Бак С. М., Магдич В. І.

ІСНУВАННЯ ГОМОКЛІНІЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Вступ. У статті досліджується система нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці із взаємодією найближчих сусідів. Рівняння руху такої системи мають вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,m} = U'\left(q_{n+1,m} - q_{n,m}\right) - U'\left(q_{n,m} - q_{n-1,m}\right) + \\ +U'\left(q_{n,m+1} - q_{n,m}\right) - U'\left(q_{n,m} - q_{n,m-1}\right) - V'\left(q_{n,m}\right), \left(n, m\right) \in \mathbb{Z}^2,\end{gathered} \tag{1}$$

де $q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n, m)-го осцилятора в момент часу t, $U, V \in C^1(\mathbb{R})$.

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь, причому при $V(r) \equiv 0$ (1) є двовимірним аналогом системи Фермі-Пасти-Улама, а при $V(r) = K(1 - \cos r)$ – дискретним рівнянням sin-Ґордона на двовимірній ґратці.

Подібні системи є цікавими з огляду на чисельні застосування у фізиці [8], [10], [11]. В статтях [1], [9], [14] вивчались біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. Огляд відомих результатів про подібні системи Фермі-Пасти-Улама зроблено в [17].

В статті [18] вивчались періодичні розв'язки для системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів розміщених на двовимірних ґратках, а в статтях [4], [5], [12], [13] – біжучі хвилі в таких системах. Зокрема, в [12] розглядалась система із непарною 2π–періодичною нелінійністю. А в [13] взагалі розглядалися лінійні осцилятори. В статті [5] одержано умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

В статті [15] вивчались гетероклінічні біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Гордона з лінійною взаємодією сусідніх атомів на одновимірній ґратці, а в статтях [6], [7] і [16] – біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Гордона з нелінійною взаємодією.

В статті [2] одержано умови існування дозвукових біжучих хвиль для системи нелінійно зв’язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці.

В даній роботі за допомогою методу критичних точок досліджено питання про існування гомоклінічних до нуля біжучих хвиль для системи нелінійно зв’язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. Для профілю біжучої хвилі $u(s)$, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} c^2u''(s) &= U'(u(s+\cos\varphi)-u(s)) - U'(u(s)-u(s-\cos\varphi)) + \\ &+ U'(u(s+\sin\varphi)-u(s)) - U'(u(s)-u(s-\sin\varphi)) - V'\big(u(s)\big). \end{aligned} \tag{2}$$

Зазначимо, що в рівняння (2) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівняння (2), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$.

Будемо розглядати випадок гомоклінічних до нуля біжучих хвиль, для знаходження профілю яких достатньо знайти розв’язок рівняння (2), який задовольняє умову

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{3}$$

Всюди далі під розв’язком рівняння (2) розуміється функція $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (2) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Основні результати

Позначимо через E гільбертів простір $H^1(\mathbb{R})$ зі скалярним добутком

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(s)v(s) + u'(s)v'(s)\big)ds$$

і відповідною нормою $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$. Нагадаємо, що за теоремою вкладення $E \subset C_b(\mathbb{R})$, де $C_b(\mathbb{R})$ – простір обмежених неперервних функцій на $\mathbb{R}$. Більше того, функції з простору E мають нульову границю на нескінченності.

На просторі E означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s + \cos\varphi) - u(s) = \int_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)\, d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s + \sin\varphi) - u(s) = \int_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)\, d\tau.$$

Тоді правильна лема (див. [3, с. 77]):

Лема 1. *Оператори A та B є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності*

$$\|Au\|_{L^2(\mathbb{R})} \le |\cos\varphi| \|u\|,$$
$$\|Bu\|_{L^2(\mathbb{R})} \le |\sin\varphi| \|u\|.$$

Всюди далі розглядаються потенціали $U(r)$ і $V(r)$ вигляду:

(i) $U(r) = \dfrac{c_0^2}{2} r^2 + f(r)$, $V(r) = -\dfrac{a^2}{2} r^2 + g(r)$, *де* $c_0 \ge 0$, $a > 0$.

Також припускається, що неквадратична частина кожного з цих потенціалів $h \in \{f; g\}$ задовольняє умови:

(ii) $h(0) = h'(0) = 0$ *і* $h'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$;

(iii) *існує* $\mu > 2$ *таке, що*

$$0 \le \mu h(r) \le r h'(r),\ r \ne 0.$$

На просторі E розглянемо функціонал

$$J(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - U(Au(s)) - U(Bu(s)) + K(1 - \cos(u(s))) \right\} ds.$$

Неважко одержати наступні три твердження.

Лема 2. *J – функціонал класу C^1 на E, а його похідна для будь-яких $u, v \in E$ виражається формулою*

$$\langle J'(u), v\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{c^2 u'(s)v'(s) - U'\big(Au(s)\big)Av(s) - U'\big(Bu(s)\big)Bv(s) - V'\big(u(s)\big)v(s)\right\} ds.$$

Лема 3. *Критичні точки функціоналу J є C^2-розв'язками рівняння (2), що задовольняють умову (3).*

Лема 4. *Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$. Тоді існують такі $\varepsilon_0 > 0$ і $\gamma > 0$, що для нетривіальних критичних точок функціоналу J правильні нерівності: $\varepsilon_0 \le \|u\|^2 \le \gamma J(u)$.*

Біжучі хвилі в даному випадку знаходяться як критичні точки функціоналу J. Функціонал J задовольняє частині умов теореми про гірський перевал. Однак, умова Пале–Смейла для цього функціоналу не виконується. Тому критичні точки в даному випадку будуються іншим способом – за допомогою переходу до границі в критичних точках функціоналу J_k при $k \to \infty$.

Основним результатом цієї статті є наступна теорема:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$. Тоді для будь-якого $c > c_0$ рівняння (2) має розв'язок $u \in E$, (отже, він задовольняє умові (3)). Таким чином, існують дві гомоклінічні до нуля біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$.*

Таким чином, у цій статті за допомогою методу критичних точок одержано умови існування гомоклінічних біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці.

Анотація:

Розглядається система нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці із взаємодією найближчих сусідів. Одержано результат про існування гомоклінічних біжучих хвиль.

Ключові слова: система осциляторів, двовимріна ґратка, гомоклінічні біжучі хвилі, критичні точки.

Annotation:

We consider a system of nonlinear coupled nonlinear oscillators on 2-d lattice with neighbor interaction. Result on existence of homoclinic traveling waves is obtained.

Keywords: system of oscillators, 2-d lattice, homoclinic traveling waves, critical points.

Література:

1. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів / С. М. Бак // Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140-153.

2. Бак С.М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – Вип. 10. – С. 17-23.

3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. – 2012. – Т. 37, №1. – С. 76-88.

4. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. – 2011. – Т. 35, №1. – С. 60-65.

5. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, №2. – С. 154-175.

6. Олексієнко В. О. Існування гомоклінічних біжучих хвиль у дискретному рівнянні sin-Гордона / В. О. Олексієнко, Ю. С. Кудрич, О. В. Студент // Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти: зб. наук. праць. – Вінниця, 2013. – Вип. 10. – С. 60 – 64.

7. Студент О. В. Існування гомоклінічних біжучих хвиль в ланцюгах нелінійно зв'язаних осциляторів / О. В. Студент, В. І. Магдич // Актуальні

проблеми математики, фізики і технологічної освіти: зб. наук. праць. – Вінниця, 2014. – Вип. 11.

8. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201-250.

9. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators / S. M. Bak // Communications in Mathematical Analysis. – 2007. – Volume 3, Number 1. – P. 19-26.

10. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. – 1998. – 306. – P. 1-108.

11. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. – Berlin: Springer, 2004. – 427 p.

12. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319-341.

13. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – Volume 3, №1 (February). – P. 105-114.

14. Ioos G. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators / G. Ioos, K. Kirchgassner // Commun. Math. Phys. – 2000. – 211. – P. 439-464.

15. Kreiner C.-F. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine-Gordon equation with linear pair interaction / C.-F. Kreiner, J. Zimmer // Discrete and continuous dynamical systems. – Vol. 25, Number 3, November. – 2009. – P. 1-17.

16. Kreiner C.-F. Travelling wave solutions for the discrete sine-Gordon equation with nonlinear pair interaction / C.-F. Kreiner, J. Zimmer // Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications. – Vol. 70, Number 9. – 2009. – P. 3146-3158.

17. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices / A. Pankov. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 p.

18. Srikanth P. On periodic motions of two-dimensional lattices // Functional analysis with current applications in science, technology and industry / P. Srikanth. – 1998. – Volume 377. – P. 118-122.