О.М. Соя, Л.А. Тютюн, О.М. Кравчук
м. Вінниця, м. Луцьк

РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАСОБАМИ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ MAXIMA

Анотація. *У статті висвітлено питання реалізації методу скінченних різниць розв'язання крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь засобами інформаційної системи Maxima.*

Ключові слова: *крайова задача, лінійне диференціальне рівняння другого порядку, система комп'ютерної алгебри Maxima.*

Abstract.*The article highlights the implementation of finite difference method of solving boundary value problems for linear differential equations by means of an information system Maxima.*

Keywords: *boundary value problem, linear differential equation of second order, Maxima, a Computer Algebra System***.**

Постановка проблеми. На другому етапі (2016-2020 роки) реалізації Стратегії розвитку інформаційного суспільства в Україні [4] передбачається «широке впровадження інформаційно-комунікаційних технологій в освіту…». Використання ІКТ суттєво впливає на організацію та зміст навчально-дослідницької діяльності студентів педагогічного ВНЗ. Відповідно до інформаційного обсягу дисципліни «Чисельні методи» існує потреба ознайомлення майбутніх учителів інформатики та математики з відомими (типовими) числовими алгоритмами розв'язання математичних задач і закріплення навичок знаходження розв'язків обчислювальних завдань не лише за допомогою калькулятора, а й автоматизованим способом, за допомогою поширених математичних пакетів індивідуального користування.

Теоретичне обґрунтування основних аспектів впровадження сучасних інформаційних ресурсів у профільну підготовку майбутніх фахівців забезпечили Ю. Биков, Р. Гуревич, М. Жалдак, Н. Морзе, О. Співаковський, С. Раков, Ю. Триус. Практичні можливості програмних засобів активно використовують у своїй роботі Г. Злобін, М. Ковтонюк, У. Когут, Н. Кузьміна, Ю. Рамський, М. Рафальська, С. Семеріков, О. Туржанська, Л. Тютюн та інші.

Ця стаття присвячена реалізація методу скінченних різниць розв'язання крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку засобами інформаційної системи Maxima.

Виклад основного матеріалу дослідження. Чимало задач математики й фізики зводяться до крайових задач. Виникають такі крайові задачі як для звичайних диференціальних рівнянь, так і диференціальних рівнянь в частинних похідних [2, с. 209-303; 3, с. 167-250; 5, с. 336-455]. Їх точне (аналітичне) розв'язання часто викликає певні труднощі. Науковцями розроблено достатню кількість наближених методів, алгоритми яких досить зручно реалізувати за допомогою сучасних інформаційних середовищ. Пропонуємо Вашій увазі технологію розв'язання крайової задачі для диференціальних рівнянь методом скінченних різниць за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maxima. Система поширюється під ліцензією GPLі доступна користувачам Windows, Linux, Mac OC X [6].

Найповніше дослідження крайової задачі вдається провести тоді, коли диференціальне рівняння й крайові умови лінійні.

Лінійне диференціальне рівняння m –го порядку рекурентно запишемо у вигляді:

$$L(y) = f(x). \qquad (1)$$

де $L(y) = p_0(x)y^{(m)} + p_1(x)y^{(m-1)} + \ldots + p_m(x)y$,а $p_i(x)(i = 0,\ 1, \ldots,\ m)$,$f(x)$ – відомі неперервні функції на заданому відрізку $[a,\ b]$.

Будемо вважати, що в крайові умови входять дві абсциси $a = x_0$ й $b = x_n$ ($a < b$) – кінці відрізка $[a,\ b]$. Такі крайові умови називаються ***двоточковими***.

Крайові умови називаються ***лінійними***, якщо вони мають вигляд:

$$R_v(y) = \gamma_v(v = 1,\ 2,\ m), \qquad (2)$$

де $R_v(y) = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\alpha_k^{(v)} y^{(k)}(a) + \beta_k^{(v)} y^{(k)}(b)\right)$ і $\alpha_k^{(v)}$, $\beta_k^{(v)}$, γ_v– задані сталі, причому $\sum_{k=0}^{m-1}\left(\left|\alpha_k^{(v)}\right| + \left|\beta_k^{(v)}\right|\right) \neq 0$ при $v = 1,\ 2, \ldots,\ m$.

Лінійна крайова задача полягає в знаходженні функції $y = y(x)$, що задовольняє диференціальне рівняння $L(y) = f(x)$ і крайові умови $R_v(y) = \gamma_v$, причому крайові умови вважаються лінійно незалежними.

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \qquad (3)$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – деякі неперервні на відрізку $[a,\ b]$ функції.

Крайові умови для двоточкової лінійної крайової задачі другого порядку мають вигляд:

$$\begin{cases} R_a(y) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ R_b(y) = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \qquad (4)$$

де $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, α_0, α_1, β_0, β_1 – сталі. Такі крайові умови визначають *третю* крайову задачу для рівняння (3). Якщо $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то умови визначають *першу* крайову задачу, а коли $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ – *другу*[2, с. 212-213; 3, с. 168].

Для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку при розв'язуванні крайової задачі методом скінченних різниць відрізок $[a,\ b]$ розіб'ємо на n рівних частин з кроком h, де $h = \frac{b-a}{n}$. Точки розбиття мають абсциси: $x_i = x_0 + ih(i = 0,\ 1, \ldots,\ n)$, де $a = x_0$, $b = x_n$.

Значення в точках поділу x_i шуканої функції $y = y(x)$ та її похідних $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$ позначимо відповідно через $y_i = y(x_i)$, $y_i{}' = y'(x_i)$, $y_i{}'' = y''(x_i)$. Введемо також позначення: $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

Замінюючи похідні симетричними скінченно-різницевими відношення для внутрішніх точок x_i відрізка $[a,\ b]$, маємо [2, с. 220]:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},\quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},\quad i = 1, \ldots,\ n-1. \tag{5}$$

Для крайніх точок $a = x_0$, $b = x_n$, щоб не виходити за межі відрізка $[a,\ b]$ маємо[2, с. 220]:

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h},\quad y_n' = \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \tag{6}$$

Якщо функція $y = y(x)$ досить гладка, то точнішими для крайових умов є формули[2, с. 220]:

$$y_0' = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h},\quad y_n' = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h},\quad n \geq 2. \tag{7}$$

Використовуючи формули (5), диференціальне рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ у внутрішніх точках $x = x_i$ ($i = 1, \ldots,\ n-1$) наближено запишемо у вигляді системи лінійних алгебричних рівнянь [2, с. 221]:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i,\ \ (i = 1, \ldots, n-1). \tag{8}$$

Ще два рівняння дають крайові умови (6):

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A,$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B.$$

або крайові умови (7):

$$\alpha_1 y_0 + \alpha_1 \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = A,$$

$$\beta_1 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B.$$

Таким чином, отримали $(n+1)$ лінійних алгебричних рівнянь з $(n+1)$ невідомими y_0, y_1, …, y_n, що є значеннями шуканої функції $y = y(x)$ в точках x_0, x, …, x_n.

Розв'язавши утворену систему лінійних алгебричних рівнянь (8) з крайовими умовами (6) або (7), отримаємо таблицю значень шуканої функції

$y = y(x)$. Для цього виконаємо групування відносно y_{i-1}, y_i, y_{i+1} $(i = 1, \dots , n-1)$.

Маємо

$$\begin{cases} y_{i-1}\left(1 - \frac{h}{2}p_i\right) + y_i(h^2 q_i - 2) + y_{i+1}\left(1 + \frac{h}{2}p_i\right) = h^2 f_i, \\ y_0(\alpha_0 h - \alpha_1) + y_1 \alpha_1 = hA, \\ y_{n-1}(-\beta_1) + y_n(\beta_0 h + \beta_1) = hB; \end{cases} \quad 9)$$

або

$$\begin{cases} y_{i-1}\left(1 - \frac{h}{2}p_i\right) + y_i(h^2 q_i - 2) + y_{i+1}\left(1 + \frac{h}{2}p_i\right) = h^2 f_i, \\ y_0(2h\alpha_0 - 3\alpha_1) + 4y_1\alpha_1 - y_2\alpha_1 = 2hA, \\ y_{n-2}\beta_1 - 4y_{n-1}\beta_1 + y_n(2h\beta_0 + 3\beta_1) = 2hB. \end{cases} \quad 10)$$

Для коефіцієнтів основної матриці системи (9) введемо позначення:

$a_{k,k} = 1 - \frac{h}{2}p_i$, $a_{k,k+1} = h^2 q_i - 2$, $a_{k,k+2} = 1 + \frac{h}{2}p_i$,

$a_{n1} = \alpha_0 h - \alpha_1$, $a_{n2} = \alpha_1$, $a_{n+1,n} = -\beta_1$, $a_{n+1,n+1} = \beta_0 h + \beta_1$.

Матриця вільних членів має вигляд: $b_k = h^2 f_i$, $b_n = hA$, $b_{n+1} = hB$. Зауважимо, що $k = 1, \dots , n-1$, $i = 1, \dots , n-1$.

Інші члени системи дорівнюють нулю.

Таким чином, застосовуючи метод скінченних різниць до крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, отримаємо «трьохчленну систему» лінійних алгебричних рівнянь, кожне з яких містить три сусідніх невідомих. Для розв'язування такої системи «вручну» доцільно використовувати метод прогонки.

Аналогічні позначення й обчислення можна виконати для системи (10), використовуючи відповідні коефіцієнти при невідомих $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Технологію розв'язання крайової задачі методом скінченних різниць в інформаційний системі Maxima розглянемо на прикладі.

Постановка задачі. Знайти розв'язок рівняння $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1$ на інтервалі $[0{,}5;\ 4{,}5]$ з крайовими умовами $y(0{,}5) = 1$ та $y(4{,}5) = 2$ $(n = 4)$.

Стратегія розв'язання за [1, с. 91-93].

Введемо позначення для заданого лінійного диференціального рівняння другого порядку:

```
(%i1)   p(x):=-1/x$ q(x):=1/(x^2)$ f(x):=1$
```

Для крайових умов маємо:

```
(%i2)   alfa0:1$ alfa1:0$ ac:1$
        beta0:1$ beta1:0$ bc:2$
```

Розіб'ємо відрізок $[a,\ b]$ на n рівних частин з кроком h.

```
(%i3)   a:0.5$ b:4.5$
        n:4$ h:(b-a)/n$
```

Сформуємо список, що містить всі точки відрізка:

```
(%i4)  x:makelist(a+(k-1)*h,k,1,n+1);
(%o4)  [0.5,1.5,2.5,3.5,4.5]
```

Сформуємо пусту квадратну матрицю C розмірності $(n+1)$:

```
(%i5)  C:genmatrix(lambda([i,j],0),n+1,n+1);
```

(%o5)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Заповнимо матрицю C за формулами системи (9).

Для заповнення коефіцієнтами $(n-1)$ рівняння використаємо цикл з параметром:

```
(%i6)  for i:1 thru n-1 do for j:1 thru n+1 do
       (if i=j then C[i,j]:1-p(x[i+1])*h/2
       else if j=i+1 then C[i,j]:h^2*q(x[i+1])-2
       else if j=i+2 then C[i,j]:1+p(x[i+1])*h/2 else 0);
(%o6)  done
```

В n –го й $(n+1)$ –го рівнянь змінимо значення деяких елементів за допомогою оператора присвоєння:

```
(%i7)  C[n,1]:alfa0*h-alfa1$ C[n,2]:alfa1$
       C[n+1,n]:-beta1$ C[n+1,n+1]:beta0*h+beta1$
```

Заповнимо стовпець вільних членів D:

```
(%i8)  D:makelist(if k<=4 then h^2*f(x[k]) else 0,k,1,n+1)$
       D[n]:h*ac$ D[n+1]:h*bc$
```

Виведемо отримані матриці на екран:

```
(%i9)  C;
```

(%o9)
$$\begin{bmatrix} 1.333333333333333 & -1.555555555555556 & 0.6666666666666667 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.84 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.142857142857143 & -1.918367346938775 & 0.8571428571428572 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

```
(%i10) D;
(%o10) [1.0,1.0,1.0,1.0,2.0]
```

Отримали систему лінійних алгебричних рівнянь в матричній формі $C \cdot \vec{y} = D$, де $\vec{y}$ – шуканий розв'язок заданого лінійного диференціального рівняння на сітці відрізка $[a,\ b]$. Знайдемо його матричним методом:

```
(%i11) invert(C).D;
```

(%o11)
$$\begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.01030927835051554 \\ -0.5240549828178692 \\ 0.06013745704467377 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

Аналітичний розв'язок заданого лінійного диференціального рівняння другого порядку $g(x) = x^2 - 0{,}2525826491x - 2{,}528442297x\ln x$ доводить, що точність розв'язку, знайденого методом скінченних різниць,прямо пропорційна кількості відрізків розбиття.

Наприклад, для $g(3{,}5) \approx 0{,}2796$ маємо:

при $n = 4 \Rightarrow y(3{,}5) \approx 0{,}0601$; при $n = 32 \Rightarrow y(3{,}5) \approx 0{,}2748$;

при $n = 8 \Rightarrow y(3{,}5) \approx 0{,}2108$; при $n = 44 \Rightarrow y(3{,}5) \approx 0{,}2770$;

при $n = 16 \Rightarrow y(3{,}5) \approx 0{,}2609$; при $n = 48 \Rightarrow y(3{,}5) \approx 0{,}2774$.

Висновки. Таким чином, виділимо *переваги*: Maxima дозволяє досить швидко знайти розв'язок крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку методом скінченних різниць; *недоліки*: прихований вміст процедурних додатків не дозволяє повною мірою відпрацювати практичні навички розв'язання задачі; *напрямок самовдосконалення*: подальше вивчення особливостей алгоритмічної мови Maxima та застосування системи для розв'язання широкого кола математичних задач.

Література

1. Губина Т.Н. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики Maxima: учебное пособие // Т.Н. Губина, Е.В. Андропова. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2009. – 99 с.
2. Демидович Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – 3-е изд., переработанное / .Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 368 с.
3. Попов В.В. Методи обчислень: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету / В.В. Попов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. – 303 с.
4. Стратегія розвитку інформаційного суспільства в Україні [Електронний ресурс] / Розпорядження Кабінету Міністрів України від 15 травня 2013 р., № 386-р. – Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/386-2013-%D1%80#n8
5. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці: підручник / Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
6. http://maxima.sourceforge.net/ru/index.html