творчого мислення. У процесі вивчення інверсії, вказана програма допомагає з'ясувати її властивості, побудувати інверсію будь-якої геометричної фігури, що допомагає студентам краще засвоїти теоретичний матеріал.

Список використаних джерел

1. Тютюн Л. А. Деякі аспекти використання інформаційно-телекомунікаційних технологій у процесі викладання геометрії в педагогічному університеті // *Науковий вісник Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки. Педагогічні науки*. – 2013. – №7. – С. 81–87.
2. Боровик В.Н. Геометричні перетворення площини: Навчальний посібник / В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, М.М. Мурач, В.П. Яковець. – Суми: ВДТ «Університетська книга», 2003. – 504 с.
3. Тютюн Л. А. Особливості використання програмного засобу GEOGEBRA в процесі викладання геометрії // *Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: Педагогіка і психологія*: Зб. наук. праць. – Випуск 36 / Редкол.: В.І. Шахов (голова) та ін. – Вінниця: ТОВ «Нілан ЛТД», 2012. – С. 281-284.

STUDY OF INVERSION AND ITS PROPERTIES USING THE PROGRAM GEOGEBRA

Abstract. *The main advantages of this program are analyzed and the expediency of its application in solving construction problems by the inversion method is shown. This article discusses some possibilities of using the GeoGebra software environment when studying inversion and studying its properties. Examples of such problems are given. GeoGebra was used to build the pictures and explore the solutions.*

Keywords: *geometry, construction problems, inversion, Geogebra.*

Діана Шаргородська, Олена Соя

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ БЕЗУМОВНОГО ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Анотація. *У статті досліджуються чисельні методи знаходження безумовного екстремуму функції однієї змінної. Теоретично обґрунтовані алгоритми декількох чисельних методів обчислення безумовного екстремуму функції однієї змінної. Зокрема описані алгоритми методу Больцано та методу золотого перерізу для знаходження мінімуму функції однієї змінної.*

Ключові слова: *функція однієї змінної, екстремум, інтервал, метод.*

Постановка проблеми. Сучасні стандарти до математичної підготовки студентів спеціальності 111 Математика досить високі. Зокрема, вони повинні вміти грамотно «перекладати» на математичну мову технічні, економічні, природничо-наукові та інші прикладні задачі, аналізувати залежність їх розв'язків від умов, режимів, параметрів реальних процесів і явищ, й обирати якнайкращі варіанти, тобто мати навички математичного моделювання й оптимізації реальних об'єктів. Оскільки в більшості випадків, важливих з практичної точки зору, процес аналітичного розв'язування задач оптимізації важкий і трудомісткий або взагалі неможливий, студент повинен володіти чисельними методами, розрахованими на застосування сучасних технологій [3].

Наближений, а за певних умов і точний розв'язок задач фундаментальної або прикладної математики можна знайти за допомогою чисельних методів, алгоритми яких ґрунтуються на побудові послідовності дій над скінченною множиною чисел. Основними завданнями чисельних методів, як навчальної дисципліни, є засвоєння основних теоретичних положень наближених методів, ознайомлення з алгоритмами розв'язування практичних завдань та їх чисельна реалізація. Зокрема, алгоритми, побудовані на основі інтерполяції чи апроксимації функцій, використовуються для розв'язування задач математичного аналізу. Основними критеріями ефективності того чи іншого чисельного методу є його стійкість та збіжність.

Мета статті – теоретично обґрунтувати й описати алгоритми декількох чисельних методів обчислення безумовного екстремуму функції однієї змінної.

Виклад основного матеріалу. Задача пошуку точок екстремуму функції однієї змінної має як самостійне практичне значення, так і є допоміжною для розв'язуванні складніших задач математичного моделювання. З точки зору математичного аналізу, для знаходження екстремуму заданої функції однієї змінної необхідно знайти її першу похідну та перевірити необхідні й достатні умови існування екстремуму. Але іноді через незручний чи занадто громіздкий вигляд функції важко або взагалі неможливо використовувати класичний метод. Аналітично розв'язується лише незначна частина практичних задач. Тому, як альтернатива, розглядаються й використовуються чисельні алгоритми, які зазвичай легко реалізувати за допомогою комп'ютера. Такі алгоритми запрограмовані, як правило, у пакетах прикладних програм математичного спрямування, що забезпечують високу точність і швидкість знаходження екстремуму функції однієї змінної, але, на жаль, не завжди знаходять глобальний екстремум. Серед таких пакетів варто відзначити математичні програми Maple, MatLab, Mathematica, Maxima та інші [4]. Але це не означає, що для знаходження екстремумів слід використовувати тільки їх, не маючи хоча б загального поняття про математичну складову алгоритмів. Існує низка інших методів, що застосовуються рід час розв'язування даної задачі, які в загальному вигляді поділяють на локальні методи – ходяться до якого-небудь локальному екстремуму функції (у разі унімодальності функції, цей екстремум єдиний, і буде глобальним максимумом/мінімумом); глобальні методи – використовуються для багатоекстремальних функцій (при глобальному пошуку основним завданням є виявлення тенденцій глобальної поведінки функції). Також наявні методи пошуку екстремуму можна розбити на три групи: детерміновані; випадкові (стохастичні); комбіновані. Найпоширенішими є: метод рівномірного пошуку; метод дихотомії, метод Больцано; метод поділу відрізка навпіл, метод золотого перерізу, метод Фібоначі тощо [2].

Розглянемо метод Больцано. Цей метод на кожній ітерації дозволяє виключати точно половину інтервалу, на якому шукається екстремум функції однієї змінної. Зазвичай цей метод називають точковим пошуком на рівних інтервалах, тому що він ґрунтується на виборі трьох пробних точок, які рівномірно розподілені в інтервалі пошуку. Геометрична інтерпретація методу для знаходження точки мінімуму функції $f(x)$ в інтервалі (a,b) подана на рисунку 1.

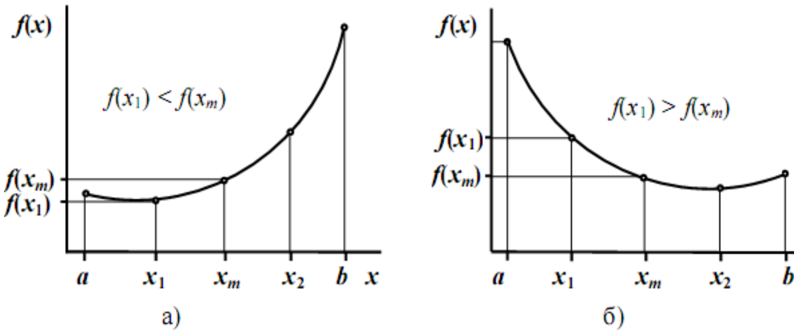

Рис. 1 Геометрична інтерпретація методу Больцано

Опишемо алгоритм методу Больцано:

Крок 1. Покласти $x_m = \frac{a+b}{2}$ та $L = b - a$. Обчислити значення $f(x_m)$.

Крок 2. Покласти $x_1 = \frac{a+L}{4}$ та $x_2 = \frac{b-L}{4}$. Зауважимо, що точки $x_1, x_2,\ x_m$ поділяють інтервал (a,b) на 4 рівні частини. Обчислити значення $f(x_1)$ і $f(x_2)$.

Крок 3. Порівняти $f(x_1)$ та $f(x_m)$. Якщо $f(x_1) < f(x_m)$ (рис. 1(а)), виключити інтервал (x_m, b), поклавши $b = x_m$. Середньою точкою нового інтервалу пошуку стає точка x_1. Отже, необхідно покласти $x_m = x_1$. Перейти до кроку 5. Якщо $f(x_1) \geq f(x_m)$

(рис.1 (б)), перейти до кроку 4.

Крок 4. Порівняти $f(x_2)$ та $f(x_m)$. Якщо $f(x_2) > f(x_m)$, виключити інтервал (a, x_m), поклавши $a = x_m$. Оскільки середньою точкою нового інтервалу стає точка x_2 покласти $x_m = x_2$. Перейти до кроку 6.

Крок 5. Якщо $f(x_2) \geq f(x_m)$, виключити інтервали (a, x_1) й (x_2, b). Покласти $a = x_1$ й $b = x_2$. Зауважимо, що x_m продовжує залишатися середньою точкою нового інтервалу. Перейти до кроку 6.

Крок 6. Обчислити $L = b - a$. Якщо величина $|L|$ достатньо мала, закінчити пошук. Інакше – повернутися до кроку 2 [1].

Розглянемо метод золотого перерізу. В основі цього методу лежить принцип поділу відрізка в пропорціях «золотого перерізу».

Нехай задана функція $f(x); [a,b] \to$ R, $f(x) \in C([a,b])$. Тоді для того, щоб знайти певне значення цієї функції на заданому відрізку, що відповідає критерію пошуку (нехай це буде мінімум), розглядається відрізок, що поділяється в пропорціях «золотого перерізу» в обох напрямках. Геометрична інтерпретація методу для знаходження точки мінімуму функції $f(x)$ в інтервалі (a,b) подана на рисунку 2.

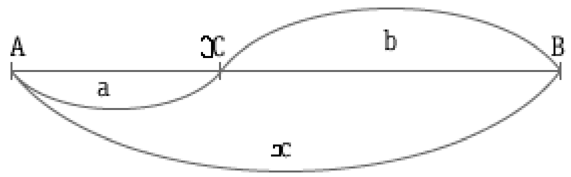

Рис. 2. Геометрична інтерпретація методу золотого перерізу

На першій ітерації заданий відрізок ділиться двома симетричними щодо його центру точками й обчислюються значення в цих точках [5]. Після чого той з кінців відрізка, до якого серед двох заново побудованих точок ближче знаходиться та, значення в якій максимальне (для випадку пошуку мінімуму) чи мінімальне (для випадку пошуку максимуму), відкидають. На наступній ітерації, беручи до уваги вказані раніше властивості золотого перерізу, вже треба шукати лише одну нову точку. Процедура триває доти, доки не буде досягнута задана точність.

Введемо позначення:

$\Delta^1 = b - a$ – початковий інтервал;

Δ^2 – інтервал, отриманий після зменшення інтервалу Δ^1 шляхом відкидання його лівого чи правого підінтервалу.

Δ^{k+1} – інтервал, отриманий після зменшення інтервалу Δ^k

Розглянемо тепер метод золотого перерізу формально. Як зазначається вище, «золотий переріз» відрізка здійснюється двома симетрично розташованими точками, наприклад x_1 та x_2, тобто $\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} = \gamma$ і $\frac{b-a}{x_2-a} = \frac{x_2-a}{b-x_2} = \gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$. Водночас, точка x_1 в здійснює «золотий переріз» відрізку $[a, x_2]$, тобто $\frac{x_2-a}{x_1-a} = \frac{x_1-a}{x_2-x_1}$. Аналогічно, точка x_2 здійснює «золотий переріз» відрізка $[x_1, b]$.

Отже, метод золотого перетину полягає в тому, що довжини послідовних інтервалів у фіксованому відношенні:

$$\frac{\Delta^1}{\Delta^2} = \frac{\Delta^2}{\Delta^3} = \cdots = \gamma$$

Із співвідношень $\frac{\Delta^k}{\Delta^{k+1}} = \frac{\Delta^{k+1}}{\Delta^{k+2}} = \gamma$ і $\Delta^k = \Delta^{k+1} + \Delta^{k+2}$ отримуємо:

$$\frac{\Delta^k}{\Delta^{k+1}} = \frac{\Delta^{k-1} + \Delta^{k+2}}{\Delta^{k+1}} = 1 + \frac{\Delta^{k+2}}{\Delta^{k+1}}, \gamma = 1 + \frac{1}{\gamma} \text{ чи } \gamma^2 - \gamma - 1 = 0$$

Коренем цього рівняння є «золотий переріз»:

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618;\ \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}61.$$

Детальніше алгоритм методу золотого перерізу описано у [4, с. 171–172].

Висновки. Існує безліч способів, щоб обчислити безумовний екстремум функції однієї змінної. Головна мета – знайти якомога точний результат та легкість обрахунків. Методи, наведення у статті, на нашу думку є достатньо зрозумілими та зручними для реалізації за допомогою комп'ютера.

Список використаних джерел

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: учеб. пособ. М.: Наука, 1987. 600 с.
2. Возняк Л. С. , Шарин С. В.Чисельні методи: метод. посіб. для студ. природничих спеціальностей. Івано-Франківськ: «Плай», 2001. 64 с.
3. Кутнів М. В. Чисельні методи. Львів: Вид-во «Растр-7», 2010. 288 с.
4. Нефьодов Ю. М. Методи оптимізації в прикладах і задачах: навч. посіб. К.: Кондор, 2011. 324 с.
5. Шаповаленко В. А., Буката Л. М., Трофименко О. Г. Чисельне обчислення функцій, характеристик матриць і розв'язування нелінійних рівнянь та систем рівнянь: навч. посіб. Одеса: ВЦ ОНАЗ, 2010. Ч. 1. 88 с.

NUMERICAL METHODS FOR FINDING THE UNCONDITIONAL EXTREMUM OF A FUNCTION OF ONE VARIABLE

Abstract: *The article examines numerical methods for finding the unconditional extremum of a function of one variable. Theoretically based algorithms for several numerical methods for calculating the absolute extremum of a function of a single variable. In particular, the algorithms of the Bolzano method and the Golden section method for finding the minimum of a function of one variable are described.*

Keywords: *a function of one variable, the extremum, the interval, the method.*

Анна Шкарупська

АНАЛІЗ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Анотація. *У статті розглянуто основні поняття теорії нечітких множин, методи побудови функції належності. Проаналізовано відмінність понять «випадковість» та «нечіткість», наведено приклад нечіткої множини.*

Ключові слова: *нечітка множина, функція належності, лінгвістична змінна*.

Проблеми математичного і комп'ютерного моделювання на сьогодні полягають, зокрема, в незастосовності чіткої логіки та моделей задач із чітко визначеними вхідними параметрами у випадках, коли з якихось причин наявні протиріччя, невизначеність або нечіткість інформації про досліджуваний об'єкт, систему чи явище. Всяка спроба трактувати загальний опис призводить до нечітких понять, оскільки точний опис містить надлишок деталей. Збільшення точності у описі веде до збільшення кількості інформації, змістовність якої зменшується до того моменту, поки точність і змістовність не стають взаємовиключними [1].

Про необхідність нечіткості для передачі змістовної інформації вперше наголосив Л.А. Заде. Саме ідеї цього американського вченого зробили поштовх для розвитку «нечіткої математики», яка поряд з апаратом нечітких множин містить інші прийоми роботи з невизначеністю. Застосування теорії нечітких множин - це крок на шляху до зближення точності класичної математики з наповненим неточністю навколишнім середовищем, спроба подолати лінгвістичний бар'єр між людиною, судження і оцінки якої є наближеними та нечіткими, і технічними засобами, які можуть виконувати тільки