ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

Факультет математики, фізики, комп’ютерних наук і технологій

Кафедра математики та інформатики

ДИПЛОМНА РОБОТА

На тему: **«Групові властивості системи диференціальних рівнянь Баргмана-Мішеля-Телегді»**

Студента 2 курсу ММ групи
Освітньої програми Математика.
Математичне і комп’ютерне моделювання
Спеціальності 111 Математика
Галузі знань 11 Математика та статистика
Ступеня вищої освіти магістр
Наконечного Володимира Валерійовича

Наукові керівники: кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики
Тимошенко Олександр Захарович;
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики
Бак Сергій Миколайович

Розширена шкала___________________________

Кількість балів: _____ Оцінка: ECTS _______

Голова комісії_______ ________________

(підпис) (ініціали, прізвище)

Члени комісії ___________ ____________________

(підпис) (ініціали, прізвище)

_____________ _____________________

(підпис) (ініціали, прізвище)

Вінниця 2020

АНОТАЦІЯ

В роботі побудовано інваріанти та інтеграли руху системи рівнянь Баргмана-Мішеля-Телегді, а саме доведено, що 3 із них включають спін. І рівняння

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = (1-V^2)^{\frac{1}{2}} \frac{e}{m} \ \vec{E} + (V\vec{H}) - \vec{V}(VE)$$

має два інтеграли руху в зовнішньому електромагнітному полі.

Крім того побудовано інтеграли руху системи рівнянь Баргмана-Мішеля-Телегді в постійному полі $\vec{E},\vec{H}$ і доведено, що таких інтегралів є вісім.

Ключові слова: система Баргмана-Мішеля-Телегді, інтеграли руху, алгебра Лі.

Тема дипломної роботи англійською мовою: **Group properties of the Bargman-Michel-Telegdi system of differential equations**

ANNOTATION

Invariants and integrals of motion of the Bargman-Michel-Telegdi equation system are constructed in the paper, namely it is proved that 3 of them include spin. And the equation

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = (1-V^2)^{\frac{1}{2}} \frac{e}{m} \ \vec{E} + (V\vec{H}) - \vec{V}(VE)$$

has two integrals of motion in an external electromagnetic field.

In addition, the integrals of the motion of the system of Bargman-Michel-Telegdi equations in a constant field $\vec{E},\vec{H}$ are constructed and it is proved that there are eight such integrals.

Key words: Bargman-Michel-Telegdi system, integrals of motion, Lie algebra.

Зміст

Вступ

В роботі розглядаються системи звичайних диференційних рівнянь інваріантних відносно групи Галілея і зв'язаних з задачами релятивістської механіки.

При аналізі численних рівнянь класичної і релятивістської механіки, теоретичної фізики застосовується побудова перших інтегралів системи звичайних диференційних рівнянь. До таких рівнянь відносяться рівняння небесної механіки, рівняння Ньютона - Лоренца, які описують рух елементарної частинки в електромагнітному полі, й інші. Наявність групи симетрії в системах звичайних диференційних рівнянь дає можливість будувати як частинні так і загальні розв'язки цієї системи.

Метод дослідження групових властивостей системи рівнянь з частинними похідними був запропонований в [4].

Об'єкт дослідження:

Система звичайних диференціальних рівнянь Баргмана-Мішеля-Телегді, яка описує рух елементарної частинки із спіном в електромагнітному полі.

Предмет дослідження: Застосування теоретично групового методу для розв'язування систем диференціальних рівнянь.

Мета і завдання: Побудова групи і відповідної їй алгебри Лі, інваріантів і перших інтегралів руху системи рівнянь Баргмана-Мішеля-Телегрі.

Наукова новизна одержаних результатів: Проведено теоретичний аналіз алгебри Лі системи рівнянь (БМТ)

Побудовано інтеграли руху елементарної частинки із спіном у випадку постійного електромагнітного поля.

Практичне значення: Робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані для розв’язання конкретних задач теорії диференціальних рівнянь та рівнянь математичної та теоретичної фізики

Публікації: Окремі результати роботи опубліковано в роботі [4].

Структура та об’єм: Дипломна робота викладана на сторінках, складається зі вступу, двох розділів, висновків, переліку літератури за темою роботи, що містить 51 найменування.

В дипломній роботі використання даного методу дозволило дослідити групу симетрій знайти інтеграли руху системи рівнянь Максвела і Баргмана - Мішеля - Телегді, які задають класичне описання руху частинки електромагнітному полі $(E\ H)$

Перш ніж перейти до більш детального викладання результатів, сформулюємо найбільш важливі теореми і означення.

<u>Означення 1</u>

Група Лі перетворень виду

$$X^{i}_{\mu} = f_{\mu}(x,u,a)$$

$$U_{\nu} = g_{\nu}(x,u,a), \mu = \overline{1,n}, \nu = \overline{1,m} \qquad (0.1)$$

де $a = \{a_u\}, a = \overline{1,t}$ називається групою інваріантності диференційних рівнянь

$$U'(x,u) = 0, \qquad (0.2)$$

Якщо множина розв'язків рівняння (0.2) інваріантна по відношенню до цієї групи.

<u>Означення 2.</u>

Алгеброю Лі (0.1) називається векторний простір, базисом якого являється

диференційні оператори виду

$$X_a = \xi_a^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \eta_a^{v} \frac{\partial}{\partial x_{v}}, a = \overline{1,l} \qquad (0.3)$$

де $\xi_a^{\mu} = \frac{\partial f_u}{\partial a_a} \bigg| a = 0, \eta_a^{v} = \frac{\partial g_v}{\partial a_v} \bigg| a = 0$

і заданою операцією комутації

$$X_a X_\beta \to [X_a, X_\beta] = X_a X_\beta - X_\beta X_a$$

Сформулюємо алгоритм знаходження максимальної групи симетрії рівняння (0.2).

<u>**Теорема 1**</u>

Диференційний оператор

$$X = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \eta^{v}(x,u)\frac{\partial}{\partial x^{v}}$$

(0.4)

належить алгебрі Лі інваріантності рівняння (0.2) тоді і тільки тоді, коли $XU'(U,X)\big| u(x,u) = 0$

де

$$X = X + \sigma_{\mu}^{\nu}\frac{\partial}{\partial U_{\mu}^{\nu}} + \sigma_{\mu_1\mu_2}^{\nu}\frac{\partial}{\partial U_{\mu_1\mu_2}^{\nu}},$$

$$\sigma_{\mu}^{\nu} = D_{\mu}(\eta^{\nu}) - U_{\mu_1}^{\nu} D_{\mu}(\xi^{\nu}),$$

$$\sigma_{\mu_1\mu_2}^{\nu} = D_{\mu_2}(\sigma_{\mu_1}^{\nu}) - U_{\mu,a}^{\nu} D_{\mu_2}(\xi^{a}),$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + U_{\mu}^{a}\frac{\partial}{\partial U_{a}} + U_{\mu\beta}^{a}\frac{\partial}{\partial U_{\beta}^{a}},$$

$$\nu = \overline{1,m}, \mu, \mu_1, \mu_2 = \overline{1,m},$$

$$U_{\beta}^{a} = \frac{\partial U^{a}}{\partial x^{\beta}}; U_{\beta_1\beta_2}^{a} = \frac{\partial^2 U^{a}}{\partial x_{\beta 1}\partial x_{\beta 2}},$$

$$a = \overline{1,m}, \beta, \beta_1, \beta_2 = \overline{1,n},$$

Означення 3.

Рівняння (0.5) називається визначальним для групи інваріантності рівняння (0.2).

Означення 4.

Оператори $\{I_{ab}\}, a, b = \overline{1,3}, a \neq b$ задають алгебру Лі групи поворотів (0.3), якщо виконуються комутативні співвідношення

$$[I_{ab}, I_{bc}] = I_{ac}, a, b, c = \overline{1,3}$$

Означення 5.

Оператори $\{I_{\mu\nu}\}, \mu, \nu = \overline{1,3}, \mu \neq \nu$ які задовольняють комутаційним співвідношенням (0.6) і

$$[I_{ab}, I_{bc}] = \delta_{ac} I_{0b} - \delta_{bc} I_{0a}, [I_{0a}, I_{0b}] = I_{bc}$$

Утворюють алгебру Лі групи (1.3)

Означення 6.

Алгебра Лі 0 (1.3), доповнена операторами зсувів $P_{\mu} = \mu = \overline{1,3}$ утворює алгебру групи Пуанкаре P(1.3), якщо виконуються співвідношення (0.6) і (0.7) то

$$[P_a, I_{bc}] = \delta_{ab} P_c - \delta_{ac} P_b,$$
$$[P_a, I_{ab}] = -\delta_{ab} P_0,$$
$$[P_0, I_{0b}] = P_b,$$
$$[P_0, I_{ab}] = 0.$$

<u>Означення 7.</u>

Алгебра Лі групи 0 (1.3) доповнена операторами зсувів операторами $P_\mu, \mu = \overline{1,3}$ і оператором $G_a = t\frac{\partial}{\partial x_a} + \varepsilon_{abc} H_c \frac{\partial}{\partial E_b}$ утворюють алгебру Лі групи Галілея G(1.3).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Джекобсон Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон; пер. с англ. А. Б. Жижченко; под ред. А. И. Кострикина. - Москва: Мир, 1964. - 355 с.

2. Каролинский Е. А. Теория алгебр Ли / Е. А. Каролинский. - Харьков, 2003. - 92 с.

3. Лутфуллін М. В. Реалізації алгебр Лі невисоких розмірностей та інваріантні системи нелінійних диференціальних рівнянь : автореф. дис. на здобуття наук, ступеня канд. фіз.- мат. наук : спец. 01.01.03 "математична фізика" / М. В. Лутфуллін - Київ, 2004. - 15с.

4. Наконечний В. Система рівнянь Баргмана-Мішеля-Телегді. *Науково-популярний альманах «Математика та інформатика навколо нас».* 2020. Вип. 4. С. 96-100.

5. Нестеренко М. О. Контракції та реалізації алгебр Лі : автореф. дис. на здобуття наук, ступеня канд. фіз.- мат. наук : спец. 01.01.03 "математична фізика" / М. О. Нестеренко - Київ, 2007. - 18с.

6. Полищук Е. М. Софус Ли (1842-1899) / Е. М. Полищук. - Ленинград: Наука, 1983. -214 с.

7. Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений./Перев. 3 англ. Б. Р. Френкина.— М. : МЦНМО, 2003.— 216 с.: ил.

8. Владимиров В. С. Что такое математическая физика? — Препринт, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — М.: МИАН, 2006. —20 с.

9. Евгений Фейгин Группы и алгебры Ли симметрий 2017 [Електронний ресурс] Современная математическая физика. Режим доступу: https://postnauka.ru/video/73464

10. Bargman V, Michel I, Tegdi V.Z. Precession of the

Polarisation of particle Moring in a Homogeneous Electromagnetic Field// Phys. Rev.Zett. - 1959. - 2 . - P . 435.

11. Corben H.C. Classical and Quantum Theories of Spinning Particles: Holder. - Day, Inc. San Francisco, 1968. - P. 280.

12. Dobrev, V. K. (2016). Noncompact Semisimple Lie Algebras and Groups. De Gruyter studies in mathematical physics. De Gruyter.

13. Hofmann, Karl H.; Morris, Sidney A (2007). The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups. European Mathematical Society.
14. Mitchell J.P. Joum. Math. Phys., 1978. vol. 19, N_0. 10, p. 2082-2089.
15. Nesterenko M., Boyko V. Realizations of indecomposable solvable 4-dimensional real Lie algebras // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — 43, ч. 2. — С. 474-477.
16. Popovych R., Boyko V., Nesterenko M., Lutfullin M. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // math-ph/0301029v7. — 2005. — 39 pages.
17. Бедратюк, Леонид Петрович. Симметрические инварианты модулярных алгебр Ли: дис... канд. физ-мат. наук: 01.01.06 / Бедратюк Леонид Петрович ; Московский гос. ун-т им. М.В.Ломоносова. - М., 1995. - 81 с. -С.80-81.
18. Білун, Світлана Володимирівна. Асоціативні алгебри та алгебри Лі з обмеженнями на системи підалгебр і ідеалів: автореф. дис... канд. фіз.- мат. наук: 01.01.06 / Білун Світлана Володимирівна ; Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. - К., 2009. - 16 с.
19. Бондаренко Н. В. Алгебри Лі, асоційовані з силовськими [ро]-підгрупами скінченних симетричних груп: дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06 / Бондаренко Н. В. ; Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. - К., 2006. - 126 арк. - арк. 122-126.
20. Бондаренко Н. В. Алгебри Лі, асоційовані з силовськими р-підгрупами скінченних симетричних груп: автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06 / Бондаренко Н. В. ; Київський національний ун-т

ім. Тараса Шевченка. - К., 2006. - 20 с.

21. Борисенко А. Matrix Realizations of Four-Dimensional Lie Algebras and Corresponding Invariant Spaces / Симетрія у нелінійній математичній фізиці // Праці Інституту математики НАН України. Т.3О. - 4.2. - Київ: Інститут математики НАН України, 2000. - С. 324-329.
22. Борисенко А.О. Чотиривимірні алгебри Лі та точно розв’язні матричні моделі *I I* Вісник Київського університету: -Київ, 1999. - Випуск 3. - С. 11-17.
23. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Глава IX. М.: Мир, 1986. 174 с.
24. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы I—III. М.: Мир, 1976.

496 с.

25. Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976.
26. Владимиров В. С., Вашарин А. А., Каримова X. X., Михайлов В. П., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И, Сборник задач по уравнениям математической физики, Физматлит, М., 2001.
27. Владимиров В. С., Уравнения математической физики, Наука, М.,

1981.

28. Голод П. Г, Клімик А. У. Математичні основи теорії симетрії. — К. : Наукова думка, 1992. — 368 с.
29. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.20. Группы Ли и алгебры Ли — 1. М.: ВИНИТИ. 1988
30. Інваріантність одного класу нелінійних рівнянь еволюційного типу відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії / А. О.Борисенко, В.І. Лагно // Збірник наукових праць Полтавського державного педагогічного університету ім. В. Г. Короленка. -

Полтава, 2000. - Вип. (9). - С. 53-59. - (Сер. Фіз.-мат. науки).

31. Іоргов, Микола Зіновійович. Представлення квантових алгебр фізичних симетрій та їх застосування до опису мас адронів : дис... канд. фіз.- мат. наук: 01.04.02 / Іоргов Микола Зіновійович ; НАН України, Ін-т теорет. фізики ім. М. М. Боголюбова. - К., 1999. - 113 л. - л. 102-109
32. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. — М. : Мир, 1993.—

432

33. Лагно В.І. Реалізації алгебр Лі груп локальних перетворень та груповий аналіз нелінійних диференціальних рівнянь. — К. : Інститут математики НАН України, 2003. — 347 с.
34. Ли С. Теория групп преобразований.— Ижевск: РХД, 2011- 2012.— 712+640 с.
35. Ли, Мариус Софус // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). — СПб., 1890—1907.
36. Мазорчук В. С. Зображення градуйованих алгебр Лі та їх узагальнень: автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.06 / Мазорчук Володимир Степанович ; Київський ун-т ім. Тараса Шевченка. - К., 2000. - 32с.
37. Мазорчук В. С. Зображення градуйованих алгебр Лі та їх узагальнень: дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.06 / Мазорчук Володимир Степанович ; Київський ун-т ім. Тараса Шевченка. - К., 2000. - 290 л. - л. 268- 290
38. Максименко Д. В. Алгебри Лі з обмеженнями на систему доповнюваних підалгебр: автореф. дис ... канд. фіз.-мат. наук / Д. В. Максименко. - Київ : б. в., 2010. - 16 с.
39. Нетер, *М.* Софус Ли. *11* Историко-математические исследования. — М.: Янус-К, 2006. — № 46 (11). — С.

306-347.
40. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. — М. : ИЛ, 1960. — 128 с.
41. Петравчук А. П., Сисак К. Я. Алгебри Лі, асоційовані з модулями нізд кільцями многочленів // Укр. мат. журн. - 2017. - 69, № 9. - С. 1232-1241.
42. Постников М.М., Группы и алгебры Ли. Лекции по геометрии. Семестр V. Учебное пособие. 1982, изд-во: Наука, город: М., стр. : 447 с
43. Рид Е., Саймон Б., Методы современной математической физики,
т. 1-4, Мир, М., 1982.
44. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М. : Мир, 1969. — 376 с.
45. Стеклов В. А., Основные задачи математической физики, Наука, М., 1983
46. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли (семинар «Софус Ли»). — М. :ИЛ, 1962. —308 с.
47. Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А., Лекции по квантовой механике для студентов-математиков, РХД, М., Ижевск, 2001.
48. Футорний В. М. Зображення афінних алгебр Лі: автореф. дис... д- ра фіз.- мат. наук: 01.01.06 / Футорний Вячеслав Михайлович ; Київський ун- т ім. Тараса Шевченка. - К., 1995. - 17 с.
49. Футорный В. М. Представления аффинных алгебр Ли: дис... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06 / Футорный Вячеслав Михайлович ; Киевский ун-т им. Тараса Шевченко. - К., 1995. - 171 л.
50. Фугцич В. И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физики. - Киев: Ин-т математики, 1981. - С.6.
51. Шаповалова, Н. В. Ряди Пуанкаре незвідних зображень спеціальної лінійної алгебри Лі / Н. В. Шаповалова // Науковий часопис

Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки : зб. наук, праць. - Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2012. - Вип. 13 (2). - С. 271-283.