УДК 517.9

С. М. Бак

БІЖУЧІ ХВИЛІ В ЛАНЦЮГАХ ОСЦИЛЯТОРІВ

S. M. Bak. *Periodic travelling waves in chains of oscillators*, Matematychni Studii, **26** (2006) 140–153.

We consider a system of differential equations that describes the dynamics of an infinite chain of linearly coupled nonlinear oscillators. Results on existence of the periodic and solitary travelling waves and exponential decay of the solution are obtained.

С. Н. Бак. *Бегущие волны в цепочках осцилляторов* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №2. – С.140–153.

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая динамику бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов. Получен результат о существовании периодических и уединенных бегущих волн и экспоненциальная оценка решения.

1. Вступ. У статті досліджуються рівняння, що описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Нехай q_n — узагальнена координата n-го осцилятора. Рівняння його руху при відсутності взаємодії з сусідніми осциляторами мають вигляд:

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n), n \in \mathbb{Z}.$$

Припускається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з двома своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - a_n(q_n - q_{n+1}), n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Рівняння (1) є нескінченною системою звичайних диференціальних рівнянь.

Подібні системи є цікавими з огляду на чисельні застосування у фізиці [3], [4], [5]. У статті [6] за допомогою теории біфуркацій вивчались біжучі хвилі у таких ланцюгах, а в [1], [2], [3], [8] — періодичні за часом розв'язки. Огляд відомих результатів про такі системи зроблено в [9].

У даній статті за допомогою методу критичних точок досліджено питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль, а також встановлено експоненційну оцінку профілю бежучої хвилі. Отримані результати є загальнішими за результати з [6].

2. Постановка задачі. Розглянемо однорідний за просторовою змінною ланцюг нелінійних осциляторів з потенціалом:

$$U_n(r) = U(r) = -\frac{c_0}{2}r^2 + V(r).$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34C15, 35B05.

Тоді рівняння набуде вигляду

$$\ddot{q}_n = a\triangle_d q_n + c_0 q_n - V'(q_n), \tag{2}$$

де

$$(\triangle_d q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$$

— одновимірний дискретний оператор Лапласа.

Біжуча хвиля має вигляд

$$q_n(s) = u(n - cs)$$

і для її профілю $u(s)$ отримаємо рівняння

$$c^2 u''(s) = a(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)) + c_0 u(s) - V'(u(s))\,. \tag{3}$$

Це рівняння має, фактично, варіаційну структуру.

Відзначимо, що функція неперервного аргументу $u(s), u \in \mathbb{R}$ називається профілем хвилі. Стала $c \neq 0$ – швидкість хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля зміщується праворуч, а якщо $c < 0$, то ліворуч. Інтерес представляють нетривіальні хвилі з відмінним від тотожного нуля профілем.

У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі досить знайти розв'язок рівняння (3) з умовою періодичності

$$u(s + 2k) = u(s), t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Профіль відокремленої хвилі є розв'язком рівняння (3) з крайовою умовою на нескінченності

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{5}$$

Скрізь далі під розв'язком рівняння (3) розуміємо функцію $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (3) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

3. Варіаційне формулювання задачі. Скрізь далі припускається, що потенціал задовольняє умову:

(h) *функція* $V(r)$ *неперервно диференційовна,* $V(0) = 0$ *і* $V'(r) = o(r)$, *при* $r \to 0$ *та існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu V(r) \le V'(r)r, r \neq 0.$$

Зазначимо, що в рівняння (3) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(t)$ задовольняє рівняння (3), то існують дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$. Одна з них рухається праворуч, інша — ліворуч.

З рівнянням (3) і умовами (4) пов'язується функціонал J_k, що визначений на просторі

$$E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u(s + 2k) = u(s)\}$$

з нормою

$$\|u\|_k = (\|u\|^2_{L^2(-k,k)} + \|u'\|^2_{L^2(-k,k)})^{1/2} = \left(\int_{-k}^{k} (u(s)^2 + u'(s)^2)ds\right)^{1/2}.$$

Тобто E_k — простір Соболєва $2k$-періодичних функцій. Розглянемо функціонал:

$$J_k(u) = \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}(u'(t))^2 - \frac{a}{2}(u(t+1) - u(t))^2 + \frac{c_0}{2}u^2(t) - V(u(t)) \right\} dt. \tag{6}$$

З крайовою умовою (5) повязаний функціонал

$$J(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{c^2}{2}(u'(t))^2 - \frac{a}{2}(u(t+1) - u(t))^2 + \frac{c_0}{2}u^2(t) - V(u(t)) \right\} dt. \tag{7}$$

на просторі $E = H^1(\mathbb{R})$ зі стандартною нормою Соболєва.

Лема 1. *За зроблених вище припущень, J_k та J — функціонали класу C^1 на E_k та E відповідно. Їх похідні виражаються формулами*

$$\langle J_k'(u), h \rangle = \int_{-k}^{k} \{c^2 u'(s)h'(s) + a(u(s+1)+$$

$$+u(s-1) - 2u(s))h(s) + c_0 u(s)h(s) - V'(u(s))h(s)\}ds \tag{8}$$

і

$$\langle J_k'(u), h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \{c^2 u'(s)h'(s) + a(u(s+1)+$$

$$+u(s-1) - 2u(s))h(s) + c_0 u(s)h(s) - V'(u(s))h(s)\}ds \tag{9}$$

для $u, h \in E_k$ та $u, h \in E$ відповідно.

Доведення подібне до доведень тверджень 3.1 і 3.3 ([9]).

Лема 2. *Критичні точки функціоналів J_k і J є C^2–розв'язками рівняння (3), що задовольняють умови (4) і (5) відповідно.*

Доведення. Розглянемо випадок функціоналу J (інший випадок подібний). Оскільки будь–який елемент $u \in E$ задовольняє умови (5), то достатньо тільки перевірити, що критичні точки J є C^2–розв'язками (3).

Нехай $u \in E$ — критична точка функціоналу J. Тоді $\langle J(u), h \rangle = 0$ для будь–якого $h \in E$. Виберемо тут $h = \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ довільно і використаємо формулу (9). Маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{c^2 u'(s)\varphi'(s) + a(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s))\varphi(s)+$$

$$+c_0 u(s)\varphi(s) - V'(u(s))\varphi(s)\}ds = 0.$$

Це означає, що u задовольняє рівняння (3) в сенсі узагальнених функцій. Але тоді, також в сенсі узагальнених функцій

$$c^2 u''(s) = V'(u(s)) - c_0 u(s) - a(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)). \tag{10}$$

За теоремою вкладення, $u \in C(\mathbb{R})$. Отже, права частина (10) — неперервна функція. Звідси робимо висновок, що u — неперервна функція і, отже, $u \in C^2$ — розв'язок рівняння (3) в звичайному сенсі. □

Лема 3. *Правильні такі нерівності*

$$\int_{-k}^{k} |u(s+1) - u(s)|^2 ds \leq \int_{-k}^{k} |u'(s)|^2 ds, u \in E_k, \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(s+1) - u(s)|^2 ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u'(s)|^2 ds, u \in E. \tag{12}$$

Доведення є подібним до доведення леми 3.1 в [9].

4. Основні результати.

Лема 4. *Нехай виконується умова* (h), $c_0 > 0$ *і* $c > \max\{0, a\}$. *Існують* $\varepsilon > 0$ *і* $\gamma > 0$, *що не залежать від* $k \geq 1$ *такі, що для нетривіальних критичних точок функціоналів* J_k *та* J *виконуються нерівності*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq \gamma J_k(u), \tag{13}$$

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|^2 \leq \gamma J(u). \tag{14}$$

Доведення. Нехай $u \in E_k$ — критична точка функціоналу J_k. Тоді $J_k'(u) = 0$ і

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u), u\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int_{-k}^{k} \{c^2|u'(s)|^2 - a|u(s+1) - u(s)|^2 + c_0|u(s)|^2\} ds-$$

$$- \int_{-k}^{k} \left\{V(u(s)) - \frac{1}{\mu}V'(u(s))u(s)\right\} ds \geq$$

$$\geq \frac{\mu - 2}{2\mu} \left\{c^2 \int_{-k}^{k} |u'(s)|^2 ds - a \int_{-k}^{k} |u(s+1) - u(s)|^2 + c_0 \int_{-k}^{k} |u(s)|^2 ds\right\}.$$

Якщо $a \leq 0$, то другий інтеграл у правій частині можна відкинути зі збереженням нерівності. Якщо ж $a > 0$, то використаємо лему 3. В результаті отримуємо, що

$$J_k(u) \geq \frac{\mu - 2}{2\mu}\{\alpha_0 \int_{-k}^{k} |u'(s)|^2 ds + c_0 \int_{-k}^{k} |u(s)|^2 ds,$$

де $\alpha_0 = c^2$ при $a \leq 0$ та $\alpha_0 = c^2 - a$ при $a > 0$. Тоді

$$J_k(u) \geq \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_1 \left\{\int_{-k}^{k} |u'(s)|^2 ds + \int_{-k}^{k} |u(s)|^2 ds\right\} = \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_1\|u\|_k^2,$$

де $\alpha_1 = \min\{\alpha_0, c_0\}$. Звідси випливає друга нерівність (13).

Доведемо першу із нерівностей (13). Для критичної точки $u \in E_k$ маємо $\langle J_k'(u), u\rangle = 0$, тобто

$$\int_{-k}^{k} \{c^2|u'(s)|^2 - a|u(s+1) - u(s)|^2 + c_0|u(s)|^2\} ds = \int_{-k}^{k} V'(u(s)) ds.$$

Звідси, як і вище, маємо

$$\alpha_1\|u\|_k^2 \leq \int_{-k}^{k} V'(u(s))u(s) ds. \tag{15}$$

З умови (h) випливає, що
$$V'(r)r \leq \sigma(|r|)r^2,$$
де $\sigma(r)$ — монотонно зростаюча неперервна функція від $r \geq 0$ і $\sigma(0) = 0$. Тоді із (15) випливає, що
$$\alpha_1 \|u\|_k^2 \leq \sigma(\|u\|_{C([-k,k])}) \int_{-k}^{k} |u(s)|^2 ds.$$
За теоремою вкладення
$$\|u\|_{C([-k,k])} \leq C \cdot \|u\|_k,$$
з константою C, що не залежить від k. Отже,
$$\alpha_1 \|u\|_k^2 \leq \sigma(C \cdot \|u\|_k) \|u\|_k^2.$$
Оскільки $u \neq 0$, то
$$\sigma(C \cdot \|u\|_k) \geq \alpha_1,$$
звідки випливає перша нерівність (13) з
$$\varepsilon_0^{1/2} = C^{-1} \cdot \sigma^{-1}(\alpha_1).$$

Нерівність (14) доводиться аналогічно, з тими ж сталими ε_0 та γ. □

4.1. Існування періодичних біжучих хвиль. За допомогою теореми про гірський перевал встановимо існування нетривіальних біжучих хвиль з періодичним профілем. Для цього, згідно леми 2, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Відмітимо, що $u = 0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожньо дорівнює нулеві.

Теорема 1. *Нехай виконується умова (h) і $c_0 > 0$. Для будь–яких $k \geq 1$ і $c^2 > \max\{0, a\}$ рівняння (3) має розв'язок u, що задовольняє умову (4). Тим самим, існують дві біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$. Більше того, існують сталі $\varepsilon > 0$ і $C > 0$, які не залежать від k такі, що*
$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C, \tag{16}$$

$$\varepsilon_0 \leq J_k \leq C. \tag{17}$$

Сформулюємо теорему про гірський перевал у потрібному вигляді і перевіримо її умови для функціоналу J_k,.

Теорема 2 (Про гірський перевал). *Нехай I — функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, задовольняє умову Пале-Смуйла:*

PS якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $I'(u_n) \to 0$ і $I(u_n)$ обмежена, то она містить збіжну підпослідовність.

Прпустимо, що існують $e \in H$ і $r > 0$ такі, що $\|e\| > r$ і
$$\beta := \inf_{\|v\|=r} I(v) > 0 = I(0) \geq I(e)\,.$$

Тоді існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I, що $I(u) \geq \beta$. При цьому
$$I(u) \leq \sup_{\tau \geq 0} I(\tau e)\,.$$

Почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 5. *За умов теореми 1 функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Нехай $u_m \in E_k$ така послідовність, що $J_k'(u_m) \to 0$ і $J_k(u_m) \le C$. Тоді, як і на початку доведення леми 4,

$$J_k(u_m) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u_m), u_m\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int_{-k}^{k}\{c^2 u_m'(s)^2 - a|u_m(s+1) - u(s)|^2 +$$

$$+c_0 u_m(s)^2\}ds - \int_{-k}^{k}\left\{V(u_m(s)) - \frac{1}{\mu}V'(u_m(s))u_m(s)\right\}ds \ge$$

$$\ge \frac{\mu-2}{2\mu}\{c^2\int_{-k}^{k}u_m'(s)^2 ds - a\int_{-k}^{k}|u_m(s+1) - u_m(s)|^2 ds + c_0\int_{-k}^{k}u_m(s)^2 ds.$$

Як і в доведенні леми 4, права частина цієї нерівності оцінюється знизу величиною

$$\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\|u_m\|_k^2.$$

З іншої сторони, її ліва частина не перевищує

$$C + \frac{1}{\mu}C_1\|u_m\|_k.$$

Звідси

$$\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\|u_m\|_k^2 \le C + \frac{1}{\mu}C_1\|u_m\|_k,$$

що доводить обмеженість послідовності u_m у просторі E_k.

Оскільки простір E_k гільбертовий, то можна вважати, що $u_m \to u$ слабко в E_k. З компактності вкладення $E_k \subset C([-k,k])$ – остання збіжність є сильною в $C([-k,k])$.

Приймемо $u_{m,l} = u_m - u_l$. За лемою 1 маємо

$$\langle J_k'(u_m) - J_k'(u_l), u_{m,l}\rangle =$$

$$= \int_{-k}^{k}\{c^2 u_{m,l}(s)^2 - a(u_{m,l}(s+1) - u_{m,l}(s))^2 + c_0 u_{m,l}(s)^2\}ds -$$

$$-\int_{-k}^{k}\{V'(u_m(s)) - V'(u_l(s))\}u_{m,l}(s)ds.$$

Звідси, за допомогою того ж прийому, що і у доведенні леми 4, отримуємо

$$\langle J_k'(u_m) - J_k'(u_l), u_{m,l}\rangle \ge \alpha_1\|u_{m,l}\|_k^2 -$$

$$-\int_{-k}^{k}\{V'(u_m(s)) - V'(u_l(s))\}u_{m,l}ds,$$

або

$$\alpha_1\|u_{m,l}\|_k^2 \le \langle J_k'(u_m) - J_k'(u_l), u_{m,l}\rangle +$$

$$+\int_{-k}^{k}\{V'(u_m(s)) - V'(u_l(s))\}u_{m,l}ds. \tag{18}$$

Оскільки $u_{m,l} \to 0$ слабко в E_k, а $J'_k(u_m) \to 0$ сильно в спряженому просторі E_k^*, при $m,l \to \infty$, то перший член в правій частині (18) прямує до нуля. Крім того, $u_m \to u$ в $C([-k,k])$. Звідси випливає, що підінтегральний вираз в (18) прямує до нуля рівномірно на $[-k,k]$ при $m,l \to \infty$. Отже, інтегральний член в (18) також прямує до нуля. Звідки випливає, що u_m — послідовність Коші в E_k і, отже, $u_m \to u$ сильно в E_k. □

Лема 6. *За умов теореми 1 існує $r_0 > 0$, яке не залежить від k таке, що*

$$\inf_{\|u\|_k = r_0} J_k(u) > 0.$$

Доведення. За умовою (h)

$$V(r) \le \mu^{-1}\sigma(|r|)) r^2.$$

Звідси маємо

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\int_{-k}^{k} \{c^2 u'(s)^2 - a|u(s+1) - u(s)|^2 + c_0 u(s)^2\} ds -$$

$$- \int_{-k}^{k} V(u(s)) ds \ge \frac{\alpha_1}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\int_{-k}^{k} \sigma(u(s)) u(s)^2 ds \ge$$

$$\ge \frac{\alpha_1}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\sigma(\|u\|_{C([-k,k])})\|u\|^2_{L^2(-k,k)} \ge$$

$$\ge \frac{\alpha_1}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\sigma(\|u\|_{C([-k,k])})\|u\|_k^2.$$

За теоремою вкладення,

$$\|u\|_{C([-k,k])} \le C\|u\|_k.$$

Тому

$$J_k(u) \ge \left\{\frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{\mu}\sigma(C\|u\|_k)\right\}\|u\|_k^2.$$

Виберемо $r_0 > 0$ таким, що

$$\frac{1}{\mu}\sigma(Cr_0) = \frac{\alpha_1}{4}.$$

Можливість такого вибору випливає з властивостей функції $\sigma(r)$. Тоді при $\|u\|_k = r_0$ маємо

$$J_k(u) \ge \frac{\alpha_1 r_0^2}{4},$$

що і доводить лему. □

Зафіксуємо довільну нескінченно диференційовну функцію $\varphi \ne 0$ на $\mathbb{R}$ з носієм в інтервалі $[0,1]$. Нехай тепер v_k — така $2k$–періодична функція, що $v_k|_{[-k,k]} = \varphi|_{[-k,k]}$. Очевидно, що $v_k \in E_k$.

Лема 7. *За умов теореми 1 існує таке $\tau_0 > 0$ (незалежне від k), що*

$$J_k(\tau v_k) = J_1(\tau v_1) \le 0$$

для всіх $\tau \ge \tau_0$.

Доведення. За означенням v_k маємо при $k \geq 1$

$$J_k(\tau v_k) = \frac{1}{2}\int_{-k}^{k}\{c^2\tau^2\varphi'(s)^2 - a\tau^2|\varphi(s+1)-\varphi(s)|^2 + c_0\tau^2\varphi(s)^2\}ds - \int_{-k}^{k} V(\tau\varphi(s))ds =$$

$$= \frac{\tau^2}{2}\int_{-1}^{1}\{c^2\varphi'(s)^2 - a|\varphi(s+1)-\varphi(s)|^2 + c_0\varphi(s)^2\}ds - \int_{0}^{1} V(\tau\varphi(s))ds.$$

З умови (h) випливає, що

$$V(\tau\varphi(s)) \geq d\tau^\mu|\varphi(s)|^\mu - d_0.$$

Тому

$$J_k(\tau v_k) = J_1(\tau v_1) \leq \gamma_1\tau^2 - d\gamma_2\tau^\mu - d_0,$$

де

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\{c^2\varphi'(s)^2 - a|\varphi(s+1)-\varphi(s)|^2 + c_0\varphi(s)^2\}ds > 0,$$

$$\gamma_2 = \int_{-1}^{1}|\varphi(s)|^\mu ds > 0.$$

Оскільки $\mu > 2$, то звідси отримуємо твердження леми. □

Доведення теореми 1. Леми 5–7 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 2, u — C^2–розв'язок задачі (3), (4). Оцінки знизу для $\|u\|_k$ і $J_k(u)$ випливають із леми 4. За лемою 7,

$$J_k(u) \leq \sup_{\tau\geq 0} J_k(\tau v_k) = \sup_{\tau\geq 0} J_1(\tau v_1) = C.$$

Оцінка зверху для $\|u\|_k$ випливає тепер із леми 4. Теорему доведено. □

4.2. Існування відокремлених біжучих хвиль. Доведемо існування відокремлених біжучих хвиль за тих самих припущень, за яких встановлено існування періодичних хвиль. Біжучі хвилі в даному випадку знаходяться як критичні точки функціоналу J. Для останнього виконуються твердження, подібні до лем 6 та 7. Отже, функціонал J задовольняє частину умов теореми про гірський перевал. Однак, умова Пале–Смейла для цього функціоналу не виконується. Тому критичні точки в даному випадку будуються іншим способом — за допомогою переходу до границі в критичних точках функціоналу J_k при $k \to \infty$.

Теорема 3. *Нехай виконується умова (h) і $c_0 > 0$. Для будь–якого $c^2 > \max\{0, a\}$ рівняння (3) має розв'язок $u \in E$, (отже, він задовольняє умову (5)). Тобто, існують дві відокремлені біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$.*

Для доведення теореми знадобляться деякі попередні результати. Перший з них добре відомий [7].

Лема 8. *Нехай v_n — обмежена послідовність в $E = H^1(\mathbb{R})$. Якщо для деякого $r > 0$*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\int_{y-r}^{y+r}|v_n(s)|^2 ds \to 0, \tag{19}$$

то $v_n \to 0$ в $L^p(\mathbb{R})$ для будь–якого $p > 2$.

Далі знадобиться наступна модифікація цього результату.

Лема 9. *Нехай $u_n \in E_{k_n}$, де $k_n \to \infty$, і $\|u_n\|_{k_n}$ обмежено. Якщо для деякого $r > 0$*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{y-r}^{y+r} |u_n(s)|^2 ds \to 0, \tag{20}$$

то $\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} \to 0$ для будь–якого $p > 2$.

Доведення. Це твердження зводиться до попереднього у такий спосіб. Позначимо через χ таку неперервну функцію на $\mathbb{R}$, що $\chi_n(s) = 1$ при $|s| \le k_n$, $\chi_n(s) = 0$ при $|s| \ge k_n + 1$ і $\chi_n(s)$ лінійна на інтервалі $[-k_n - 1, -k_n]$ і $[k_n, k_n + 1]$. Очевидно, χ диференційовна скрізь, крім точок $s = \pm k_n, \pm(k_n + 1)$, і $|\chi_n'(s)| \le 1$.

Покладемо $v_n(s) = \chi_n(s)u_n(s)$. Тоді $v_n \in H^1(\mathbb{R})$ і маємо носій в інтервалі $[-k_n - 1, k_n + 1]$.

Маємо також

$$\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_n(s)u_n(s)|^2 ds \le \int_{-k_n-1}^{k_n+1} |u_n(s)|^2 ds \le \int_{-2k_n}^{2k_n} \le 2\|u_n\|^2_{L^2(-k_n,k_n)}.$$

Крім того, за формулою Лейбніца,

$$\begin{aligned}
\|v_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\chi_n u_n' + \chi_n' u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \|\chi_n u_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\chi_n' u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \\
&\le \left\{ \int_{-k_n-1}^{k_n+1} |u_n'(s)|^2 ds \right\}^{1/2} + \left\{ \left(\int_{-k_n-1}^{-k_n} + \int_{k_n}^{k_n+1} \right) |u_n(s)|^2 ds \right\}^{1/2} \le \\
&\le \left\{ \int_{-2k_n}^{2k_n} |u_n'(s)|^2 ds \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{-2k_n}^{2k_n} |u_n(s)|^2 ds \right\}^{1/2} = \\
&= \sqrt{2} \left\{ \|u_n'\|_{L^2(-k_n,k_n)} + \|u_n\|_{L^2(-k_n,k_n)} \right\}.
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що послідовність

$$\|v_n\|^2_{H^1(\mathbb{R})} = \|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|v_n'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

обмежена.

Очевидно, також, що із співвідношення (20) для u_n випливає співвідношення (19) для v_n. Тому, за лемою 8, $\|v_n\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$. Проте,

$$\|v_n\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int_{-k_n-1}^{k_n+1} |\chi_n(s)u_n(s)|^p ds \ge \int_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^p ds = \|u_n\|^p_{L^p(-k_n,k_n)}$$

і лему доведено. □

Доведення теореми 3. Виберемо довільну послідовність $k_n \to \infty$ і позначимо через $u_n \in E_{k_n}$ розв'язок рівняння (3) з умовою (4) при $k = k_n$, побудований у теоремі 1.

Переходячи до підпослідовності, можна вважати, що існують такі $\delta > 0, r > 0$ і послідовність $y_n \in \mathbb{R}$, що

$$\int_{y_n-r}^{y_n+r} |u_n(s)|^2 ds \ge \delta. \tag{21}$$

Справді, нехай це не так. Тоді для будь–якого $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{y-r}^{y+r} |u_n(s)|^2 ds = 0.$$

Крім того, за нерівністю (16), послідовність $\|u_n\|_{k_n}$ обмежена. Звідси, за лемою 9, випливає, що

$$\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} \to 0. \tag{22}$$

Далі, $J'_k(u_n) = 0$ і, отже, $\langle J'_k(u_n), u_n\rangle = 0$, тобто

$$\int_{-k_n}^{k_n} \{cu'_n(s)^2 - a|u_n(s+1) - u_n(s)|^2 + c_0 u_n(s)^2\} ds = \int_{-k_n}^{k_n} V'(u_n(s))u_n(s)ds.$$

Звідси

$$\alpha_1 \|u_n\|^2_{k_n} \le \int_{-k_n}^{k_n} V'(u_n(s))u_n(s)ds. \tag{23}$$

За теоремою вкладення, функції $u_n(s)$ неперервні і рівномірно за n обмежені, тобто існує таке $R > 0$, що $|u_n(s)| \le R$. Фіксуємо довільне $p > 2$. За умовою (h), для будь–якого $\varepsilon > 0$ існує таке $C = C_\varepsilon$, що при $|r| \le R$

$$|V'(r)| \le \varepsilon |r| + C|r|^{p-1}.$$

Тоді нерівність (23) дає

$$\alpha_1\|u_n\|^2_{k_n} \le \varepsilon \int_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^2 ds + C \int_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^p ds =$$

$$= \varepsilon \|u_n\|^2_{L^2(-k_n,k_n)} + C\|u_n\|^p_{L^p(-k_n,k_n)} \le \varepsilon\|u_n\|^2_{k_n} + C\|u_n\|^p_{(-k_n,k_n)}.$$

Вибираючи тут $\varepsilon = \alpha_1/2$, отримуємо

$$\frac{\alpha_1}{2}\|u_n\|^2_{k_n} \le C\|u_n\|^p_{L^p(-k_n,k_n)}.$$

Тоді, згідно (22), $\|u_n\|_{k_n} \to 0$, що суперечить першій нерівності в (16). Отже, (21) доведено.

Рівняння (3) інваріантне відносно зсувів. Тому, якщо $u(s)$ — його розв'язок, то $u(s+y)$ також розв'язок для будь–якого $y \in \mathbb{R}$. Отже, замінюючи $u_n(s)$ на $u_n(s+y_n)$, можна вважати, що (21) виконується з $y_n = 0$.

Оскільки $\|u_n\|_{k_n}$ обмежено, то, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $u_n \to u$ слабко в $H^1_{loc}(\mathbb{R})$, тобто слабко в $H^1(a,b)$ для будь–якого скінченного інтервалу (a,b). За теоремою вкладення, $u_n \to u$ рівномірно на будь–якому скінченному інтервалі. Тому в нерівності (21) (з $y_n = 0$) можна перейти до границі та отримати, що

$$\int_{-r}^{r} |u(s)|^2 ds \ge \delta.$$

Це показує, що $u \ne 0$.

Доведемо, що $u \in E$. Виберемо довільне $b > 0$. Для достатньо великих n маємо

$$\int_{-b}^{b} \{|u_n'(s)|^2 + |u_n(s)|^2\} ds \le \int_{-k_n}^{k_n} \{|u_n'(s)|^2 + |u_n(s)|^2\} ds \le C,$$

з обмеженості $\|u_n\|_{k_n}$. Оскільки $u_n \to u$ слабко в $H^1(-b, b)$, то

$$\int_{-b}^{b} \{|u'(s)|^2 + |u(s)|^2\} ds \le \liminf_{n\to\infty} \int_{-b}^{b} \{|u_n'(s)|^2 + |u_n(s)|^2\} ds \le C.$$

Оскільки b довільне, то звідси слідує, що

$$\|u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{|u'(s)|^2 + |u(s)|^2\} ds \le C < \infty,$$

тобто $u \in E$.

Залишається перевірити, чи u — розв'язок рівняння (3). Нехай $\varphi(s)$ — довільна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм. Для достатньо великого n інтервал $(-k_n + 1, k_n - 1)$ містить $(-b, b)$ і, отже, коректно визначена функція $\varphi_n \in E_{k_n}$, яка збігається з φ на $(-k_n, k_n)$. Оскільки u_n — критична точка функціоналу J_k, то

$$0 = \langle J_{k_n}'(u_n), \varphi_n \rangle = \int_{-k_n}^{k_n} \{c^2 u_n'(s)\varphi_n'(s) - a(u_n(s+1) + u_n(s-1) -$$

$$-2u_n(s))\varphi_n(s) + c_0 u_n(s)\varphi_n(s)\} ds - \int_{-k_n}^{k_n} V'(u_n(s))\varphi_n(s) ds =$$

$$= \int_{-b}^{b} \{c^2 u_n'(s)\varphi'(s) - a(u_n(s+1) + u_n(s-1) - 2u_n(s))\varphi(s) +$$

$$+ c_0 u_n(s)\varphi(s)\} ds - \int_{-b}^{b} V'(u_n(s))\varphi(s) ds.$$

В першому інтегралі правої частини цієї рівності можна перейти до границі при $n \to \infty$, оскільки $u_n \to u$ слабко в $H^1(-b, b)$. За теоремою вкладення, $u_n \to u$ рівномірно на $[-b, b]$. Тому і в другому інтегралі можна перейти до границі. Отже,

$$0 = \int_{-b}^{b} \{c^2 u'(s)\varphi'(s) - a(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s))\varphi(s) +$$

$$+ c_0 u(s)\varphi(s)\} ds - \int_{-b}^{b} V'(u(s))\varphi(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \{c^2 u'(s)\varphi'(s) -$$

$$-a(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s))\varphi(s) + c_0 u(s)\varphi(s) - V'(u(s))\varphi(s)\} ds = \langle J'(u), \varphi \rangle.$$

Оскільки φ — довільна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм і множина таких функцій щільна в E, то $J'(u) = 0$. Значить, u — критична точка функціоналу J і, отже, розв'язок задачі, що розглядається. Теорему доведено. $\square$

4.3. Експоненційне спадання профілю відокремленої хвилі. Рівняння (3) запишемо у вигляді

$$Lu = f(u), \tag{24}$$

де

$$Lu(t) = -c^2u''(t) + a(u(t+1) + u(t-1) - 2u(t)) + c_0u(t) \tag{25}$$

і $f(r) = V'(r)$. Відносно функції $f(r)$ зробимо наступне, слабше, ніж (h), припущення.

(h') *$f(r)$ неперервна на $\mathbb{R}, f(0) = 0, f(r) = o(r)$ при $r \to 0$ і $f(r) = 0$ при $r \neq 0$.*

Розглядаються розв'язки, що лежать у просторі $E = H^1(\mathbb{R})$.

Нехай $u \in E$ — такий розв'язок. Покладемо

$$g(t) = \frac{f(u(t))}{u(t)}$$

(якщо $u(t) = 0$, то $g(t) = 0$ за означенням). Із умови (h') випливає, що

$$\lim_{t\to\pm\infty} g(t) = 0.$$

Рівняння (24) набуває вигляду

$$Lu(t) = g(t) \cdot u(t). \tag{26}$$

Застосовуючи до рівняння (26) перетворення Фур'є, отримуємо

$$\sigma(\xi)\widehat{u}(\xi) = \widehat{g \cdot u}(\xi), \tag{27}$$

де

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4a\sin^2\frac{\xi}{2} + c_0. \tag{28}$$

Зазначимо, що функція $\sigma(\xi), \xi \in \mathbb{R}$, продовжується до цілої функції

$$\sigma(\zeta) = c^2\zeta^2 - 4a\sin^2\frac{\zeta}{2} + c_0, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Лема 10. *Нехай $c^2 > \max(a, 0)$ і $c_0 > 0$. Тоді існує таке $\beta_0 > 0$, що функція $\sigma(\zeta)$ не має нулів у смузі $|Im\zeta| < \beta_0$.*

Доведення. Перш за все зазначимо, що $\sigma(\xi) > 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ і, отже, σ не перетворюється в нуль на дійсній прямій. Справді, якщо $a < 0$, то, очевидно, маємо

$$\sigma(\xi) = c^2 - 4a\sin^2\frac{\xi}{2} + c_0 \geq c^2\xi^2 + c_0 \geq c_0 > 0.$$

Якщо ж $a > 0$, то скористатись нерівністю

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Маємо

$$\sigma(\xi) = c^2 - 4a\sin^2\frac{\xi}{2} + c_0 \geq c^2\xi^2 - a\xi^2 + c_0 \geq (c^2 - a)\xi^2 + c_0 \geq c_0 > 0.$$

Нехай тепер $A > 0$ — довільне додатне число. Нехай $|Im\zeta| < A$. Записавши ζ у вигляді $\zeta = \zeta + i\tau$, маємо $|\tau| < A$ і

$$|\sin\frac{\zeta}{2}| = \frac{1}{2}|e^{i\zeta/2} - e^{-i\zeta/2}| = \frac{1}{2}|e^{i\xi/2}e^{-\tau/2} - e^{-i\xi/2}e^{\tau/2}| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(e^{-\tau/2} + e^{\tau/2}) \leq e^{A/2}.$$

Отже,

$$4|a\sin^2\frac{\zeta}{2}| \leq 4|a|e^{A}.$$

Тоді

$$|\sigma(\xi + i\tau)| \geq c^2|\xi + i\tau|^2 - 4|a|e^{A} - c_0.$$

Тому, якщо $|\xi|$ достатньо велике і $|\tau| < A$, то $|\sigma(\xi + i\tau)| > 0$ і, отже, $\sigma(\zeta) \neq 0$ для таких $\zeta = \xi + i\tau$. Отже, існує таке $B > 0$, що при $|\tau| < A, |\xi| \geq B$ функція $\sigma(\zeta)$ не перетворюється в нуль. Крім того, в прямокутнику $|\xi| < B, |\tau| < A$ аналітична функція $\sigma(\zeta)$ може мати не більше скінченної кількості нулів. Звідси негайно випливає існування такого $\beta_0 > 0$, що в смузі $|\tau| < \beta_0$ немає нулів функції $\sigma(\zeta)$. □

Далі знадобиться наступне твердження (лемма 4.8, [9]).

Лема 11. *Нехай $u(t)$ і $g(t)$ обмежені невід'ємні функції на $\mathbb{R}$, причому $\lim_{t\to\pm\infty} g(t) = 0$. Нехай також*

$$u(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t-s|}g(s)u(s)ds,$$

з $\beta > 0$. Тоді для всіх $\alpha \in (0, \beta)$ існує така стала $C = C_\alpha$), що

$$u(t) \leq Ce^{-\alpha|t|}.$$

Правильна така теорема.

Теорема 4. *Нехай виконується умова (h'), $c^2 > \max(a, 0)$ і $c_0 > 0$. Якщо $u \in E$ — розв'язок рівняння (3), то для будь–якого $\beta \in (0, \beta_0)$, де β_0 з леми 10, існує таке $C_\beta > 0$, що*

$$|u(t)| \leq C_\beta e^{-\beta|t|}. \tag{29}$$

Доведення. З рівняння (27) отримуємо

$$\widehat{\xi} = \frac{1}{\sigma(\xi)}\widehat{g\cdot u}(\xi).$$

Нехай

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\cdot\frac{1}{\sigma(\xi)}d\xi.$$

Тоді

$$u(t) = [K * (g\cdot u)](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)g(s)u(s)ds. \tag{30}$$

Оскільки, за лемою 10, функція $1/\sigma(\zeta)$ аналітична в смузі $|\mathrm{Im}\,\zeta| < \beta_0$, то, за теоремою Пелі–Вінера, для $K(t)$ правильна оцінка

$$|K(t)| \le C_\beta e^{-\beta|t|}$$

для будь–якого $\beta \in (0, \beta_0)$. Із (30) отримуємо

$$|u(t)| \le C_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t-s|}|g(s)||u(s)|ds.$$

Тепер, за лемою 11, отримуємо те, що й вимагалося. □

Оскільки умова (h) сильніша за умову (h'), то із теореми 4 випливає

Наслідок 1. *За умов теореми 4 для розв'язку u правильна експоненційна оцінка (29) для будь–якого $\beta \in (0, \beta_0)$.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Бак С.Н., Панков А.А. *О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов* // Доповіді НАН України. – 2004. – №9.
2. Бак С.Н. *Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов* // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – Т.11. – №3 . – С. 263–273.
3. Aubry S. *Breathers in nonlinear lattices: Existence,linear stability and quantization* // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201–250.
4. Braun O.M., Kivshar Y.S. *Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model* // Physics Repts. – 1998. – 306. – P. 1–108.
5. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel–Kontorova model. – Berlin: Springer, 2004. – 427 pp.
6. Ioos G., Kirchgässner K. *Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators* // Commun. Math. Phys. – 2000. – V. 211, №3. – P. 439–464.
7. Lions P.L. *The concentration – compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II* // Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire. – 1984. – V. 1. – P. 223 – 238.
8. MacKay R.S., Aubry S. *Proof of existence of breathers for time-reversible a Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators* // Nonlinearity. – 1994. – P. 1623–1643.
9. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi – Pasta – Ulam Lattices. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 pp.
10. Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. – Providence, R. I.: American Math. Soc. – 1986. – 100 pp.
11. Willem M. Minimax theorems. – Boston, Birkhäuser. – 1996. – 162 pp.

Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського
Sergey.bak@online.com.ua

Надійшло 15.10.2005