m}dt+(a_{n-1,m}q_{n-1,m}(t)+a_{n,m}q_{n+1,m}(t)+b_{n,m-1}q_{n,m-1}(t)+b_{n,m}q_{n,m+1}(t)$$

$$+c_{n,m}q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)dt-\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)dt=0.$$

При зробленому виборі h це і є рівність (36). Таким чином, існування ненульового розв'язку доведено.

Залишається перевірити, що q не може бути константою, якщо T — достатньо велике. Маємо

$$\Phi_k(q^{(k)})=\Phi_k(q^{(k)})-\frac{1}{2}\langle\Phi'_k(q^{(k)}),h^{(k)}\rangle$$

$$=\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\int_{-T/2}^{T/2}\{\frac{1}{2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))q^{(k)}_{n,m}(t)-V_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))\}dt.$$

Оскільки, згідно (iii), всі доданки в правій частині невід'ємні, то для довільного фіксованого l і достатньо великого k

$$\Phi_k(q^{(k)})\ge\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}\{\frac{1}{2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))q^{(k)}_{n,m}(t)-V_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))\}dt.$$

Згідно зауваження 2.2, звідси слідує, що

$$\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}\{\frac{1}{2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))q^{(k)}_{n,m}(t)-V_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))\}dt\le\eta m_0T<\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2T$$

при достатньо малому η і

$$T\ge T_0=\frac{2\pi}{\eta\sqrt{c_{0,0}}}$$

(див. доведення теореми 2). Оскільки для будь-яких n і m маємо $q_{n,m}^{(k)} \to q_{n,m}$ в $C(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, то, переходячи до границі, отримуємо

$$\sum_{|n|,|m|\leq l} \int_{-T/2}^{T/2} \{\frac{1}{2} V'_{n,m}(q_{n,m}(t)) q_{n,m}(t) - V_{n,m}(q_{n,m}(t))\} dt \leq \eta m_0 T < \frac{\mu - 2}{2\mu} \alpha_0 \delta_0^2 T.$$

Тепер перейдемо до границі при $l \to \infty$. В результаті отримаємо

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \int_{-T/2}^{T/2} \{\frac{1}{2} V'_{n,m}(q_{n,m}(t)) q_{n,m}(t) - V_{n,m}(q_{n,m}(t))\} dt \leq \eta m_0 T < \frac{\mu - 2}{2\mu} \alpha_0 \delta_0^2 T.$$

Оскільки $\Phi'(q) = 0$, то ліва частина цієї нерівності рівна

$$\Phi(q) = \Phi(q) - \frac{1}{2} \langle \Phi'(q), q \rangle.$$

Таким чином,

$$\Phi(q) \leq \eta m_0 T < \frac{\mu - 2}{2\mu} \alpha_0 \delta_0^2 T. \tag{37}$$

Згідно леми 2.1, для будь-якого ненульового сталого розв'язку відповідне критичне значення не менше правої частини (37). Звідси, як і в доведенні теореми 2, робимо висновок, що розв'язок q не може бути сталим при $T \geq T_0$. Теорему доведено. □

Література

1. Бак С.М. *Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній гратці* // Математичні студії. — 2011. — Т.35, №1. — С. 60–65.
2. Бак С.М. *Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній гратці* // Математичне та комп'ютерне моделювання. — 2011. — Вип.5. — С. 3–9.
3. Бак С.М., Баранова О.О., Білик Ю.П. *Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці* // Математичне та комп'ютерне моделювання. — 2010. — Вип.4. — С. 18–24.
4. Бак С.М. *Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів* // Математичні студії. — 2006. — Т.26, №2. — С. 140–153.
5. Бак С.Н., Панков А.А. *Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках* // Український математичний вісник. — 2010. — Т.7, №2. — С. 154–175.
6. Бак С.Н., Панков А.А. *О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов* // Доповіді НАН України. — 2004. — №9. — С. 13–16.
7. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — К.: Наук. думка, 1965. — 799 с.
8. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. — К.: Вища школа, 1990. — 600 с.
9. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
10. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

11. Aubry S. *Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization*, Physica D, **103** (1997), 201–250.

12. Bak S.M. *Peridoc traveling waves in chains of oscillators*, Communications in Mathematical Analysis, **3**, 1 (2007), 19–26.

13. Braun O.M., Kivshar Y.S. *Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model*, Physics Repts, **306** (1998), 1–108.

14. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel–Kontorova model, Springer, Berlin, 2004.

15. Feckan M., Rothos V. *Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions*, Nonlinearity, **20** (2007), 319–341.

16. Friesecke G., Matthies K. *Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice*, Discrete and continuous dynamical systems, **3**, 1 (2003), 105–114.

17. Pankov A., Zakharchenko N. *On some discrete variational problems*, Acta Appl. Math., **65** (2001), 295–303.

18. Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, Providence, R. I.: American Math. Soc., 1986.

19. Teschl G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices, Providence, R. I.: American Math. Soc., 2000.

20. Willem M. Minimax theorems, Boston, Birkhäuser, 1996.

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
Вінниця, Україна
e-mail: *sergiy.bak@gmail.com*

Надійшло 01.03.2012

Bak S.M. *Existence of the time periodic solutions of system of oscillators on 2D–lattice*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 175–196.

It is considered the system of differential equations that describes the dynamics of an infinite system of oscillators on 2D–lattice. Results on existence of the time periodic solutions are obtained. By means of the mountain pass theorem, it is obtained sufficient conditions for the existence of such solutions.

Бак С.Н. *Существование периодических по времени решений системы осцилляторов на двумерной решетке* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 175–196.

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая динамику бесконечной системы осцилляторов на двумерной решетке. Получено результат о существовании периодических по времени решений. С помощью теоремы о горном перевале получены достаточные условия существования таких решений.